Cvičení 11 - výsledky

11.11.2011

Příklad 1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = x + 1 - \frac{2}{x-1}$.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Pro zjištění oboru hodnot musíme vyřešit rovnici $\frac{x^2+1}{x-1} = a$, tj. $x^2 - ax + (1+a) = 0$. Tato rovnice nemá řešení v reálných číslech pro $a \in (2-\sqrt{8}; 2+\sqrt{8})$. Odtud $H(f) = (-\infty; 2-\sqrt{8}\rangle \cup \langle 2+\sqrt{8}; \infty)$.

Funkce f je spojitá na svém definičním oboru. $\lim_{x\to 1-} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty$ a $\lim_{x\to 1+} \frac{x^2+1}{x-1} = \infty$.

Derivace funkce je $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{2}{x^2-2x+1}$. Po vyřešení kvadratické rovnice zjistíme, že derivace je kladná na intervalu $(-\infty; 1-\sqrt{2})$ a na intervalu $(1+\sqrt{2}; \infty)$ a záporná na intervalu $(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$.

Dále odtud získáme, že funkce nabývá lokálního maxima v bodě $1-\sqrt{2}$, $f(1-\sqrt{2}) = -2+2\sqrt{2}$, a lokálního minima v bodě $x = 1+\sqrt{2}$, $f(1+\sqrt{2}) = 2+2\sqrt{2}$. Funkce f nenabývá globálních extrémů.

Ze spojitosti je tedy funkce f rostoucí na intervalu $(-\infty; 1-\sqrt{2}\rangle$ a na intervalu $\langle 1+\sqrt{2}; \infty)$ a klesající na intervalu $\langle 1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\rangle$.

Průsečík s osou x neexistuje ($0 \notin H(f)$), průsečík s osou y je bod $[0; -1]$.

Funkce není ani sudá ani lichá, neboť $f(-x) = -\frac{x^2+1}{x+1}$. Funkce není periodická.

Druhá derivace je $f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$. f'' je záporná na intervalu $(-\infty; 1)$ a kladná na $(1; \infty)$. Odtud je funkce f konkávní na intervalu $(-\infty; 1)$ a konvexní na intervalu $(1; \infty)$. Funkce nemá inflexní body.

Tečna v bodě x_0 má rovnici $t : y = \frac{x_0^2+1}{x_0-1} + (1 - \frac{2}{x_0^2-2x_0+1})(x - x_0)$. Tedy v blízkosti bodu $x = 1$ mají tečny zápornou směrnici a blíží se limitně přímce $x = 1$.

Asymptoty nás zajímají v nekonečnech. Směrnice asymptot je dána limitami $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = 1$. Posunutí asymptot je dáno limitami $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{(x-1)} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$. Asymptota v $-\infty$ a v ∞ je stejná, a to přímka $y = x + 1$.

Příklad 2. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x = x(x^2 + 6x - 9)$.

$D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}$, protože $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ a funkce f je spojitá na celém svém definičním oboru, tedy nabývá všech hodnot mezi $-\infty$ a ∞.

Derivece funkce je $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3)$. Tedy f' je kladná na intervalech $(-\infty; -3)$ a $(1; \infty)$ a záporná na intervalu $(-3; 1)$.

Odtud a ze spojitosti je funkce f rostoucí na intervalu $(-\infty; -3\rangle$ a na intervalu $\langle 1; \infty)$ a klesající na intervalu $\langle -3; ; \rangle$. V bodě $x = -3$ má lokální maximum, $f(-3) = 27$ a v bodě $x = 1$ má lokální minimum, $f(1) = -5$. Funkce nenabývá globálních extrémů.

Průsečíky s osou x získáme vyřešením rovnice $0 = x(x^2+6x-9) = x(x+3-3\sqrt{2})(x+3+3\sqrt{2})$, jsou to tedu body $[-3-3\sqrt{2}; 0], [0; 0], [-3+3\sqrt{2}; 0]$. Průsečík s osou y je bod $[0; 0]$.

Funkce není ani sudá, ani lichá, neboť $f(-x) = -x^3 + 3x^2 + 9x$. FUnkce není ani periodická.

Druhá derivace je $f''(x) = 6x + 6$. *Druhá derivace je záporná na* $(-\infty; -1)$ *a kladná na* $(-1; \infty)$. *Odtud je funkce konkávní na* $(-\infty; -1\rangle$ *a konvexní ne* $\langle -1; \infty)$. *Bod* $x = -1$ *je inflexní.*

Tečna v inflexním bodě $x = -1$ *má rovnici* $t_{-1} : y = 11 + 0(x + 1) = 11$.

Asymptoty neexistují, neboť $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+3x^2-9x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 + 3x - 9 = \infty$.

V bodě $[-5; -5]$ *je tečna vyjádřena rovnicí* $t_{-5} : y = -5 + 36(x + 5) = 36x + 175$.

