Cvičení 1 a 2

21.9.2011 a 23.9.2011

Příklad 1. *Napište pravděpodobnostní tabulku výroku*

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \vee C) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg C).$$

Příklad 2. *Negujte výroky:*

1. *Zahřejeme se čajem nebo kávou.*
2. *Jestliže bude pršet, vezmu si deštník.*
3. *Bez práce nejsou koláče.*
4. *Existuje aspoň jeden lichoběžník, který má pravý úhel.*
5. *Všichni studenti vešli do místnosti a sedli si.*
6. *Přijdu právě tehdy, když přijde Anna.*

Příklad 3. *Negujte výroky a rozhodněte, zda platí:*

$$\begin{array}{ll} a)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}:\ |x-y| \geq 0, & b)\ \forall x \in [0,2]\ \exists y \in [0,3]:\ x^2 = y, \\ c)\ \exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}:\ x \cdot y = y. & \end{array}$$

Příklad 4. *Jsou dány tři intervaly* $A = \langle -7, 2\rangle$, $B = \langle -2, 5\rangle$ *a* $C = \langle 2, \infty)$. *Zapište:*

$$\begin{array}{llll} a)\ A \cap B, & b)\ A \cup B, & c)\ (A \cup B) \cap C, & d)\ \overline{A^c}, \\ e)\ A \cap C, & f)\ (A \cap B) \cup C, & g)\ (A \cap C) \cup (B \cap C), & h)\ A \setminus B. \end{array}$$

Příklad 5. *Určete sjednocení a průnik množin*

$$A = \{x \in \mathbb{N};\ x \geq 2\}\ a\ B = \{x \in \mathbb{Z};\ x \leq 2\}.$$

Příklad 6. *Doplňte na čtverec následující kvadratické trojčleny:*

$$\begin{array}{lll} a)\ x^2 - 8x + 16, & b)\ 15x^2 - 30x, & c)\ -x^2 + 7x + 8, \\ d)\ x^2 + 10x - 11, & e)\ \frac{x^2}{5} + \frac{x}{5} + 2, & f)\ 3x^2 - 17x + 9. \end{array}$$

Příklad 7. *Mějme rovnici* $x^2 - px + q = 0$. *Nechť* x_1 *a* x_2 *jsou řešení. Dokažte, že potom platí*

$$x_1 + x_2 = p \quad a \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Příklad 8. *Bez použití diskriminantu najděte kořeny následujících kvadratických rovnic:*

$$\begin{array}{lll} a)\ x^2 - x - 6, & b)\ x^2 + 5x + 6, & c)\ x^2 - 19x + 34, \\ d)\ x^2 - 18x + 81, & e)\ x^2 + x - 56, & f)\ x^2 + 10x + 24. \end{array}$$

Příklad 9. *Určete maximální definiční obory funkcí:*

$$f_1(x) = \frac{x+1}{x-3}, \qquad f_2(x) = \frac{x+1}{|x|-3}, \qquad f_3(x) = \sqrt{x+4},$$
$$f_4(x) = \log(\frac{x^2+4x+4}{x+2}), \qquad f_5(x) = \sqrt{\log(\frac{x^2-1}{x+1})}, \qquad f_6(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2+3x-2}}.$$

Příklad 10. *Napište jako intervaly či jejich sjednocení:*

$$a)\ |x-1| < 5, \quad b)\ |x+4| \leq 3, \quad c)\ |5x-3| \geq 5, \quad d)\ |x^2-1| > \tfrac{1}{4}.$$

Příklad 11. *Napište pomocí absolutních hodnot:*

$$a)\ (\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2}), \quad b)\ (-\infty, -2) \cup (0, \infty), \quad c)\ \langle -4, 10 \rangle, \quad d)\ (-\infty, 7\rangle \cup \langle 11, \infty).$$

Příklad 12. *Určete hodnoty:*

$$a)\ \sin\tfrac{5}{6}\pi, \quad b)\ \sin\tfrac{15}{3}\pi, \quad c)\ \sin\tfrac{-7}{4}\pi, \quad d)\ \sin\tfrac{5}{2}\pi,$$
$$e)\ \cos\tfrac{3}{4}\pi, \quad f)\ \cos\tfrac{7}{6}\pi, \quad g)\ \cos\tfrac{-4}{3}\pi, \quad h)\ \cos\tfrac{8}{2}\pi.$$

Příklad 13. *Určete všechny možné hodnoty x z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$:*

$$a)\ \sin x = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad b)\ \cos x = -\tfrac{1}{2}, \quad c)\ \cos x = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad d)\ \sin x = -1.$$

Příklad 14. *Řešte následující rovnice:*

$$a)\ \frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} = (\sin x + \cos x)^2, \qquad b)\ \sin^4 x + \cos^4 x = \tfrac{1}{2},$$
$$c)\ \frac{1}{\sin^2 x} + 2\operatorname{cotg} x = 0, \qquad d)\ \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 8\cos 2x,$$
$$e)\ \frac{81}{16} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\tfrac{9}{4}\right)^{x+1}, \qquad f)\ 2 \cdot 4^x + 5^{x-\frac{1}{2}} = 5^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

Příklad 15. *Vyšetřete omezenost a existenci maxima, minima, suprema a infima následujících funkcí:*

$$a)\ \mathbb{N}, \quad b)\ \langle 4, 9), \quad c)\ \{\cos x;\ x \in \mathbb{R}\}, \quad d)\ \{\tfrac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\},$$
$$e)\ \mathbb{Q}, \quad f)\ (0; 1) \cap \mathbb{Q}, \quad g)\ \{x^2;\ x \in \langle -3; 3\rangle\}, \quad h)\ \{\tfrac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

Příklad 16. *Načrtněte grafy funkcí:*

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x^2 + 4, \quad f_3(x) = (x-3)^2, \quad f_4(x) = -2x^2, \quad f_5(x) = |x^2 - 2|.$$

Příklad 17. *Dokažte pro $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ vzorec*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$