Cvičení 3 - výsledky

30.9.2011

Příklad 1. *Použijeme vztah* $e^{\imath x} = \cos x + \imath \sin x$. *Tedy*

$$\cos(x+y) = \operatorname{Re} e^{\imath(x+y)} = \operatorname{Re}\left((\cos x + \imath \sin x)\cdot(\cos y + \imath \sin y)\right).$$

Ostatní vzorce dostaneme analogicky.

Příklad 2. *Víme, že* $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ *a* $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$.
Z prvního vzorce $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$. *Odtud*

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Tedy

$$|\cos\frac{y}{2}| = \sqrt{\frac{1+\cos y}{2}}.$$

Z druhého vzorce $2|\sin x| \cdot \sqrt{\frac{1-cos2x}{2}} = \sqrt{1-cos^2 2x}$. *Tedy*

$$2|\sin x| = \sqrt{\frac{2}{1-cos2x}\cdot(1+\cos 2x)(1-\cos 2x)}.$$

Již jednoduše

$$|\sin\frac{x}{2}| = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Z

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

jednoduchými úpravami získáme, že

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad a \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Příklad 3. *a)* $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)\cdot(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1\cdot(\cos^2 x - \sin^2 x)$,
b) Pro $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *platí* $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotg}^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$. *Po vynásobení* $\sin^2 x$ *dostáváme* $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, *což platí díky Pythagorově větě.*
c) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2\cdot(1-2\cos^2 x)}{\sin 2x} = \frac{2-4\cos^2 x}{\sin 2x}$,
d) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} =: A$.

$$A = \frac{1-\cos x}{\sqrt{(1-\cos x)(1+\cos x)}} = \frac{1-\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

$$A = \frac{\sqrt{(1-\cos x)(1+\cos x)}}{1+\cos x} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{1+\cos x} = \frac{\sin x}{1+\cos x},$$

Pomocí substituce $a := \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $b := \cos x$ *a* $c := \sin x$ *dostaneme vyřešením dvou rovnic o dvou neznámých požadovaný vzorec.*

Příklad 4. *Použijeme defnici* $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *a* $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Příklad 5. *Sečteme-li vzorce* $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ *a* $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$, *dostáváme*

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y.$$

Odtud již

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2} \left(\sin(a+b)x \sin(a-b)x \right).$$

Příklad 6. *Obrázky nebudou. Píle cvičící má své meze.*

Příklad 7. $f(x) = \frac{5-x^2}{x^2+2} = -1 + \frac{7}{x^2+2}$. *Zlomek* $\frac{7}{x^2+2}$ *je vždy kladný, tedy* $f(x) \geq -1$.

Navíc pro každé $x \in \mathbb{R}$ *je* $\frac{7}{x^2+2} < \frac{7}{2}$, *a tedy* $f(x) < -1 + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$.

Příklad 8. *Funkce* $f_1(x) = \frac{1}{x^2}$ *není monotónní na svém definičním oboru, je však monotónní na* $(-\infty; 0)$ *a na* $(0; \infty)$.*Funkcea* $f_2(x) = \frac{1}{x^3}$ *je monotónní na celém svém definičním oboru, to jest na* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 9. *a)* $f_1(x) = x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 3$, $D(f_1) = \mathbb{R}$, $H(f_1) = \langle -3; \infty)$, *není ani prostá, ani vzájemně jednoznačná.*

b) $f_2(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + 2$, $D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $H(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, *je prostá,* $f_2^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + 1$.

c) $f_3(x) = \frac{4x-9}{2x+3}$, $D(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$, $H(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, *je prostá,* $f_3^{-1}(x) = \frac{9-3x}{4-2X}$.

d) $f_4(x) = \operatorname{tg} x$, $D(f_4) = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$, $H(f_4) = \mathbb{R}$, *není prostá ani vzájemně jednoznačná.*