1. Těleso komplexních čísel

Definice. Množinou komplexních čísel rozumíme množinu $\mathbb{R}^2$.

Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$.

Na množině $\mathbb{C}$ definujeme operace

- sčítání $+$ jako v $\mathbb{R}^2$
- násobení . předpisem
$$(x,y).(u,v) = (xu - yv, xv + yu).$$

Pozorovaní. Obě operace jsou komutativní.

Pozorovaní. Jednotkovým prvkem je $(1,0)$.

Pozorovaní. K prvku $(x,y) \in \mathbb{C}$, $(x,y) \neq (0,0)$ existuje právě jeden *inverzní prvek* daný předpisem
$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Základní vlastnosti komplexních čísel

- Množina $\mathbb{C}$ s operacemi sčítání a násobení tvoří komutativní těleso.
- Těleso $\mathbb{R}$ je izomorfní podtělesu $\{(x,y) \in \mathbb{C} : y = 0\}$.
- Na $\mathbb{C}$ není definováno přirozené uspořádání.

Věta. *Základní věta algebry.* Každý polynom stupně alespoň 1 s komplexními koeficienty má alespoň jeden kořen v $\mathbb{C}$.

Pro polynomy stupně 1 až 4 lze najít předpis pro řešení, pro stupeň 5 a vyšší není znám „algebraický“ důkaz. Dokážeme později jako aplikaci komplexní analýzy.

Zápisy komplexního čísla.

Prvek $(0,1)$ označíme jako i.

- **Algebraický.** Prvek (x,y) zapisujeme jako $x + iy$, prvek $(x,0)$ zkráceně jako x.
- **Maticový.** Prvek (x,y) zapisujeme jako $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$. Sčítaní a násobení na $\mathbb{C}$ odpovídá sčítání a násobení matic.
- **Trigonometrický.** Prvek (x,y) zapisujeme jako $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Základní operátory na $\mathbb{C}$.

Pro $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ definujeme tyto operátory.

- **Reálná část.** $\operatorname{Re} z = x$
- **Imaginární část.** $\operatorname{Im} z = x$
- **Absolutní hodnota (modul).** $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = r$
- **Číslo komplexně sdružené.** $\bar{z} = x - iy$
- **Argument** $\arg z = \varphi$, hlavní hodnota argumentu volba $\varphi \in [-\pi, \pi)$, značíme Arg.

Vlastnosti: Pro každá $z, w \in \mathbb{C}$ platí

- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $z\bar{z} = |z|^2$
- $|zw| = |z||w|$
- $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$
- $|z| = |\bar{z}|$

$\mathbb{C}$ jako metrický prostor.

- Metrika na $\mathbb{C}$ je definována jako $d(z, w) = |z - w|$.
- Metrika na $\mathbb{C}$ je izomorfní metrice na $\mathbb{R}^2$.
- Otevřené, uzavřené, kompaktní množiny stejné jako v $\mathbb{R}^2$.
- Limita posloupnosti, limita funkce, spojitost stejné jako v $\mathbb{R}^2$.

Komplexní funkce reálné proměnné

Komplexní funkce reálné proměnné je zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, $M \subset \mathbb{R}$.

Rozšíření běžných pojmů:

- **Derivace.** Derivací funkce f v bodě x rozumíme číslo
$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$
pokud tato limita existuje (v $\mathbb{C}$.)
- **Primitivní funkce.** Funkce $F : (a, b) \to \mathbb{C}$ je primitivní funkce k f na (a, b), jestliže $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$.
- **Integrál.** Riemannůvintegrál z funkce f definujeme jako
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re}f(x)dx + i \int_a^b \mathrm{Im}f(x)dx,$$
pokud oba integrály na pravé straně konvergují.

Snadná pozorování:

Nechť Nechť $f : M \to \mathbb{C}$, je komplexní funkce reálné proměnné, $a \in \mathbb{R}$ a $z \in \mathbb{C}$. Pak platí

- $\lim_{x\to a+} f(x) = z$, právě když $\lim_{x\to a+} \mathrm{Re}f(x) = \mathrm{Re}z$ a $\lim_{x\to a+} \mathrm{Im}f(x) = \mathrm{Im}z$. Podobně pro limity zleva a oboustranné.
- f je spojitá (zleva, zprava) v bodě a, právě když obě funkce $\mathrm{Re}f$ a $\mathrm{Im}f$ jsou spojité (zleva, zprava) v bodě a.
- $f'(x)$ existuje, právě když existují vlastní derivace $(\mathrm{Re}f)'(x)$ a $(\mathrm{Im}f)'(x)$. Pak $f'(x) = (\mathrm{Re}f)'(x) + i(\mathrm{Im}f)'(x)$.
- Funkce $F : (a, b) \to \mathbb{C}$ je primitivní funkce k f na (a, b), právě když $\mathrm{Re}F$ je primitivní funkcí k $\mathrm{Re}f$ na (a, b) a $\mathrm{Im}F$ je primitivní funkcí k Imf na (a, b).

Věta. *Odhad integrálu* Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak platí
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le (b - a) \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Komplexní funkce komplexní proměnné

Komplexní funkce komplexní proměnné je zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, $M \subset \mathbb{C}$.

