

VÝSLEDKY PŘÍKLADŮ NA PROCVIČENÍ

POSLEDNÍ ÚPRAVA: 15. PROSINCE 2017

-
1. kostky: (a) $1/16$ (b) $1/2$
 2. firma: $371/462$
 3. alespoň jedna šestka a) $11/36$, b) $1 - (5/6)^n$
 4. vlak $\sum_{k=0}^9 \binom{10}{k} \left(\frac{10-k}{10}\right)^{16} (-1)^k$
 5. klíče: (a) $1/n$ (b) $(1 - 1/n)^{k-1} \cdot 1/n$
 6. rum: a) $3/10$, b) $5/6$
 7. jevy jsou závislé
 - 8.(a) neplatí, A^C a B^C jsou nezávislé,
(b) platí
(c) neplatí
(d) platí
(e) neplatí
 9. $1 - 0.9^3$
 10. dostihy: 0.6
 11. tenistka: a) $2/25 = 0.08$, b) $8/23 = 0.3478261$
 12. profesor: $\frac{3^3}{4^4 - 3^4} = \frac{27}{175}$
 13. studenti: (a) $28/45$ (b) ze skupiny B (c) $1 - (0.2)^3(0.4)^4(0.6)^2$
 14. mandarinky $15/400$
 15. krabice: $n/(m+n)$ (viz Polyovo urnové schéma)
 16. krabice s míčky: $528/5915 = 0.089$
 17. HUMOR: $5/11$
 18. spam: a) $3/75$, b) $8/25$
 19. truhly $2/3$
 20. lovci $3/29$, $8/29$, $18/29$
 21. mince: $\frac{1}{(e-1)(k+1)!}$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$
 22. bílá kulička $5/12$

23. Dvojčata: $\frac{2p}{1+p-q}$

24. Buchty: $\frac{\frac{b_k}{a_k+b_k}}{\sum_{i=1}^N \frac{b_i}{a_i+b_i}}$

25. obrazy: (a) 0.977 (b) 0.64

26. 5 nebo 7: 2/5

27. HIV test: (a) 0.77, (b) 10^{-5} , (c) 0.999

28. kostky: (a) $P(\text{"6"}) = 7/72$, $P(\text{"11"}) = 1/24$,
(b) $4/7$

(c) $P(\text{"6"}|\text{chlapec}) = 5/54$, $P(\text{"6"}|\text{dívka}) = 19/180$, $P(\text{"6"}) = 157/1620$

29. $c = 1/14$, $EX = \frac{18}{7}$, $\text{Var } X = \frac{19}{49}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1, \\ \frac{1}{14} & x \in [1, 2), \\ \frac{5}{14} & x \in [2, 3), \\ 1 & x \geq 3. \end{cases}$$

$P(X \geq 2) = \frac{13}{14}$.

Rozdělení Y : $P(Y = 0) = 4/14 = 2/7$ a $P(Y = 1) = 1/14 + 9/14 = 10/14 = 5/7$, tj. Y má alternativní rozdělení $A(p)$ s parametrem $p = 5/7$; $EY = \frac{5}{7}$

30. $a = 1/4$, $EX = 5/12$, $\text{Var } X = 155/144$, rozdělení Y : $P(Y = 0) = 1/2$, $P(Y = 1) = P(Y = 4) = 1/4$, $EY = 5/4$

31. basketbalista: $P(X = n) = \binom{n+k-1}{n} p^k (1-p)^n$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$

32.(a)

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{pro } \max\{0, K - N + n\} \leq k \leq \min\{K, n\}$$

(b) $EX = n \frac{K}{N}$

(c) $\text{Var } X = n \frac{K(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}$

33. $c = 1/(e-1)$,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \frac{e^x - 1}{e - 1}, & x \in [0, 1], \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

$EX = \frac{1}{e-1}$, $\text{Var } X = \frac{e^2 - 3e + 1}{(e-1)^2}$

34. krychle $EV = a^3/4$, $\text{Var } V = 9/112 \cdot a^6$

35. (a) Y má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, 1]$,
 (b) $EZ = 3/2$, $\text{Var } Z = 3/4$

36. (a) distr. funkce Y :

