Úvod do komplexní analýzy — cvičení 2

1) V kterých bodech mají následující funkce derivaci podle komplexní proměnné?

a)$f(z) = |z|$
b)$f(z) = z\bar{z}$
c)$f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$
d)$f(z) = \frac{1}{z^2}$

2)Pro funkci $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ najděte funkci $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ tak, aby funkce $f = f_1 + if_2$ byla holomorfní na definičním oboru, nebo ukažte, že to není možné.

a) $f_1(x, y) = xy$
b) $f_1(x, y) = e^x \sin y$
c) $f_1(x, y) = x^2$
d) $f_1(x, y) = x^3 - 3xy^2$
e) $f_1(x, y) = \frac{y}{y^2+x^2}$

3)Ukažte, že pokud $f_1, f_2 : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, Ω otevřená, mají spojité druhé derivace a $f = f_1 + if_2$ je holomorfní na Ω, tak $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$

4)Označme

$$f_w(z) = \frac{w - z}{1 - \bar{w}z},$$

funkci definovanou pro $|w| < 1$. Ukažte:

a) f_w je holomorfní na $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.
b) f_w zobrazuje $\mathbb{D}$ do $\mathbb{D}$. (Pro zjednodušení nejprve ukažte, že stačí příslušnou nerovnost dokazovat pro $z \in \mathbb{R}$.)
c) $f_w(w) = 0$ a $f_w(0) = w$.
d) f_w zobrazuje $\mathbb{D}$ na $\mathbb{D}$. (Uvažujte $f_w(f_w(z))$)
e) Co se stane, pokud definici rozšíříme pro $|w| \geq 1$?

5)Pro $z = x + iy$ definujeme $f(z) = \sqrt{|xy|}$. Ukažte, že tato funkce splňuje

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \qquad \text{a} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$$

v bodě 0, a přesto není holomorfní na množině $\{0\}$.

6) Mějme konvexní otevřenou množinu Ω. Ukažte, že pokud pro f holomorfní na Ω je $\bar{f}$ také holomorfní na Ω , pak f je konstantní.