Definice. Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné a $a \in \mathbb{C}$. Potom derivací funkce f v bodě a rozumíme číslo
$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$
pokud tato limita existuje (v $\mathbb{C}$.)

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω otevřená. Řekneme, že funkce f je *holomorfní* na množině Ω, pokud má v každém bodě Ω derivaci. Nechť $M \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je holomorfní na množině M, pokud existuje $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω otevřená, $M \subset \Omega$ a f je holomorfní na Ω.

Definice. Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá *celá funkce.*

Pro funkci f komplexní proměnné označíme $f_1(x,y) = \mathrm{Re} f(x+iy)$ a $f_2(x,y) = \mathrm{Im} f(x+iy)$ a $\tilde{f} = (f_1, f_2)$.

Věta. *Cauchy-Riemannovy podmínky* Nechť $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak f má v bodě z derivaci podle komplexní proměnné, právě když $\tilde{f}$ má v bodě (a,b) totální diferenciál a platí

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Poznámky

- Věty o aritmetice a skládání derivací platí pro derivaci komplexní funkce stejně jako pro derivaci reálné funkce.
- Pro funkci f komplexní proměnné a g funkci reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$ platí
$$(f(g(x)))' = f'(g(x))(g(x))',$$
pokud derivace na pravé straně existují.
- Pokud má f v bodě z derivaci, potom je v z spojitá.
- Pokud $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená konvexní množina a pro každé $z \in \Omega$ platí $f'(z) = 0$, potom f je na Ω konstantní.

2. Elementarní funkce na $\mathbb{C}$

Exponenciální funkce

Definice. Pro $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ definujme

$$\exp(z) = e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Funkci exp nazýváme exponenciální funkce.

Pozorování. Na $\mathbb{R}$ splývá s obvyklou definicí e^x.

Věta. *Vlastnosti funkce* exp.

- Funkce exp je definovaná na $\mathbb{C}$, je na $\mathbb{C}$ holomorfní a platí $\exp'(z) = \exp(z)$ pro $z \in \mathbb{C}$.
- Pro $z, w \in \mathbb{C}$ platí $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$.
- *Eulerův vzorec* Pro $b \in \mathbb{R}$ platí $\exp(ib) = \cos b + i \sin b$.
- Pro $z \in \mathbb{C}$ platí $\exp(z) \neq 0$, $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$, $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re} z}$.

Goniometrické a hyperbolické funkce

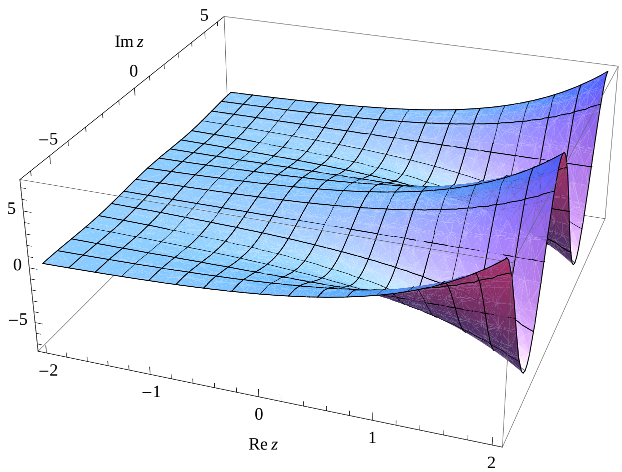
Definice. Pro $z \in \mathbb{C}$ definujeme:

- Funkci sinus: $\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$.
- Funkci kosinus: $\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$.
- Funkci hyperbolický sinus: $\sinh z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$.
- Funkci hyperbolický kosinus: $\cosh z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}$.

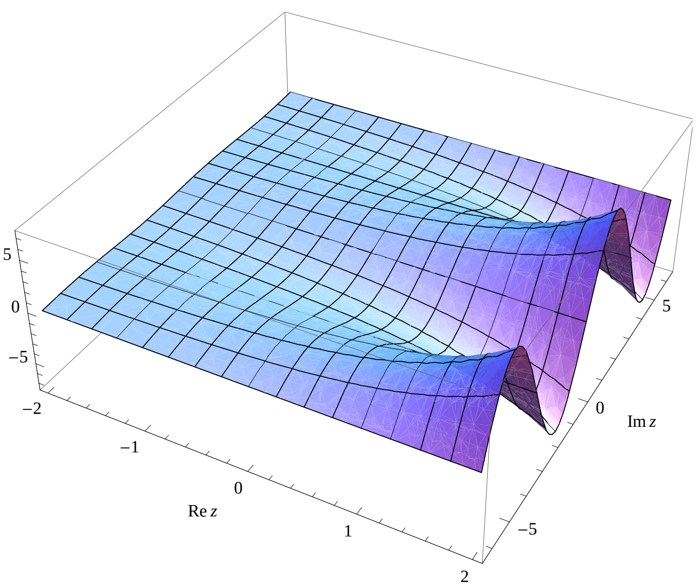
Pozorování. Na $\mathbb{R}$ splývá s obvyklou definicí.