V bodě $[1; -5]$ *je tečna tvaru* $t_1 : y = -5$.

Příklad 3. *Určete u daných funkcí maximální intervaly konvexity a konkavity:*

a) $f(x) = \frac{\cos x}{2-\sin x},\ D(f) = \mathbb{R}$,
$f'(x) = \frac{1-2\sin x}{(2-\sin x)^2}, f''(x) = \frac{-2\cos x\cdot(1+\sin x)}{(2-\sin x)^3}$,
$\bigcap : \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle, k \in \mathbb{Z}$,
$\bigcup : \langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\rangle, k \in \mathbb{Z}$.

b) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1},\ D(f) = \mathbb{R}$,
$f'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}, f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$,
$\bigcup : \langle -\sqrt{3}; 0\rangle$ *a* $\langle \sqrt{3}; \infty)$,
$\bigcap : (-\infty; -\sqrt{3}\rangle$ *a* $\langle 0; \sqrt{3}\rangle$.

c) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5,\ D(f) = \mathbb{R}$,
$f'(x) = 4x^3 - 6x^2, f''(x) = 12x^2 - 12x$,
$\bigcup : (-\infty; 0\rangle$ *a* $\langle 1; \infty)$,
$\bigcap : \langle 0; 1\rangle$.

d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+27},\ D(f) = \mathbb{R}$,
$f'(x) = \frac{x^4+81x^2}{(x^2+27)^2}, f''(x) = \frac{54x(81-x^2)}{(x^2+27)^3}$,
$\bigcup : (-\infty; -9\rangle$ *a* $\langle 0; 9\rangle$,
$\bigcap : \langle -9; 0\rangle$ *a* $\langle 9; \infty)$.

e) $f(x) = \arcsin \frac{1+x}{1-2x}, D(f) = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$,
$f'(x) = \sqrt{\frac{4x^2-4x+1}{3x^2-6x}}, f''(x) = -\sqrt{\frac{3x^2-6x}{4x^2-4x+1}} \cdot \frac{2x^2+x-1}{x^2(x-2)^2}$,
$\bigcup : (-\infty; -1\rangle$ *a* $\langle 2; \infty)$,
$\bigcap : \langle -1; 0\rangle$.

f) $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1},\ D(f) = \mathbb{R}$,
$f'(x) = \frac{x}{x^2+1}, f''(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,
$\bigcup : \langle -1; 1\rangle$,
$\bigcap : (-\infty; -1\rangle$ *a* $\langle 1; \infty)$.

g) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x,\ D(f) = \mathbb{R},$
$f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{x^2+1}, f''(x) = \frac{2}{(x^2+1)^2},$
$\bigcup : \mathbb{R}.$

h) $f(x) = e^{2x-x^2},\ D(f) = \mathbb{R},$
$f'(x) = (2-2x)e^{2x-x^2}, f''(x) = e^{2x-x^2}(2-8x+4x^2),$
$\bigcap : \langle 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle,$
$\bigcup : (-\infty; 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$ *a* $\langle 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; \infty),$

i) $f(x) = \frac{\sin x}{\sin 2x},\ D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\},$
Funkce lze spojitě dodefinovat v bodech $x_k = k\pi$ *hodnoutou* $f(x_k) = \frac{(-1)^k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$
$f'(x) = \frac{\sin x}{2\cos^2 x}, f''(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1+\sin^2 x}{2\cos^2 x},$
$\bigcap : \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; (2k+1)\pi\right) \cup \left((2k+1)\pi; \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right);$
$\bigcup : \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; 2k\pi\right) \cup \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$

Příklad 4. *Určete globální extrémy dané funkce f na daném intervalu I:*

a) $f(x) = x^2 - 6x + 10,\ I = \langle -1, 5 \rangle,$
$f'(x) = 2x - 6, f'(x) = 0$ *pro* $x = 3,$
$f(-1) = 17, f(3) = 1, f(5) = 5.$
Funkce f nabývá globálního minima v bodě $x = 3, f(3) = 1,$ *a globálního maxima v bodě* $x = -1, f(-1) = 17.$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x-1},\ I = (-4, 0\rangle,$
$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2},$
$\lim_{x\to -4} f(x) = \frac{3}{4}, f(0) = -1.$
Funkce f nabývá globálního minima v bodě $x = 0, f(0) = -1,$ *a globální maximum neexistuje.*

c) $f(x) = |x^2 - 6x + 5|,\ I = (-5; 5),$
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6, & x \in (-\infty; 1) \cup (5; \infty) \\ -2x + 6, & x \in (1; 5) \end{cases}, f'(x) = 0 \text{ pro } x = 3.$$
$\lim_{x\to -5} f(x) = 60, f(1) = 0, f(3) = 4, \lim_{x\to 5} f(x) = 0.$
Funkce f nabývá globálního minima v bodě $x = 1, f(1) = 0,$ *a globální maximum neexistuje.*

d) $f(x) = x - 2\ln x,\ I = \langle 1; e \rangle.$
$f'(x) = 1 - \frac{2}{x}, f'(x) = 0$ *pro* $x = 2.$
$f(1) = 1, f(2) = 2(1 - \ln 2), f(e) = e + 2.$
Funkce f nabývá globálního minima v bodě $x = 2, f(2) = 2(1 - \ln 2),$ *a globálního maxima v bodě* $x = e, f(e) = e + 2.$

