Cvičení 10 - výsledky

4.11.2011

Příklad 1. *Množina P_x značí průsečíky s osou x, P_y průsečíky s osou y.*

a) $f(x) = \frac{x}{x^2-1},\ D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\},\ P_x = P_y = \{[0;0]\},$
$f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0,$
Funkce f je klesající na $(-\infty;-1)$, na $(-1;1)$ a na $(1;\infty)$. Funkce f nenabývá extrémů.

b) $f(x) = \frac{\ln x}{x},\ D(f) = (0;\infty), P_x = \{[1;0]\}, P_y = \emptyset,$
$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2},\ f' > 0$ *na* $(0;e), f' < 0$ *na* (e,∞)
Funkce f je rostoucí na $(0;e\rangle$ a klesající na $\langle e;\infty)$, v bodě $x_0 = e$ nabývá (globálního) maxima, $f(e) = e^{-1}$.

c) $f(x) = x - \sin x,\ D(f) = \mathbb{R},\ P_x = P_y = \{[0;0]\},$
$f'(x) = 1 - \cos x,\ f' \leq 0$
Funkce f je rostoucí na $D(f)$, nenabývá extrémů, v bodech $x_k = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, má inflexní body.

d) $f(x) = |x+1| + |x-1|,\ D(f) = \mathbb{R},\ P_x = \emptyset, P_y = \{[0;2]\},$

$$f'(x) = \begin{cases} 2,\ x > 1 \\ 0,\ x \in (-1,1) \\ -2,\ x < -1 \end{cases},$$

Funkce f je klesající na $(-\infty;-1\rangle$, konstantní na $\langle -1;1\rangle$ a rostoucí na $\langle 1;\infty)$.
Funkce nabývá (globálního) minima na $\langle -1;1\rangle, f(1) = 2$.

e) $f(x) = \frac{\cos x}{2-\cos x},\ D(f) = \mathbb{R},\ P_x = \{[k\pi;0]; k \in \mathbb{Z}\}, P_y = \{[0;\frac{1}{2}]\},$
$k \in \mathbb{Z}:$
$f'(x) = \frac{-2\sin x}{(2-\cos x)^2},\ f'(x) > 0$ *pro* $x \in (\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi), f'(x) < 0$ *pro* $x \in (0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi),$
Funkce f je klesající na intervalech $\langle 0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi\rangle$ a rostoucí na intervalech $\langle \pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi\rangle$.
V bodech $x_{1k} = \pi + 2k\pi$ nabývá (globálního) minima, $f(\pi + 2k\pi) = \frac{-1}{3}$, v bodech $x_{2k} = 2k\pi$ nabývá (globálního) maxima, $f(2k\pi) = 1$.

$f)$ $f(x)=\cos\frac{\pi}{x},\ D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\},\ P_x=\{[\frac{2}{k};0];k\in\mathbb{Z}\},P_y=\emptyset,$

$k\in\mathbb{Z}:$

$f'(x)=\frac{\pi\sin\frac{\pi}{x}}{x^2},\ f'(x)>0$ *pro* $x\in(\frac{1}{2k+1};\frac{1}{2k}),f'(x)<0$ *pro* $x\in(\frac{1}{2k};\frac{1}{2k-1}),$

Funkce f *je rostoucí na intervalech* $\langle\frac{1}{2k+1};\frac{1}{2k}\rangle$ *a klesající na intervalech* $\langle\frac{1}{2k};\frac{1}{2k-1}\rangle$.

V bodech $x_{1k}=\frac{1}{2k+1}$ *nabývá (globálního) minima,* $f(\frac{1}{2k+1})=-1,$

v bodech $x_{2k}=\frac{1}{2k}$ *nabývá (globálního) maxima,* $f(\frac{1}{2k})=1.$

$g)$ $f(x)=x+|\sin x|,\ D(f)=\mathbb{R},P_x=P_y=\{[0;0]\},$

$f'(x)=1+\operatorname{sign}\sin x\cdot\cos x,x\in D(f)\setminus\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\},\ f'>0$ *všude, kde existuje,*

Funkce f *je rostoucí na celém svém definičním oboru, nenabývá extrémů.*

$h)$ $f(x)=\frac{x^3}{2^x},\ D(f)=\mathbb{R},\ P_x=P_y=\{[0;0]\},$

$f'(x)=\frac{x^2\cdot(3-x\ln 2)}{2^x},\ f'(x)>0$ *pro* $x\in(-\infty;\frac{3}{\ln 2}),f'(x)<0$ *pro* $x\in(\frac{3}{\ln 2};\infty),$

Funkce f *je rostoucí na* $(-\infty;\frac{3}{\ln 2}\rangle$ *a klesající na* $\langle\frac{3}{\ln 2};\infty)$.