Věta. *Vlastnosti goniometrických a hyperbolických funkcí.*

- Funkce sin, cos, sinh, a cosh jsou definovány na $\mathbb{C}$ a jsou na $\mathbb{C}$ holomorfní.
- Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí
$$\sinh iz = i \sin z, \qquad \cosh iz = \cos z, \qquad \exp(z) = \cos z + i \sin z.$$
- Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí
$$\sin' z = \cos z,\ \cos' z = -\sin z,\ \sinh' z = \cosh z,\ \cosh' z = \sinh z.$$



Obrázek 1. Re exp(z)



Obrázek 2. Im exp(z)

- Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
- Součtové vzorce platí stejně jako v $\mathbb{R}$.

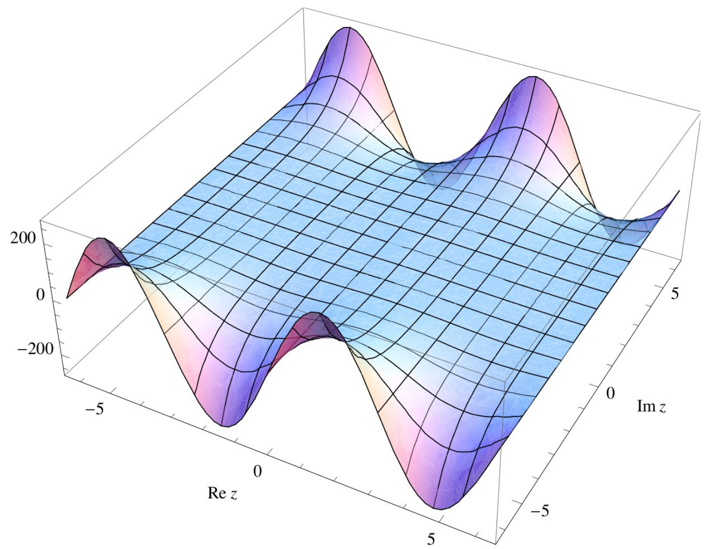
Věta. Funkce exp zobrazuje $\mathbb{C}$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Komplexní logaritmus

Reálný logaritmus (definovaný na $(0, \infty)$) budeme značit $\ln$.

Definice. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ označme

$$\log z = \{w \in \mathbb{C} : \exp(w) = z\}.$$



OBRÁZEK 3. $\operatorname{Re}\sin(z)$

Hlavní hodnotou logaritmu z nazveme $\omega \in \log z$ takové, že $\operatorname{Im} w = [-\pi, \pi)$. Hlavní hodnotu značíme $\mathsf{Log} z$.

Poznámka. Někteří autoři používají opačnou konvenci pro Log a log, nebo jiný interval, např $[0, 2\pi)$.

Věta. *Vlastnosti logaritmu.*

- Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí $\log z = \{(\mathsf{Log} z) + 2\pi k i : k \in \mathbb{Z}\}$.
- Funkce $\mathsf{Log} z$ je holomorfní na množině $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a na této množině platí $\mathsf{Log}' z = 1/z$.
- Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí $\arg z = \{\operatorname{Im} w : w \in \log z\}$ a $\mathsf{Arg} z = \operatorname{Im} \mathsf{Log} z$.

Obecná komplexní mocnina

Definice. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $a \in \mathbb{C}$ značíme

$$z^a = \exp(a \mathsf{Log} z)$$

a

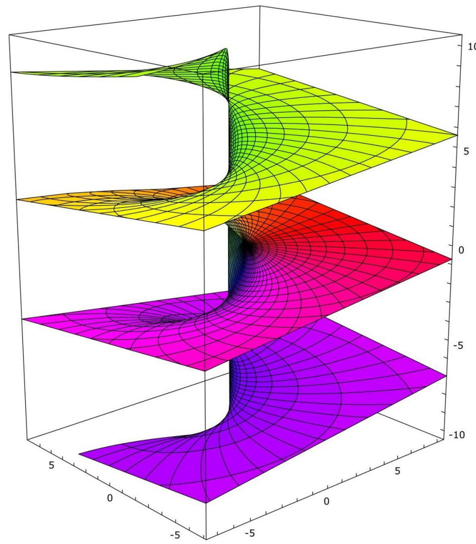
$$m_a(z) = \{\exp(aw) : w \in \log z\}.$$

Pozorování. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí $z^0 = 1$, $m_0(z) = \{1\}$. Definice z^n pro $n \in \mathbb{N}$ odpovídá algebraické definici. Dále $z^{-a} = 1/z^a$. Pro $a = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ má množina $m_a(z)$ n prvků.

3. STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

Definice. Nechť M je množina a nechť (Q, σ) je metrický prostor. Nechť f a f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Q. Řekneme, že posloupnost f_n konverguje

- **bodově** k f na M, pokud pro každé $x \in M$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$,
- **stenoměrně** k f na M, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro každé $x \in M$ a pro každé $n \geq n_0$ $\sigma(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$.



OBRÁZEK 4. $\operatorname{Im}\log(z)$

Pokud M je navíc metrický prostor, řekneme, že posloupnost f_n konverguje k f **lokálně stejnoměrně** na M, pokud pro každé $x \in M$ existuje $\varepsilon > 0$ tak, že posloupnost f_n konverguje k f stenoměrně na $B(x, \varepsilon)$.

