Cvičení 9 - výsledky

2.11.2011

Příklad 1.

a) $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2,$
$f'(x) = 3x^2 - 9x, \quad f'(x) = 0$ *pro* $x \in \{0; 3\}.$
Funkce f *je rostoucí na* $(-\infty; 0\rangle$ *klesající na* $\langle 0, 3\rangle$ *a rostoucí na* $\langle 3; \infty),$
má lokální extrémy v bodech $x_0 = 3, x_1 = 0, f(3) = -\frac{27}{2}, f(0) = 0,$ *není ani sudá, ani lichá.*

b) $f(x) = \frac{|x-3|}{x^2-9} + 5$ *pro* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\},$
$f'(x) = \frac{-\operatorname{sign}(x-3)}{(x+3)^2}$ *pro* $x \neq -3, \quad f'(x) \neq 0$ *vždy.*
Funkce f *je rostoucí na* $(-\infty, -3)$ *a na* $(-3, 3)$ *a klesající na* $(3, \infty),$
nemá žádné lokální extrémy a není ani sudá, ani lichá.

c) $f(x) = (|x+6| - 2)^3 + 5,$
$f'(x) = 3(x+4)^2$ *pro* $x \in (-6; \infty), f'(x) = -3(x+8)^2$ *pro* $x \in (-\infty; -6),$
$f'(x) = 0$ *pro* $x \in \{-4; -8\}.$
Funkce f *je klesající na* $(-\infty; -6\rangle$ *a rostoucí na* $\langle -6; \infty),$ *má lokální extrém v bodě* $x_0 = -6,$
$f(-6) = -3,$ *v bodech* -8 *a* -4 *má inflexní body a není ani sudá, ani lichá.*

d) $f(x) = x\sqrt{x^2+1},$
$f'(x) = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad f'(x) > 0$ *vždy,*
Funkce f *je rostoucí na celém* $\mathbb{R},$ *nemá žádné lokální extrémy a je lichá.*

e) $f(x) = e^{-x^2} + |1 - e^{-x^2}| + 4x^2 = 1 + 4x^2,$
$f'(x) = 8x, f'(x) = 0$ *pro* $x_0 = 0.$
Funkce f *je klesající na* $(-\infty; 0\rangle$ *a rostoucí na* $\langle 0; \infty),$ *má lokální extrém v bodě* $x_0 = 0, f(0) = 0,$
je sudá.

f) $f(x) = x^3 - \frac{1}{10}x^5,$
$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x^4, f'(x) = 0$ *pro* $x \in \{0; -\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$
Funkce f *je klesající na* $(-\infty; -\sqrt{6}\rangle$ *a na* $\langle \sqrt{6}; \infty)$ *a rostoucí na* $\langle -\sqrt{6}; \sqrt{6}\rangle,$
má lokální extrémy v bodech $x_0 = -\sqrt{6}, x_1 = \sqrt{6}, f(-\sqrt{6}) = -\sqrt{6^3} + \frac{1}{10}\sqrt{6^5}, f(\sqrt{6}) = \sqrt{6^3} - \frac{1}{10}\sqrt{6^5},$
má inflexní bod $x_2 = 0$ *a je lichá.*

g) $f(x) = \frac{5-x^2}{x^2+1},$
$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+1)^2}, f'(x) = 0$ *pro* $x = 0.$
Funkce f *je rostoucí na* $(-\infty; 0\rangle$ *a klesající na* $\langle 0; \infty),$ *má lokální extrém v bodech* $x_0 = 0, f(0) = 5.$
Funkcef je sudá.

h) $f(x) = \ln|x| - 5x$ *pro* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
$f'(x) = \frac{1}{x} - 5$ *pro* $x \in D(f)$, $f'(x) > 0$ *pro* $x \in (0; \frac{1}{5})$, $f'(x) < 0$ *pro* $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{1}{5}; \infty)$,
Funkce f *je rostoucí na* $(0; \frac{1}{5}\rangle$ *a klesající na* $(-\infty; 0)$ *a na* $\langle\frac{1}{5}; \infty)$.
Funkce f *má v bodě* $x = \frac{1}{5}$ *lokální maximum,* $f(\frac{1}{5}) = -(1 + \ln 5)$.
Funkce f *není ani sudá, ani lichá.*

i) $f(x) = \sin^2 x + \sin x$ *pro* $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$,
$f'(x) = \cos x(2\sin x + 1)$, $f'(x) > 0$ *pro* $x \in \langle 0; \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{11\pi}{6}; 2\pi\rangle$,
$f'(x) < 0$ *pro* $x \in (\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}) \cup (\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6})$,
Funkce f *je rostoucí na* $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$, *na* $\langle\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\rangle$ *a na* $\langle\frac{11\pi}{6}; 2\pi\rangle$ *a klesající na* $\langle\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\rangle$ *a na* $\langle\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\rangle$.
Funkce f *má v bodech* $x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{3\pi}{2}$ *lokální maxima,* $f(\frac{\pi}{2}) = 2, f(\frac{3\pi}{2}) = 0$,
a v bodech $x_3 = \frac{7\pi}{6}, x_4 = \frac{11\pi}{6}$ *lokální minima,* $f(\frac{7\pi}{6}) = f(\frac{11\pi}{6}) = -\frac{1}{4}$.
Funkcef není ani sudá, ani lichá.

j) $f(x) = \frac{2x}{x^2+7}$.
$f'(x) = -\frac{2x^2-14}{(x^2+7)^2}$, $f'(x) > 0$ *pro* $|x| < \sqrt{7}$, $f'(x) < 0$ *pro* $|x| > \sqrt{7}$,
Funkce f *je rostoucí na* $\langle -\sqrt{7}; \sqrt{7}\rangle$ *a klesající na* $(-\infty; -\sqrt{7}\rangle$ *a na* $\langle\sqrt{7}; \infty)$.
Funkce f *nabývá lokálního maxima v bodě* $x = \sqrt{7}, f(\sqrt{7}) = \frac{\sqrt{7}}{7}$,
a lokálního minima v bodě $x = -\sqrt{7}, f(-\sqrt{7}) = -\frac{\sqrt{7}}{7}$.
Funkce f *je lichá.*