Funkce f *nabývá (globálního) maxima v bodě* $x=\frac{3}{\ln 2},f(\frac{3}{\ln 2})=\frac{27}{\ln^3 2\cdot e^3}.$

$i)$ $f(x)=-x^3+4x,\ D(f)=\mathbb{R},\ P_x=\{[-2;0],[0;0],[2;0]\},P_y=\{[0;0]\},$

$f'(x)=-3x^2+4,f'(x)>0$ *pro* $|x|<\frac{2}{\sqrt{3}},f'(x)<0$ *pro* $|x|>\frac{2}{\sqrt{3}},$

Funkce f *je rostoucí na* $\langle-\frac{2}{\sqrt{3}};\frac{2}{\sqrt{3}}\rangle$ *a klesající na* $(-\infty;-\frac{2}{\sqrt{3}}\rangle$ *a na* $\langle\frac{2}{\sqrt{3}};\infty)$.

Funkce f*nabývá lokálního minima v bodě* $x=-\frac{2}{\sqrt{3}},f(-\frac{2}{\sqrt{3}})=-\frac{16}{3\sqrt{3}},$ *a lokálního maxima v bodě* $x=\frac{2}{\sqrt{3}},f(\frac{2}{\sqrt{3}})=\frac{16}{3\sqrt{3}}.$

$j)$ $f(x)=\ln\cosh x,D(f)=\mathbb{R},P_x=P_y=\{[0;0]\},$

$f'(x)=\frac{\sinh x}{\cosh x},f'(x)>0$ *pro* $x>0,f'(x)<0$ *pro* $x<0,$

Funkce f *je klesající na* $(-\infty;0\rangle$ *a rostoucí na* $\langle 0,\infty)$. *V bodě* $x=0$ *nabývá (globálního) minima,* $f(0)=0.$

$k)$ $f(x)=e^{\sin^2 x},\ D(f)=\mathbb{R},\ P_x=\emptyset,P_y=\{[0;1]\},$

$k\in\mathbb{Z}:$

$f'(x)=e^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x,\ f'(x)>0$ *pro* $x\in(k\pi,\frac{(2k+1)\pi}{2}),f'(x)<0$ *pro* $x\in(\frac{(2k-1)\pi}{2};k\pi)$

Funkce f *je rostoucí na intervalech* $\langle 0,\frac{k\pi}{2}\rangle$ *a klesající na intervalech* $\langle\frac{k\pi}{2};k\pi\rangle$.

Funkce f *nabývá (globálního) minima v bodech* $x_{1k}=k\pi,f(k\pi)=1,$

a (globálního) maxima v bodech $x_{2k}=\frac{(2k-1)\pi}{2},$

$f(\frac{(2k-1)\pi}{2})=e.$

l) $f(x) = (2x-3)\cdot e^{-|x-1|},\ D(f)=\mathbb{R},\ P_x = \{[\frac{3}{2};0]\}, P_y = \{[0;-3e^{-1}]\}$,

$f'(x) = e^{-|x-1|}\cdot(2+(2x-3)\cdot\operatorname{sign}(1-x)) = \begin{cases} e^{x-1}\cdot(2x-1), & x<1 \\ e^{1-x}\cdot(-2x+5), & x>1 \end{cases}$,

$f'(x)>0$ *pro* $x\in(1;\frac{5}{2}),\ f'(x)<0$ *pro* $x\in(-\infty;1)\cup(\frac{5}{2};\infty)$,

Funkce f *je rostoucí na* $\langle 1;\frac{5}{2}\rangle$ *a klesající na* $(-\infty;1\rangle$ *a na* $\langle\frac{5}{2};\infty)$.

Funkce f *nabývá lokálního maxima v bodě* $x=\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2}) = 2e^{\frac{3}{2}}$

a lokálního minima v bodě $x=1, f(1)=-1$.

m) $f(x) = x^2\cdot e^{-x}, D(f)=\mathbb{R},\ P_x=P_y=\{[0;0]\}$,

$f'(x) = e^{-x}(2x-x^2),\ f'(x)>0$ *pro* $x\in(0;2), f'(x)<0$ *pro* $x\in(-\infty;0)\cup(2;\infty)$,

Funkce f *je klesající na* $(-\infty;0\rangle$ *a na* $\langle 2;\infty)$ *a rostoucí na* $\langle 0;2\rangle$.