Věta. *Moore–Osgoodova* Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x_0 \in P$ a nechť funkce f_n s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ konvergují stenoměrně k funkci f na $B(x_0, r) \setminus x_0$ pro nějaké $r > 0$. Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$. Potom exitují $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a $\lim_{n\to\infty} a_n$ a tyto limity jsou si rovny.

Věta. *Stejnoměrná konvergence a spojitost* Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Nechť f a f_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou zobrazení definovaná na P s hodnotami v Q. Nechť f_n jsou spojitá a nechť konvegrují lokálně stejnoměrně k f. Potom f je spojité.

Věta. *Stejnoměrná konvergence a integrál* Nechť $[a, b]$ je omezený interval a nechť f_n je posloupnost spojitých reálných funkcí na (a, b). Nechť f_n konvegrují stejnoměrně k f. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Věta. *Stejnoměrná konvergence derivací* Nechť (a, b) je omezený interval a nechť f_n je posloupnost reálných funkcí na (a, b). Nechť každá f_n má spojitou vlastní derivaci f_n' na (a, b). Nechť existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že $f_n(x_0)$ je konvergentní posloupnost. Nechť posloupnost f_n' je stejnoměrně konvergentní na (a, b). Pak existuje reálná funkce f na (a, b) tak, že f_n stejnoměrně konvergují k f a f_n' stejnoměrně konvergují k f' na (a, b).

Řadu funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ interpretujeme jako posloupnost částečných součtů, a aplikujeme na ni tyto pojmy a věty. Říkáme tedy, že řada konverguje stejnoměrně, pokud konvergují stejnoměrně její částečné součty, apod.

4. Mocninné řady

Definice. Nechť $a \in \mathbb{C}$ a $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Nekonečnou řadu funkcí tvaru

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

nazýváme mocninnou řadou o středu a. Poloměrem konvergence této řady rozumíme $R \in [0, +\infty]$ definované vzorcem

$$R = \sup\{r \in [0, +\infty) : \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| r^n \quad \textsf{konverguje}\}.$$

Množinu

$$U(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\},$$

nazýváme kruhem konvergence této řady.

Věta. Každá mocninná řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na svém kruhu konvergence.

Věta. Položme

$$L = \lim_{m \to \infty} \sup_{n > m} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Potom poloměr konvergence řady (*) je $R = \frac{1}{L}$ pokud $L > 0$ a $R = \infty$ pro $L = 0$. Pokud existuje

$$K = \lim_{n \to \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|},$$

pak $K = L$.

Pozorovaní. Řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$$

mají stejný poloměr konvergence jako (*).

Pro řadu (*) definujeme funkci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

na $U(a, R)$.

Věta. Funkce f je holomorfní na $U(a, R)$ a

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$$

na $U(a, R)$. Označme

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$$

na $U(a, R)$, potom $F'(z) = f(z)$ na $U(a, R)$.

5. Křivky v $\mathbb{C}$.

Definice. Křivkou v $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení uzavřeného intervalu do $\mathbb{C}$.

Definice. Je-li $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ křivka, pak

- obrazem křivky rozumíme její obor hodnot, značíme $\langle\varphi\rangle$,
- počátečním bodem křivky rozumíme $\varphi(a)$, koncovým bodem bod $\psi(b)$,
- křivku φ nazýváme uzavřenou, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$,
- opačnou křivkou k φ rozumíme křivku $\dot{-}\varphi : [-b,-a] \to \mathbb{C}$ definovanou vztahem $\dot{-}\varphi(t) = \varphi(-t)$.

Definice. Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ a $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ jsou křivky pro které platí $\varphi(b) = \psi(c)$, pak jejich spojením $\varphi \dotplus \psi$ rozumíme křivku definovanou na intervalu $[a, b + d - c]$ vztahy $(\varphi \dotplus \psi)(t) = \varphi(t)$ pro $t \in [a,b]$ a $(\varphi \dotplus \psi)(t) = \psi(t - b + c)$ pro $t \in (b, b + d - c]$.

Příklady křivek

- Orientovaná úsečka $\varphi(t) = z(1-t) + wt$; $t \in [0,1]$ (z bodu z do bodu w.)
- Kružnice $\psi(t) = z + re^{it}$; $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $t \in [0, 2\pi]$ (o středu z a poloměru r.)
- Lomená čára je spojení konečně mnoha orientovaných úseček.

Definice. Cesta je po částech hladká křivka. (Tedy má spojitou derivaci vyjma nejvýše konečně mnoha bodů, ve kterých má derivace vlastní jednostranné limity.)

Definice. Délkou cesty $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ rozumíme

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'|(t)dt.$$

6. Integrál podél cesty

Definice. Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je cesta a f je spojitá funkce na $\langle\varphi\rangle$. Potom definujeme integrál f podél φ jako

$$\int_\varphi f(z)dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Věta. *Vlastnosti integrálu podél cesty.* Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je cesta a f je spojitá funkce na $\langle\varphi\rangle$.

