

VLASTNOSTI ODHADŮ

23.10.2018

1. X_1, X_2, \dots, X_n tvoří náhodný výběr z binomického rozdělení $\text{Bi}(2, p)$, kde $p \in (0, 1)$. Nechť $Y_i = I[X_i = 0]$.
 - (a) Rozhodněte, zda je $T_n = 1 - \sqrt{\bar{Y}_n}$ nestranný a konzistentní odhad parametru p .
 - (b) Rozhodněte, zda je $U_n = \sqrt{\bar{X}_n + \bar{Y}_n} - 1$ nestranný a konzistentní odhad p .
 - (c) Nalezněte asymptotické rozdělení U_n .
 - (d) Uvažujte náhodné vektory tvaru $(\bar{X}_n/2, U_n)^T$. Vyšetřete jejich konvergenci v pravděpodobnosti a nalezněte asymptotické rozdělení.
 - (e) Porovnejte asymptotické rozptyly $\bar{X}_n/2$ a U_n a rozhodněte, který z těchto dvou konzistentních odhadů p byste zvolili.

2. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$.
 - (a) Uvažujte odhady λ tvaru $U_n = \bar{X}_n$ a $T_n = S_n^2$. Vyšetřete jejich nestrannost a konzistenci.
 - (b) Uvažujte odhad $V_n = \frac{1}{2}(X_1 + X_n)$. Vyšetřete jeho nestrannost a konzistenci.
 - (c) Uvažujte odhad $W_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Vyšetřete jeho nestrannost a konzistenci.
 - (d) Spočítejte střední čtvercovou chybu odhadů U_n a W_n a porovnejte.
 - (e) Který z odhadů U_n, T_n, V_n, W_n byste spíše doporučili a proč?
Využijte toho, že pro Poissonovo rozdělení je $E(X_1 - \lambda)^4 = \lambda + 3\lambda^2$.
 - (f) Pro $n = 1$ najděte nestranný odhad parametru $\theta_X = e^{-2\lambda}$. Zamyslete se nad jeho užitečností.

3. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z alternativního rozdělení s parametrem $p \in (0, 1)$.
 - (a) Rozhodněte, zda je $T_n = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)$ nestranný a konzistentní odhad rozptylu $p(1 - p)$. Pokud není, spočítejte jeho vychýlení.
 - (b) Uvědomte si, jaký je vztah mezi T_n a výběrovým rozptylem S_n^2 pro alternativní rozdělení.
 - (c) Ukažte, že neexistuje nestranný odhad parametru $\theta_X = \frac{1}{p}$.

4. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$. Uvažujte odhady $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ a $\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$.
 - (a) Spočítejte střední čtvercovou chybu S_n^2 .
 - (b) Spočítejte střední čtvercovou chybu σ_n^2 a porovnejte s (a).
 - (c) Rozhodněte, zda $S_n = \sqrt{S_n^2}$ je konzistentní a nestranný odhad parametru $\theta_X = \sigma$. Pokud není nestranný, spočítejte jeho vychýlení.
Návod: Pro výpočet vychýlení využijte toho, že znáte rozdělení $(n-1)S_n^2/\sigma^2$ a že hustota χ_k^2 rozdělení je $f_k(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2} I[x \geq 0]$.

5. Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení $R(0, \theta)$, kde $\theta > 0$.
 - (a) Rozhodněte, zda $\tilde{\theta}_n = 2\bar{X}_n$ je nestranný a konzistentní odhad parametru θ .
 - (b) Spočítejte střední čtvercovou chybu odhadu $\tilde{\theta}_n$.
 - (c) Rozhodněte, zda $\hat{\theta}_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ je nestranný a konzistentní odhad parametru θ .
 - (d) Spočítejte střední čtvercovou chybu odhadu $\hat{\theta}_n$.
 - (e) Kterému z odhadů $\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n$ byste dali přednost?

OPAKOVÁNÍ Z PŘEDNÁŠKY

Nechť $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ je náhodný výběr z rozdělení $F_X \in \mathcal{F}$, kde $\theta_X = t(F_X)$ je nějaký parametr tohoto rozdělení. Nechť $\hat{\theta}_n = T_n(\mathbf{X})$ je odhad θ_X . Pak $\hat{\theta}_n$ může mít následující **vlastnosti**:

- $\hat{\theta}_n$ je nestranný, pokud $E\hat{\theta}_n = \theta_X$ pro všechna $F_X \in \mathcal{F}$,
- $\hat{\theta}_n$ je konzistentní, pokud $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_X$ pro $n \rightarrow \infty$ pro všechna $F_X \in \mathcal{F}$.

Číselně nás může zajímat

- vychýlení $E(\hat{\theta}_n - \theta_X)$,
- střední čtvercová chyba

$$\text{MSE}(\hat{\theta}_n) = E(\hat{\theta}_n - \theta_X)^2 = \text{Var} \hat{\theta}_n + \left(E(\hat{\theta}_n - \theta_X)\right)^2,$$

- rozptyl asymptotického rozdělení, tj. σ^2 takové, že platí $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_X) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$ pro $n \rightarrow \infty$.

JENSENOVA NEROVNOST. Nechť X je náhodná veličina s hodnotami v intervalu I , tj. $P(X \in I) = 1$. Nechť g je konvexní funkce taková, že existuje $Eg(X)$. Pak

$$Eg(X) \geq g(EX)$$

a rovnost nastává právě tehdy, když je $g(x) = ax + b$ pro $x \in I$, nebo když je X rovno konstantě skoro jistě.