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y < 0, \\ \sqrt{y}/\pi, & y \in [0, \pi^2], \\ 1 & y > \pi^2 \end{cases}$$

hustota: $g(y) = 1/[2\pi\sqrt{y}]I[y \in [0, \pi^2]]$, $EY = \pi^2/3$
 (b) $EZ = 2/\pi$

37. (a) $c = 1/2$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (1 - \cos x)/2 = \sin^2(x/2), & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

(b) $EX = \pi/2 =$ medián X (plyne ihned ze symetrie hustoty)
 (c) $F^{-1}(u) = \arccos(1 - 2u)$, $u \in (0, 1)$

38. trojúhelník:

- (a) 0
- (b) rozdělení je rovnoměrné na intervalu $(0, \pi/2)$; hledaná pravděpodobnost je $1/3$
- (c) distribuční funkce a hustota:

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{2}{\pi} \arcsin y, & y \in (0, 1), \\ 1, & y \geq 1, \end{cases} \quad g(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & y \in (0, 1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$$P(a > 1/2) = 2/3$$

(d) $Ea = \frac{2}{\pi}$, $\text{Var } a = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2}$,

(e) $ES = \frac{1}{2\pi}$.

39. bublina: $EV = 9\pi$, $\text{Var } V = \pi^2 3^6/7$.

40. hody mincí

(a) sdružené rozdělení:

		Y		
		0	1	2
X	0	0	1/8	1/8
	1	1/8	1/4	1/8
	2	1/8	1/8	0

- (b) marginální rozdělení: $P(X = 0) = 1/4$, $P(X = 1) = 1/2$, $P(X = 2) = 1/4$, totéž pro Y , veličiny jsou závislé
 (c) $\text{Cov}(X, Y) = -1/4$, $\rho_{XY} = -1/2$

41. klobouky:

- (a) X_i má alternativní rozdělení $P(X_i = 1) = 1/n$, proto $EX_i = 1/n$, $\text{Var} X_i = (n - 1)/n^2$
 (b) jsou závislé: $P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{1}{n(n-1)} \neq P(X_i = 1)P(X_j = 1) = \frac{1}{n^2}$,
 (c) kovariance je $\frac{1}{n^2(n-1)}$,
 (d) $EX = 1$, $\text{Var} X = 1$

42. (a) $c = 4$,

- (b) $f_X(x) = xe^{-x^2}I[x \geq 0]$, $f_Y(y) = 2ye^{-y^2}I[y \geq 0]$, X a Y jsou nezávislé
 (c) $E(X^2 + Y^2) = 2$

43. maximum a minimum:

- (a) $F_U(u) = [F(u)]^n$, $f_U(u) = n[F(u)]^{n-1}f(u)$
 (b) $F_V(v) = 1 - [1 - F(v)]^n$, $f_V(v) = n[1 - F(v)]^{n-1}f(v)$
 (c) $EU = n/(n+1)$, $\text{Var} U = n/[(n+1)^2(n+2)]$, $EV = 1/(n+1)$, $\text{Var} V = n/[(n+1)^2(n+2)]$

44. $\text{Cov}(H, D) = 1/36$, jsou závislé

45. (a) $\hat{\theta} = 2\bar{X}_n$, (b) odhad je nestranný a konzistentní,

46. (a) $\hat{\lambda} = \bar{X}_n$, (b) odhad je nestranný a konzistentní,
 (c) je-li $p_0 := P(X_i = 0) = e^{-\lambda}$, pak jeden odhad je $\hat{p}_0 = e^{-\bar{X}_n}$, druhý je $\tilde{p}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I[X_i = 0]$.
 Pak oba odhady jsou konzistentní, \tilde{p} je i nestranný.

47. (a) X_i mají diskrétní rovnoměrné rozdělení, tj. $P(X_i = k) = 1/N$ pro $k = 1, \dots, N$ a tedy $EX_i = \sum_{k=1}^N \frac{k}{N} = \frac{N+1}{2}$.
 (b) $\hat{N} = 2\bar{X}_n - 1$, (c) odhad je nestranný a konzistentní.

48. (a) platí $\int_0^{\sqrt{2a}} f(x) = 1$, (b) $\hat{a} = \frac{9}{8}(\bar{X}_n)^2$, (c) ano je konzistentní.

49. bankomat: alespoň 10230

50. kostka: 0.921

51. hostina: nejvýše 45 hostů

52. konzultace: 0.013

53. terč: 0.993075