- Nechť h je rostoucí C^1 zobrazení intervalu $[c,d]$ na $[a,b]$, pak
$$\int_{\varphi\circ h} f(z)dz = \int_\varphi f(z)dz.$$
- $$\int_\varphi f(z)dz = -\int_{\dot{-}\varphi} f(z)dz.$$
- Nechť $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ je křivka pro kterou platí $\varphi(b) = \psi(c)$, a g je spojitá funkce na $\langle\varphi \dotplus \psi\rangle$, pak
$$\int_{\varphi\dotplus\psi} g(z)dz = \int_\varphi g(z)dz + \int_\psi g(z)dz.$$
- $$\left|\int_\varphi f(z)dz\right| \le L(\varphi) \max_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)|.$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{C}$ je funkce. Funkci F nazveme primitivní funkcí k f na G pokud

$$F'(z) = f(z)$$

pro každé $z \in G$.

Věta. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a F je primitivní k f na G. Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je cesta taková, že $\langle\varphi\rangle \subset G$. Potom

$$\int_\varphi f(z)dz = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Pokud φ je uzavřená křivka, pak $\int_\varphi f(z)dz = 0$.

7. Oblast

Definice. Otevřená množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ je souvislá, pokud neexistují dvě neprázdné disjunktní otevřené množiny $G_1, G_2 \subset \Omega$ takové, že $G_1 \cup G_2 = \Omega$. Souvislou otevřenou množinu v $\mathbb{C}$ nazýváme oblast.

Definice. Otevřená množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ je křivkově souvislá, pokud pro každé dva body $z, w \in \Omega$ existuje křivka φ tak, že $z, w \in \langle\varphi\rangle \subset \Omega$.

Věta. *Charakterizace oblasti.* Otevřená množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ je souvislá, právě když je křivkově souvislá. (Dále platí, že každé dva body Ω lze spojit lomenou čarou.)

8. Primitivní funkce

Věta. *Primitivní funkce a křivkový integrál.* Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak následující podmíky jsou ekvivalentní

(1) f má v Ω primitivní funkci.
(2) Pro každé dvě cesty $\varphi : [a,b] \to \Omega$ a $\psi : [c,d] \to \Omega$ takové, že $\varphi(a) = \psi(c)$ a $\varphi(b) = \psi(d)$ platí

$$\int_\varphi f(z)dz = \int_\psi f(z)dz.$$

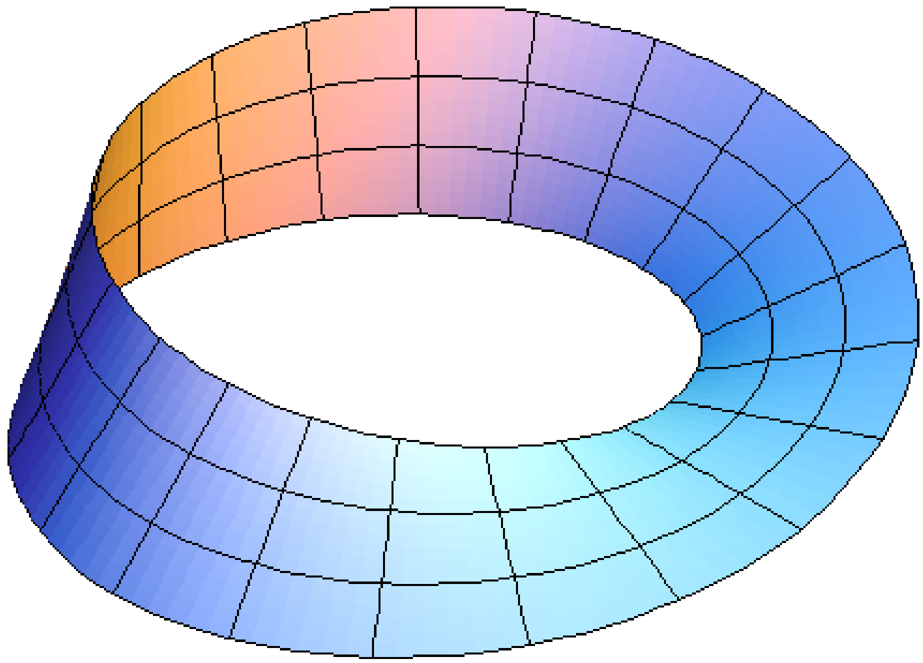
(3) Pro každou uzavřenou cestu $\varphi : [a,b] \to \Omega$ platí

$$\int_\varphi f(z)dz = 0.$$

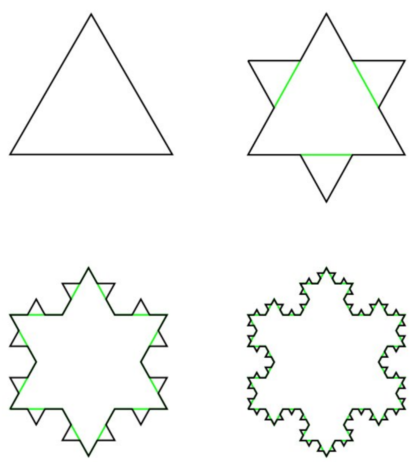
Definice. Nechť φ je uzavřená cesta a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Pak index bodu a vzhledem k cestě φ je definován jako

$$\mathsf{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{dz}{z-a}.$$

Věta. *Jordanova věta pro křivky. (bez důkazu)* Nechť křivka $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je prostá na $[a,b)$ a uzavřená. Pak existují otevřené souvislé neprázdné disjunktní množiny G_1 a G_2 tak, že $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle = G_1 \cup G_2$.



