

BODOVÉ ODHADY II.

9. 5. A 10. 5. 2019

1. Uvažujme náhodný výběr X_1, \dots, X_n z exponenciálního rozdělení $\text{Exp}(\lambda)$ s hustotou $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}\{x \geq 0\}$, kde $\lambda > 0$ je neznámé.
- Odvoďte odhad T_n parametru λ metodou maximální věrohodnosti.
 - Je T_n konzistentní odhad parametru λ ?
 - Je T_n nestranný (resp. asymptoticky nestranný) odhad λ ? Pokud není, jak jej musíme upravit, abychom dostali nestranný odhad V_n parametru λ ?
- (Nápověda: $\sum_{i=1}^n X_i$ má gama rozdělení s hustotou $f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbb{I}\{x \geq 0\}$.)
- Spočtete rozptyl odhadů V_n a T_n . Který odhad parametru λ je „lepší“ a proč?
2. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr ze spojitého rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-a)}, & x \geq a, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je neznámý parametr.

- Nalezněte T_n odhad a momentovou metodou. Vyšetřete jeho vlastnosti.
 - Nalezněte V_n odhad a metodou maximální věrohodnosti.
 - Vyšetřete konzistenci odhadu V_n .
 - Vyšetřete nestrannost odhadu V_n . V případě, že je odhad vychýlený, navrhněte vhodnou modifikaci vedoucí na nestranný odhad W_n .
 - Spočtete rozptyly odhadů T_n, V_n a W_n a porovnejte. Který z odhadů je nejlepší?
3. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozdělení s hustotou

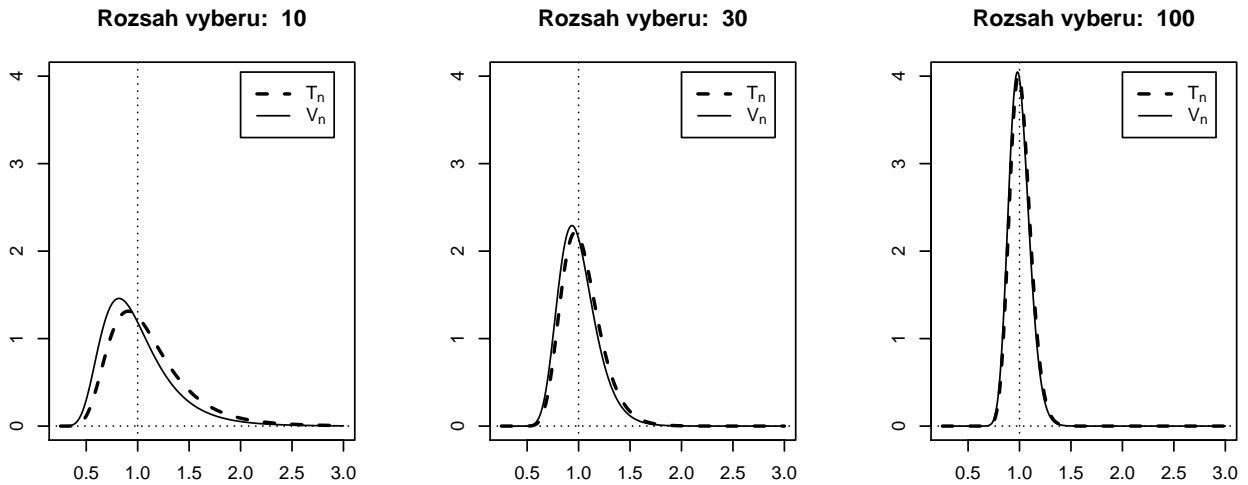
$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{-\theta-1}, & x \geq 1, \\ 0 & x < 1. \end{cases}$$

kde $\theta > 0$ je neznámý parametr.

- Určete T_n odhad parametru θ metodou maximální věrohodnosti.
 - Vyšetřete vlastnosti T_n .
 - Nalezněte U_n odhad θ momentovou metodou. Vyšetřete jeho vlastnosti.
 - Navrhněte odhad pravděpodobnosti $P(X_1 > 2)$ a diskutujte jeho vlastnosti.
4. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z diskrétního rovnoměrného rozdělení na množině $\{1, \dots, M\}$, kde $M \in \mathbb{N}$ je neznámé.
- Odhadněte M momentovou metodou. Vyšetřete vlastnosti tohoto odhadu.
 - Odhadněte M metodou maximální věrohodnosti.
 - Zjistěte, zda je maximálně věrohodný odhad z (b) nestranný a konzistentní a případně jej vhodně modifikujte.
 - Spočtete rozptyl všech uvažovaných odhadů a rozhodněte, který z odhadů je nejlepší.

ILUSTRACE TEORETICKÝCH VLASTNOSTÍ.

1. Hustoty náhodných veličin T_n a V_n z příkladu 1 pro $\lambda = 1$.



2. Srovnání hustot maximálně věrohodného (MLE) odhadu a momentového odhadu (MOM) parametru a z příkladu 2 pro skutečné $a = 2$.

