

Cvičení 3

30.9.2011

Příklad 1. Pomocí komplexních čísel dokažte vzorec pro $\sin(x+y)$, $\sin(x-y)$ a $\cos(x+y)$, $\cos(x-y)$.

Příklad 2. Ze vzorců pro cosinus a sinus dvojnásobného úhlu odvoďte vzorce pro poloviční úhel. Dále odvoďte vzorce druhých mocnin sinu a cosinu pomocí vzorce pro dvojnásobný úhel cosinu.

Příklad 3. Dokažte, že

$$\begin{aligned} a) \cos^4 x - \sin^4 x &= \cos^2 x - \sin^2 x, & b) \sin^{-2} x &= 1 + \cotg^2 x, \\ c) \tg x - \cotg x &= \frac{2-4\cos^2 x}{\sin 2x}, & d) \sin x &= \frac{2 \tg^2 \frac{x}{2}}{1 + \tg^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Příklad 4. Odvoďte vzorce

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cdot \cosh x \quad a \quad \cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x.$$

Příklad 5. Vyjádřete $\sin ax \cdot \cos bx$ jako součet či rozdíl sinů a cosinů.

Příklad 6. Načrtněte pro funkce 1. $f(x) = x^3$ a 2. $f(x) = \sin x$ grafy funkcí:

$$\begin{aligned} a) f_1(x) &= -f(x), & b) f_2(x) &= f(-x), & c) f_3(x) &= f(x+2), \\ d) f_4(x) &= f(x-1), & e) f_5(x) &= f(2x), & f) f_6(x) &= f(x)+2, \\ g) f_7(x) &= f(x)-1, & h) f_8(x) &= f\left(-\frac{1}{2}x\right), & i) f_9(x) &= 2f(x), \\ j) f_{10}(x) &= \frac{1}{2}f(x), & k) f_{11}(x) &= |f(x)|, & l) f_{12}(x) &= f(2x-3). \end{aligned}$$

Příklad 7. Dokažte, že funkce $f(x) = \frac{5-x^2}{x^2+2}$ je omezená.

Příklad 8. Vyšetřete monotonii funkcí $f_1(x) = \frac{1}{x^2}$ a $f_2(x) = \frac{1}{x^3}$.

Příklad 9. Určete maximální definiční obor a obor hodnot a zda je funkce prostá, vzájemně jednoznačná a případně najděte inverzní funkci:

$$f_1(x) = x^2 + 4x + 1, \quad f_2(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + 2, \quad f_3(x) = \frac{4x-9}{2x+3}, \quad f_4(x) = \tg(x).$$