Obrázek 5. Na Möbiově proužku Jordanova věta neplatí



Obrázek 6. Kochova křivka

9. Cauchyova věta a její důsledky

Pro tři body $z, v, w \in \mathbb{C}$ definujeme $\tau_{z,v,w} = [z,v] \dotplus [v,w] \dotplus [w,z]$, ($[z,v]$ je úsečka spojující z a v) a $T_{z,v,w}$ množinu všech konvexních kombinací z, v, w. (T je trojúhelník, τ je jeho hranice.)

Věta. *Cauchy-Goursatova* Nechť $z, v, w \in \Omega \subset \mathbb{C}$, kde Ω otevřená, $T_{z,v,w} \subset \Omega$, nechť $p \in \Omega$ a nechť f je spojitá na Ω a holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Potom

$$\int_{\tau_{z,v,w}} f(z)dz = 0.$$

Definice. Množina $M \subset \mathbb{C}$ se nazývá hvězdovitá, pokud existuje $z_0 \in M$ tak, že pro každé $z \in M$ je úsečka $[z_0, z]$ celá obsažená v M.

Věta. *Cauchyova věta pro hvězdovitou množinu.* Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená hvězdovitá množina a nechť $p \in \Omega$. Nechť f je spojitá na Ω a holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Potom f má primitivní funkci na Ω. (A tedy pro každou uzavřenou cestu $\varphi : [a,b] \to \Omega$ platí $\int_\varphi f(z)dz = 0$.)

Věta. *Cauchyův vzorec pro kruh* Nechť funkce f je holomorfní na uzavřeném kruhu o středu $a \in \mathbb{C}$ a poloměru $r > 0$ a nechť $\varphi(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. (Kružnice o středu a a poloměru r.) Potom pro každé $w \in U(a,r)$ platí

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z-w} dz.$$

Dále má funkce f v bodě w derivace všech řádů a platí

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}} dz.$$

Pozorování. Funkce holomorfní na množině $M \subset \mathbb{C}$ má na této množině derivace všech řádů.

Pozorování. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, nechť $p \in \Omega$ a nechť f je spojitá na Ω a holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Potom f je holomorfní na Ω.

Pozorování. Nechť funkce f je holomorfní na uzavřeném kruhu o středu $a \in \mathbb{C}$ a poloměru $r > 0$, potom

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})dt.$$

Věta. *Vyjádření mocninnou řadou* Nechť funkce f je holomorfní na $U(a,r)$, $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Pak f je na $U(a,r)$ součtem mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

kde pro $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

a $c_0 = f(a)$.

Věta. *Cauchyův odhad* Nechť funkce f je na $U(a,r)$, $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$ součtem řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Pro $0 < \varrho < r$ označíme $M_\varrho = \sup\{|f(z)|; |z-a| = \varrho\}$. Potom pro $n \geq 0$ celé platí

$$c_n \leq \frac{M_\varrho}{\varrho^n}.$$

Věta. *Liouvilleova* Každá omezená celá funkce je konstantní.

Věta. *„Základní věta algebry."* Každý polynom stupně alespoň 1 s komplexními koeficienty má alespoň jeden kořen v $\mathbb{C}$.

Věta. *O kořenech* Nechť funkce f je holomorfní na $U(a,r)$, $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Nechť $f(a) = 0$ a f není konstantní na $U(a,r)$. Pak existuje právě jedno $n \in \mathbb{N}$ a právě jedna funkce g holomorfní v $U(a,r)$ tak, že pro každé $z \in U(a,r)$

$$f(z) = (z-a)^n g(z)$$

a $g(a) \neq 0$.

Věta. *Weierstrassova* Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a f_n jsou holomorfní funkce, které lokálně stejnoměrně konvergují k funkci f. Pak f je holomorfní v G a pro každé $m \in \mathbb{N}$ funkce $f_n^{(m)}$ konvergují k $f^{(m)}$ lokálně stejnoměrně.

Věta. *Klasifikace singularit* Nechť $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$, a funkce f je holomorfní na $B(a,r) \setminus \{a\}$. Pak nastává právě jedna z následujících možností:

(1) Existuje takové $\varrho \in (0,r)$, že f je omezená na $P(a,\varrho)$. Pak existuje vlastní $\lim_{z\to a} f(z)$. Dodefinujeme-li funkci f v bodě a hodnotou této limity, dostaneme funkci holomorfní na $U(a,r)$. Pak říkáme, že f má v bodě a odstranitelnou singularitu.

(2) $\lim_{z\to a} |f|(z) = \infty$. Pak existuje právě jedno $p \in \mathbb{N}$, pro které existuje vlastní nenulová $\lim_{z\to a}(z-a)^p f(z)$. Navíc existují jednoznačně určená čísla $a_{-1}, \dots, a_{-p}$ tak, že funkce

$$f(z) - \frac{a_{-1}}{(z-a)} - \dots - \frac{a_{-p}}{(z-a)^p}$$

má v bodě a odstranitelnou singularitu. Pak říkáme, že f má v bodě a pól násobnosti p.