Funkce f *nabývá (globálního) minima v bodě* $x=0, f(0)=0$,

a lokálního maxima v bodě $x=2, f(2)=4e^{-2}$.

n) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}, D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ P_x=P_y=\{[0;0]\}$,

$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x^4}}\cdot\frac{x^2+2x}{(x+1)^2},\ f'(x)>0$ *pro* $x\in(-\infty;-2)\cup(0;\infty), f'(x)<0$ *pro* $x\in(-2;0)$,

Funkce f *je rostoucí na* $(-\infty;-2\rangle$ *a na* $\langle 0;\infty)$ *a klesající na* $\langle -2;-1)\cup(-1;0\rangle$.

Funkce f *nabývá lokálního maxima v bodě* $x=-2, f(-2)=\sqrt[3]{4}$

a lokálního minima v bodě $x=0, f(0)=0$.

o) $f(x) = \left(\frac{4+x}{4-x}\right)^4,\ D(f)=\mathbb{R}\setminus\{4\},\ P_x=\{[-4;0]\}, P_y=\{[0;1]\}$.

$f'(x) = \frac{32(4+x)^3}{(4-x)^5},\ f'(x)<0$ *pro* $x\in(-\infty;-4)\cup(4;\infty), f'(x)>0$ *pro* $x\in(-4;4)$,

Funkce f *je rostoucí na* $\langle -4;4)$ *a klesající na* $(-\infty;-4\rangle$ *a na* $(4;\infty)$.

V bodě $x=-4$*nabývá (globálního) minima,*$f(-4)=0$.

Příklad 2. *Funkce* $f(x)=x+\frac{1}{x}$, *jejíž* $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=0$ *pro* $x=\pm1$, *nabývá minima na* $(0,\infty)$ *v bodě* $x_0=1,\ f(1)=2$.

Funkce $f(x)=x-x^2$, *jejíž* $f'(x)=1-2x=0$ *pro* $x_0=\frac{1}{2}$, *nabývá maxima na* $\mathbb{R}$ *v bodě* $x_0=\frac{1}{2},\ f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

Příklad 3. *Obvod* $O=2a+2b=20cm$. *Odtud* $a=10-b$.

Obsah $S=a\cdot b=(10-b)\cdot b=10b-b^2$. *Tedy* $S'(b)=10-2b=0$ *pro* $b=5cm$. *Tedy* $a=5cm$.

Příklad 4. *Objem nádoby je* $V=\pi r^2 v=2dm^3$. *Odtud* $v=\frac{2}{\pi r^2}$.

Povrch je pro nádobu s víkem $S_1=2\pi r^2+2\pi rv=2\pi r^2+2\cdot\frac{2}{r}$ *a pro nádobu bez víka* $S_2=\pi r^2+2\pi rv=\pi r^2+2\cdot\frac{2}{r}$.

$$S_1'(r)=4\pi r-\frac{4}{r^2}=0 \text{ pro } r=\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ a } v=\frac{2}{\pi r^2}=\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

$$S_2'(r) = 2\pi r - \frac{4}{r^2} = 0 \text{ pro } r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \text{ a } v = \frac{2}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}.$$

Příklad 5. *$f'(x) = \left(\frac{2x+3}{x-6}\right)' = -\frac{15}{(x-6)^2}$ je záporná na $\mathbb{R}\setminus\{6\}$. Funkce nenabývá žádných extrémů, neboť její derivace existuje na celém jejím definičním oboru, ovšem nikde nenabývá hodnoty 0.*

Příklad 6. *Lagrangeova věta říká, že pokud funkce f je spojitá na $\langle a;b\rangle$ a existuje $f'(x)$ pro každé $x \in (a;b)$, potom existuje alespoň jeden bod $c \in (a;b)$ takový, že $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

a) $f(x) = (x^2-1)\cdot(x-2),\ I = \langle 1;2\rangle,\ f(2) - f(1) = 3\cdot 0 - 0\cdot(-2) = 0$
$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1,\ f'(c) = \frac{0}{1},\ c = \frac{2+\sqrt{7}}{3}.$
b) $f(x) = \ln x,\ I = \langle 1;a\rangle, a > 1,\ f(a) - f(1) = \ln a$
$f'(x) = \frac{1}{x},\ f'(c) = \frac{\ln a}{a-1},\ c = \frac{a-1}{\ln a}.$