Příklad 5. *Vyšetřete průběh funkce následujících funkcí:*

a) $f(x) = \frac{2x^2-10}{x+3},\ D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\},\ H(f) = (-\infty; -20\rangle \cup \langle -4; \infty), P_x = [\sqrt{5}; 0], P_y = [; \frac{10}{3}],$
$f'(x) = \frac{2x^2+12x+10}{x^2+6x+9}, f''(x) = \frac{16}{(x+3)^3},$
$x_{min} = -3 + \sqrt{14}, x_{max} = -3 - \sqrt{14},$
$\uparrow: (-\infty; -3 - \sqrt{14}\rangle$ *a* $\langle -3 + \sqrt{14}; \infty), \downarrow: \langle -3 - \sqrt{14}; -3)$ *a* $(-3; -3 + \sqrt{14}\rangle,$
$\bigcap : (-\infty; -3), \bigcup : (-3; \infty),$
asymptota $p : y = 2x + 6.$

b) $f(x) = x \ln \frac{1}{x},\ D(f) = (0; \infty), H(f) = (-\infty; e^{-1}\rangle,\ P_x = [1; 0], P_y = \emptyset,$
$f'(x) = \ln \frac{1}{x} - 1, f''(x) = -\frac{1}{x},$
$x_{max} = e^{-1},$
$\downarrow: \langle e^{-1}; \infty), \uparrow: (0; e^{-1}\rangle,$
$\bigcap : (0; \infty),$
asymptota neexistuje.

c) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8, D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle -1; \infty), P_x = \{[-\sqrt{8}; 0], [-2; 0], [\sqrt{8}; 0], [2; 0]\}, P_y = [0; 8],$
$f'(x) = 4x^3 - 12x, f''(x) = 12x^2 - 12,$
$x_{max} = 0, x_{min1} = -\sqrt{3}, x_{min2} = \sqrt{3},$
$\uparrow: \langle -\sqrt{3}; 0\rangle$ *a* $\langle \sqrt{3}; \infty), \downarrow: (-\infty; -\sqrt{3}\rangle$ *a* $\langle 0; \sqrt{3}\rangle,$
$\bigcap : \langle -1; 1\rangle, \bigcup : (-\infty; -1\rangle$ *a* $\langle 1; \infty),$
asymptota neexistuje, funkce je sudá.

d) $f(x) = 3x + |x| - 1,\ D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = \mathbb{R}, P_x = [\frac{1}{4}; 0], P_y = [0; -1],$
$f'(x) = 3 + \operatorname{sign} x, f''(x) = 0,$
$\uparrow: D(f),\ \bigcap = \bigcup : D(f),$
asymptota u $-\infty$ *je* $p_1 : y = 2x - 1,$ *asymptota u* ∞ *je* $p_2 : y = 4x - 1.$

e) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}},\ D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle -\sqrt{5}; 1),\ P_x = [2; 0], P_y = [0, -2],$
$f'(x) = \frac{1+2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}, f''(x) = \frac{4x^2-6x+1}{2(x^2+1)^{\frac{5}{2}}},$
$x_{min} = -\frac{1}{2},$
$\uparrow: \langle -\frac{1}{2}; \infty), \downarrow: (-\infty; -\frac{1}{2}\rangle,$
$\bigcup : \langle \frac{3-\sqrt{5}}{4}; \frac{3+\sqrt{5}}{4}\rangle, \bigcap : (-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{4}\rangle$ *a* $\langle \frac{3+\sqrt{5}}{4}; \infty),$
asymptota u $-\infty$ *je* $p_1 : y = -1,$ *asumptota u* ∞ *je* $p_2 : y = 1.$

f) $f(x) = (x + 2)^{\frac{2}{3}} - (x - 2)^{\frac{2}{3}}, D(f) = \mathbb{R}, H(f) = \langle -\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{4}\rangle,\ P_x = P_y = [0; 0],$
$f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\right), f''(x) = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^4}}\right),$
$x_{min} = -2, x_{max} = 2,$
$\downarrow: (-\infty; -2\rangle$ *a* $\langle 2; \infty), \uparrow: \langle -2; 2\rangle,$
$\bigcup : \langle -2; 0\rangle$ *a* $\langle 2; \infty), \bigcap : (-\infty; -2\rangle$ *a* $\langle 0; 2\rangle,$
asymptota je $p : y = 0,$ *funkce je lichá.*