(3) $\lim_{z\to a} |f|(z)$ neexistuje. Pak říkame, že f má v a podstatnou singularitu.

10. Reziduová věta

Definice. Nechť $a \in \mathbb{C}$ a $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Nekonečnou řadu funkcí tvaru

$$(*) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

nazýváme *Laurentovou řadou* o středu a. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

nazýváme regulární částí řady (*) a řadu

$$(**) \qquad \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$$

nazýváme hlavní část řady (*).

Pozorování Nechť $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$, a funkce f je holomorfní na $B(a,r) \setminus \{a\}$. Nechť f má v bodě a pól násobnosti p. Pak je na $B(a,r) \setminus \{a\}$ součtem Laurentovy řady ve tvaru

$$\sum_{n=-p}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{10.1}$$

Definice._Reziduum_ Nechť funkce f je holomorfní na $B(a,r) \setminus \{a\}$, $a \in \mathbb{C}$ a $0 < R \leq \infty$. Nechť f má v a pól násobnosti p a nechť

$$\sum_{n=-p}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

je Laurentovou řadou funkce f na $P(a,0,R)$. Pak reziduem f v bodě a nazveme číslo

$$\mathrm{res}_a f = c_{-1}.$$

Věta._Reziduová věta_ Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $M \subset \Omega$ konečná množina a $\varphi : [a,b] \to \Omega \setminus M$ uzavřená cesta. Předpokládejme, že pro Ω a φ platí Cauchyova věta, tj. $\int_\varphi g(z)dz = 0$ pro každou funkci g holomorfní na Ω . Pak pro každou funkci f holomorfní na $\Omega \setminus M$, která má póly v bodech množiny M, platí

$$\int_\varphi f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in M} \mathrm{ind}_\varphi a \, \mathrm{res}_a f.$$

Pozorování._Pravidla pro výpočet rezidua_ Nechť f a g jsou holomorfní funkce v nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$.

(1) Má-li funkce f v bodě a pól násobnosti p, pak

$$\mathrm{res_a} f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} (f(z)(z-a)^p)^{(p-1)}.$$

(2) Jsou-li f, g holomorfní v bodě a a g má v bodě a kořen násobnosti 1, pak $\mathrm{res_a} \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}$.

(3) Je-li f holomorfní v a a g má v a pól násobnosti 1, pak $\mathrm{res_a} fg = f(a) \mathrm{res_a} g$.

(4) Je-li f holomorfní v bodě a a g má v bodě a pól násobnosti p, pak

$$\mathrm{res_a} fg = \sum_{k=1}^{p} \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} b_{-k},$$

kde b_{-k} je $-k$-tý koeficient Laurentovy řady funkce g v bodě a.

Lemma._Jordanovo_ Nechť $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$ a f je funkce spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Arg} z \in [\alpha, \beta], |z| > R\}$ pro nějaké $R > 0$, pro kterou platí

$$\lim_{|z| \to \infty; \mathrm{Arg} z \in [\alpha,\beta]} f(z) = 0.$$

Nechť pro $r > 0$ a $t \in [\alpha, \beta]$ je $\varphi_r(t) = re^{it}$. Pak pro každé $x > 0$

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\varphi_r} e^{ixz} f(z)dz = 0.$$

Lemma. Nechť $a \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní v nějakém prstencovém okolí bodu a. Dále nechť $\alpha < \beta$, $r > 0$ a $\varphi_r(t) = re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Pokud je f holomorfní v a, pak

$$\lim_{r \to 0} \int_{\varphi_r} f(z)dz = 0,$$

pokud má f v a pól násobnosti 1, pak

$$\lim_{r\to 0}\int_{\varphi_r} f(z)dz = i(\beta-\alpha)\mathrm{res}_a f.$$

11. Fourierovy řady

Definice. Nechť komplexní funkce reálné proměnné f má Riemannův integrál na intervalu $[0,2\pi]$. Pro $n\in\mathbb{Z}$ definujeme

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

nazýváme Fourierova řada funkce f. Čísla c_n nazveme koeficienty této řady.

Definice. Nechť reálná funkce f má Riemannův integrál na intervalu $[0,2\pi]$. Pro $n\in\mathbb{N}$ definujeme

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx,$$
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

Řadu

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx).$$

nazýváme Fourierova řada funkce f v reálném tvaru.

Pozorování Nechť reálná funkce f má Riemannův integrál na intervalu $[0,2\pi]$ a a_n, b_n a c_n jsou jako výše. Pak pro $n\in\mathbb{N}$ platí $c_n=\overline{c_{-n}}$, $a_n = 2\mathrm{Re}c_n$, $b_n=-2\mathrm{Im}c_n$. a $a_0 = 2c_0$.

Pozorování Nechť funkce f je ve tvaru

$$f(x)=\sum_{n=-N}^{N} d_n e^{inx},$$

potom pro koeficienty její Fourierovy řady platí $c_n = d_n$ a f je součtem své Fourierovy řady.

Pozorování Pokud je funkce součtem Fourierovy řady, pak je periodická. Můžeme tedy hovořit buď o funkcích na intervalu $[0,2\pi]$, nebo o periodických funkcích s periodou 2π. Pozor ale na spojitost a derivaci v koncových bodech.

