

## NÁHODNÉ VEKTORY

7.11.2017

1. Pravděpodobnost narození dcery je stejná jako pravděpodobnost narození syna. Náhodná veličina  $X$  udává počet dcer v náhodně vybrané rodině se třemi dětmi, veličina  $Y$  udává počet starších bratrů nejmladšího dítěte v téže rodině.
- Odvoďte rozdělení náhodného vektoru  $(X, Y)^T$ .
  - Jaké jsou marginální rozdělení  $X$  a  $Y$ ?
  - Jsou veličiny  $X$  a  $Y$  nezávislé?
  - Spočítejte kovarianci  $X$  a  $Y$ .
  - Spočítejte korelaci  $X$  a  $Y$ .
2. Uvažujte náhodně vybranou rodinu s pěti dětmi. Označme jako  $Z$  počet synů mezi třemi nejstaršími dětmi a  $W$  počet dcer mezi dvěma nejmladšími dětmi.
- Jaké rozdělení má  $Z$  a jaké rozdělení má  $W$ ?
  - Bude sdružené rozdělení  $(Z, W)^T$  stejné jako v příkladě 1?
3. Chystáte oslavu narozenin ve své oblíbené restauraci a zavete všechny své příbuzné (budete za ně platit). Množství peněz, které všichni Vaši hosté dohromady projí a propijí (v tisíci Kč), jsou náhodné veličiny  $X$  a  $Y$ . Ze zkušenosti víte, že vektor  $(X, Y)^T$  má spojitě rozdělení charakterizované sdruženou hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{pro } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Určete konstantu  $c > 0$ .
- Jaké je rozdělení částky, kterou zaplatíte jen za nápoje? Jaké je rozdělení obnosu, který padne jen na jídlo? Jsou tyto dvě veličiny nezávislé?
- Spočítejte kovarianci  $\text{Cov}(X, Y)$ .

*Na rozmyšlení: Jak vypadá distribuční funkce  $F(x, y)$ ?*

4. Náhodná veličina  $X$  udává dobu, kterou strávíte čekáním na tramvaj na Malostranském náměstí (v minutách) a náhodná veličina  $Y$  udává dobu, kterou následně strávíte čekáním na metro A ve stanici Malostranská (také v minutách). Ze zkušenosti víme, že náhodný vektor  $(X, Y)^T$  má spojitě rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Jaké je rozdělení jednotlivých dob čekání (na tramvaj a na metro zvlášť)?
- Jsou doby strávené čekáním na tramvaj a na metro nezávislé?
- Jaká je střední doba Vašeho celkového čekání na dopravní prostředky?

*Na rozmyšlení: Jak vypadá distribuční funkce  $F(x, y)$ ?*

## OPAKOVÁNÍ

## MARGINÁLNÍ ROZDĚLENÍ:

- (a) Jestliže má  $(X, Y)^T$  diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot  $(x_i, y_j)$ , pak marginální rozdělení veličiny  $X$  je diskrétní a spočteme jej jako

$$P(X = x_i) = \sum_j P(X = x_i, Y = y_j).$$

- (b) Jestliže má  $(X, Y)^T$  spojité rozdělení s hustotou  $f(x, y)$ , pak marginální hustotu veličiny  $X$  spočteme jako

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

Podobně pro marginální hustotu  $f_Y$  veličiny  $Y$ .

## NEZÁVISLOST:

- (a) Jestliže má  $(X, Y)^T$  spojité rozdělení s hustotou  $f$ ,  $X$  má marginální hustotu  $f_X$  a  $Y$  má hustotu  $f_Y$ , pak jsou veličiny  $X, Y$  nezávislé právě tehdy, když

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \text{ pro s.v. } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (b) Jestliže má  $(X, Y)^T$  diskrétní rozdělení a nabývá pouze hodnot  $(x_i, y_j)$ , pak jsou veličiny  $X, Y$  nezávislé právě tehdy, když

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \text{ pro všechna } x_i, y_j.$$

KOVARIANCE A KORELACE: Kovariance  $\text{Cov}(X, Y)$  náhodných veličin  $X, Y$  je definována jako

$$\text{Cov}(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) = E(XY) - (EX)(EY),$$

je-li  $EX^2 < \infty, EY^2 < \infty$ .

Korelace  $\text{Corr}(X, Y)$  je definována jako

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var } X} \sqrt{\text{Var } Y}},$$

je-li  $\text{Var } X, \text{Var } Y > 0$ . Platí vždy  $-1 \leq \text{Corr}(X, Y) \leq 1$ . Korelace je mírou lineární závislosti mezi  $X$  a  $Y$ .