

DOMÁCÍ ÚKOL Č. 2

Termín odevzdání: 12.12.2017

Příklad 1. Náhodný vektor $(X, Y)'$ odpovídá souřadnicím náhodně vybraného bodu z jednotkového kruhu, tj. má rovnoměrné rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} c & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Určete konstantu $c > 0$ tak, aby f byla hustota.
- Určete marginální rozdělení x -ové souřadnice (tj. veličiny X) a její střední hodnotu.
- Rozhodněte, zda jsou souřadnice X a Y nezávislé.
- Spočítejte korelaci X a Y .

Pozor na meze v integrálech, např. při výpočtu marginálních hustot. Hustota je nenulová jen uvnitř jednotkového kruhu a z toho nám plyne omezení na dolní i horní mez.

Příklad 2. V šuplíku je 6 ponožek: 2 bílé, 2 černé a 2 oranžové. Potmě náhodně vytáhneme z šuplíku 3 ponožky. Označme jako X počet vytažených bílých ponožek a Y je počet vytažených oranžových ponožek.

- Napište tabulku rozdělení náhodného vektoru $(X, Y)'$.
- Jsou X a Y nezávislé?
- Spočítejte korelaci X a Y .
- Z tabulky pravděpodobnostního rozdělení určete, s jakou pravděpodobností jsou mezi třemi vytaženými ponožkami alespoň dvě stejné.

Příklad 3. Uvažujte náhodný výběr X_1, \dots, X_n z rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \frac{p}{x^{p+1}} & x \geq 1, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $p > 2$ je neznámý parametr.

- Odhadněte parametr p momentovou metodou. Dokážete říci něco o vlastnostech tohoto odhadu?
- Zvolte si nějaké $p > 2$ a nagenertejte si $n = 100$ hodnot z tohoto rozdělení.
 - Vypište prvních 10 nagenovaných hodnot (zaokrouhlujte na jedno desetinné místo) a uveďte, jaký postup a program jste k výpočtu použili.
 - Spočítejte odhad z bodu (a) na základě prvních 10, 50 a 100 hodnot. Jaké chování očekáváme pro rostoucí n ?

K nagenování výběru z tohoto rozdělení využijte nějaký generátor pseudonáhodných čísel z $[0, 1]$ a postup, který jsme měli na cvičení.

- Navrhněte dva různé odhady $P(X_i \leq 2)$. Zapište je nejprve obecně a pak je spočítejte pro Vaše data (Vašich 100 hodnot) a porovnejte.