Definice. *Konvoluce* Nechť f,g jsou 2π periodické funkce, které mají Riemannův integrál na intervalu $[0,2\pi]$. Pak definujeme operaci konvoluce

$$f*g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

Pozorování Konvoluce je komutativní a distributivni vzhledem ke sčítani. Výsledkem konvoluce je 2π periodická funkce.

Poznámka Konvoluce je také asociativní a výsledkem konvoluce je spojitá funkce. (Důkaz vynecháme.)

Definice. *Dirichletovo jádro* Pro $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definujeme Dirichletovo jádro předpisem

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}.$$

Pozorování Pro $N \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$D_N(x) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}.$$

V bodech $2k\pi$ D_N spojitě dodefinujeme $2N + 1$ a rovnost také platí.

Věta Nechť 2π periodická funkce f má Riemannův integrál na intervalu $[0, 2\pi]$ a má koeficienty Fourierovy řady c_n. Pak pro $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = (D_N * f)(x).$$

Definice. *Fejérovo jádro* Pro $N \in \mathbb{N}$ definujeme Fejérovo jádro předpisem

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x).$$

Pozorování. Pro $N \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\frac{N}{2}x)}{\sin^2(x/2)}.$$

V bodech $2k\pi$ F_N spojitě dodefinujeme N a rovnost také platí.

Definice. *Stejnoměrná spojitost* Řekneme, že funkce f je na intervalu I stejnoměrně spojitá, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pokud $x, y \in I$ a $|x - y| \leq \delta$, pak $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Věta. Nechť I je uzavřený interval a f je spojitá funkce na I, pak f je stejnoměrně spojitá na I. Nechť f je spojitá periodická funkce na $\mathbb{R}$, pak f je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$.

Věta. *Aproximativní jednotka* Nechť K_n jsou 2π periodické spojité funkce takové, že pro každé $n \geq 1$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1,$$

pro každé $n \geq 1$ a $x \in \mathbb{R}$ $K(x) \geq 0$ a pro každé $\pi > \delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} K_n(x)dx + \int_{\delta}^{\pi} K_n(x)dx \right) = 0.$$

Pak pro každou spojitou 2π periodickou funkci f konverguje $K_n * f$ stejnoměrně k f na $\mathbb{R}$.

Věta. *Rekonstrukce funkce z Fourierovy řady* Nechť f je 2π periodická spojitá funkce a nechť má koeficienty Fourierovy řady c_n. Pak pro $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^{n} c_n e^{inx} = \lim_{N\to\infty} (F_N * f)(x) = f(x).$$

Tato konvergence je navíc stejnoměrná.

Věta. *O jednoznačnosti Fourierovy řady* Nechť f je 2π periodická spojitá funkce a nechť koeficienty její Fourierovy řady jsou všechny nulové. Pak f je nulová funkce.

Věta. *O konvergenci Fourierovy řady* Nechť spojitá komplexní funkce reálné proměnné f je periodická s periodou 2π, a nechť koeficienty její Fourierovy řady jsou c_n. Nechť je řada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$$

absolutně konvergentní. Pak její Fourierova řada je stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$ a f je jejím součtem.

Věta. *Fourierova řada hladké funkce* Nechť komplexní funkce reálné proměnné f je periodická s periodou 2π, a má spojitou druhou derivaci na $\mathbb{R}$. Pak její Fourierova řada je stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$ a f je jejím součtem.

Věta. *O aproximaci trigonometrickým polynomem* Nechť f je 2π periodická spojitá funkce, pak pro každé $\delta > 0$ existuje **konečná** posloupnost d_n, $-N \le n \le N$, tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$\left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} d_n e^{inx} \right| \le \delta.$$

Věta. *Weierstrassova o aproximaci polynomem* Nechť f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu I. Pak pro každé $\delta > 0$ existuje polynom p tak, že pro každé $x \in I$

$$|f(x) - p(x)| \le \delta.$$

12. Fourierova řada jako ortonormální systém

Definice. *Skalární součin funkcí, norma.* Pro f, g spojité, 2π periodické funkce na $\mathbb{R}$ definujeme skalární součin

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Dále definujeme L^2 normu

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Pozorování. Funkce e^{ikx}, $k \in \mathbb{Z}$ jsou po dvou kolmé, jejich normy jsou 1. Tyto funkce tvoří ortonormální systém.

Pozorování. Nechť funkce f je ve tvaru

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} d_n e^{inx},$$

potom

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-N}^{N} |d_n|^2}.$$

Věta. *L^2 konvergence Fourierovy řady.* Nechť f je spojitá, 2π periodická funkce na $\mathbb{R}$, potom

$$\lim_{N\to\infty} \|f - D_N * f\|_2 = 0.$$

Věta. *Parseval* Nechť f je spojitá, 2π periodická funkce na $\mathbb{R}$ a c_n jsou koeficienty její Fourierovy řady. Potom

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2}.$$

Věta. *Riemann-Lebesgueovo lemma* Nechť f je spojitá, 2π periodická funkce na $\mathbb{R}$ a c_n jsou koeficienty její Fourierovy řady. Potom

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0 = \lim_{n\to-\infty} c_n.$$