

## BODOVÉ ODHADY II.

3.5. A 7.5. 2018

1. Uvažujme náhodný výběr  $X_1, \dots, X_n$  z exponenciálního rozdělení  $\text{Exp}(\lambda)$  s hustotou  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I[x \geq 0]$ , kde  $\lambda > 0$  je neznámé.
- Odvodte odhad  $T_n$  parametru  $\lambda$  metodou maximální věrohodnosti.
  - Je  $T_n$  konzistentní odhad parametru  $\lambda$ ?
  - Je  $T_n$  nestranný (resp. asymptoticky nestranný) odhad  $\lambda$ ? Pokud není, jak jej musíme upravit, abychom dostali nestranný odhad  $V_n$  parametru  $\lambda$ ?
- (Nápověda:  $\sum_{i=1}^n X_i$  má gama rozdělení s hustotou  $f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} I[x \geq 0]$ .)
- Spočtete rozptyl odhadů  $V_n$  a  $T_n$ . Který odhad parametru  $\lambda$  je „lepší“ a proč?
2. Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr ze spojitého rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)}, & x \geq a, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde  $a \in \mathbb{R}$  je neznámý parametr.

- Nalezněte  $T_n$  odhad  $a$  momentovou metodou. Vyšetřete jeho vlastnosti.
  - Nalezněte  $V_n$  odhad  $a$  metodou maximální věrohodnosti.
  - Vyšetřete konzistenci odhadu  $V_n$ .
  - Vyšetřete nestrannost odhadu  $V_n$ . V případě, že je odhad vychýlený, navrhněte vhodnou modifikaci vedoucí na nestranný odhad  $W_n$ .
  - Spočtete rozptyly odhadů  $T_n, V_n$  a  $W_n$  a porovnejte. Který z odhadů je nejlepší?
3. Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z rozdělení s hustotou

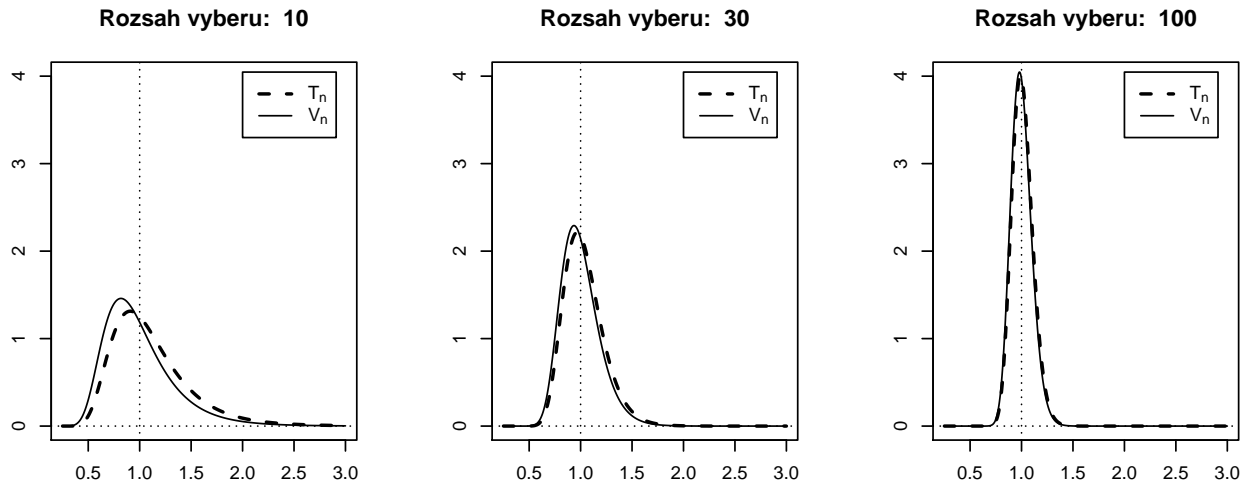
$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{-\theta-1}, & x \geq 1, \\ 0 & x < 1. \end{cases},$$

kde  $\theta > 0$  je neznámý parametr.

- Určete  $T_n$  odhad parametru  $\theta$  metodou maximální věrohodnosti.
  - Vyšetřete vlastnosti  $T_n$ .
  - Nalezněte  $U_n$  odhad  $\theta$  momentovou metodou. Vyšetřete jeho vlastnosti.
  - Navrhněte odhad pravděpodobnosti  $P(X_1 > 2)$  a diskutujte jeho vlastnosti.
4. Nechť  $X_1, \dots, X_n$  je náhodný výběr z diskrétního rovnoměrného rozdělení na množině  $\{1, \dots, M\}$ , kde  $M \in \mathbb{N}$  je neznámé.
- Odhadněte  $M$  momentovou metodou. Vyšetřete vlastnosti tohoto odhadu.
  - Odhadněte  $M$  metodou maximální věrohodnosti.
  - Zjistěte, zda je maximálně věrohodný odhad z (b) nestranný a konzistentní a případně jej vhodně modifikujte.
  - Spočtete rozptyl všech uvažovaných odhadů a rozhodněte, který z odhadů je nejlepší.

ILUSTRACE TEORETICKÝCH VLASTNOSTÍ.

- Hustoty náhodných veličin  $T_n$  a  $V_n$  z příkladu 1 pro  $\lambda = 1$ .



- Srovnání hustot maximálně věrohodného (MLE) odhadu a momentového odhadu (MOM) parametru  $a$  z příkladu 2 pro skutečné  $a = 2$ .

