Cvičení 18 – 19

16.12.2011 a 19.12.2011

Příklad 1. *Pomocí Heavisideovy funkce vyjádřete*

$$a)\ f(x) = \begin{cases} 1,\ x \in \langle 1; 4) \cup \langle 5; 10), \\ 0,\ jinde, \end{cases} \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} 1,\ x \in \langle -2; -1), \\ 2,\ x \in \langle 0; 1), \\ -3,\ x \in \langle 1; 2), \\ 4,\ x \in \langle 3; 6), \\ 0,\ jinde, \end{cases}$$

$$c)\ f(x) = \begin{cases} 0,\ x \in (-\infty; 0), \\ 1,\ x \in \langle 0; 1), \\ x,\ x \in \langle 1; 2), \\ 2,\ x \in \langle 2; \infty), \end{cases} \qquad d)\ f(x) = \begin{cases} 1,\ x \in (-\infty; 0\rangle, \\ 0,\ x \in (0; 1), \\ 2,\ x \in \langle 1; \infty). \end{cases}$$

Příklad 2. *Vyjádřete následující funkce jako* $f(t-c) \cdot H(t-c)$*:*

$$a)\ g(t) = \begin{cases} e^{3t}; t \in \langle 3; 6) \\ 0,\ jinde, \end{cases} \qquad b)\ g(t) = \begin{cases} 0, t \in (-\infty; \frac{\pi}{2}) \\ \sin t,\ x \in \langle \frac{\pi}{2}; \pi), \\ -2, jinde, \end{cases}$$

$$c)\ g(t) = \begin{cases} 0, t \in (-\infty; -2), \\ t^2 + 8t + 16,\ t \in \langle -2; 5) \\ 12 - t,\ x \in \langle 5; \infty), \end{cases}$$

d) $g(t)$ *je funkce z cvičení* 16 *příklad* 1.

Příklad 3. *Určete* $\mathcal{L}(f)$ *pro následující funkce:*

$$a)\ f(t) = \begin{cases} (t-2)^2,\ t \in \langle 2; 4) \\ 0,\ jinde, \end{cases} \qquad b)\ f(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}t,\ 0 \le t < 3, \\ -2t + 8,\ 3 \le t < 4, \\ 0,\ 4 \le t < 5, \\ -t + 5,\ 5 \le t, \end{cases}$$

$$c)\ f(t) = \begin{cases} e^{3t}; t \in \langle 3; 6) \\ 0,\ jinde, \end{cases} \qquad d) f(t) = \begin{cases} t^2 - t - 6, & t \in \langle 1; 4), \\ 3t - 1, & t \in \langle 4; 6), \\ 0, & jinde, \end{cases} .$$

Příklad 4. *Vyřešte diferenciální rovnici* $y'' - y = f$ *s počátečními podmínkami* $y(0) = 0, y'(0) = 0$*, kde* f *je dána*

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t,\ t \in \langle 0; 1), \\ 0, \quad jinde. \end{cases}$$

Příklad 5. *Vyřešte diferenciální rovnici* $y'' - 4y' + 4y = f$ *s počátečními podmínkami* $y(0+) = 1, y'(0+) = -2$, *kde* f *je dána*

$$f(t) = \begin{cases} 8\cos 2t, & t \in \langle 0; \pi), \\ 0, & \textit{jinde.} \end{cases}$$

Příklad 6. *Vyřešte diferenciální rovnici* $2y'' - y' = f$ *s počátečními podmínkami* $y(0+) = 0, y'(0+) = -1$, *kde* f *je dána*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0; 3), \\ 4 - t, & t \in \langle 3; \infty). \end{cases}$$

Příklad 7. *Označme* $f(t) = \begin{cases} -\cos t, & t \in \langle \frac{\pi}{2}; \pi), \\ 0, & \textit{jinde} \end{cases}$. *Najděte* $\mathcal{L}\{g\}$, *kde* g *je* π*-periodická funkce taková, že* $g(t) = f(t)$ *na* $\langle 0; \pi)$.

Příklad 8. *Označme* $f(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in \langle 0; 1 \rangle, \\ 0, & \textit{jinde} \end{cases}$. *Najděte* $\mathcal{L}\{g\}$, *kde* g *je* 2*-periodická funkce taková, že* $g(t) = f(t)$ *na* $\langle 0; 2 \rangle$.

Příklad 9. *Pomocí věty o konvoluci najděte*

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p} \cdot \frac{2}{p^2+4}\right\}$, *b)* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+9}\right\}$,

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p+3)(p^2+4)}\right\}$, *d)* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^4-2p^3+9p^2-18p}\right\}$,

e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2p}{(p-2)(p^2+1)^2}\right\}$.