Generující maticí kódu $\mathcal{C}_r$ je například matice:

$$\mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pokud jsme kupříkladu přijali slovo 1101011, pak $1101011 \cdot \mathbf{D}_r = 110$. Binárnímu zápisu 110 odpovídá číslo 6, změňme tedy šestou cifru (z leva) ve slově 1101011 a dostaneme slovo 1101001, které už je kódovým slovem.

## 2. Bilineární a kvadratické formy

**Definice.** Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $T$. Řekneme, že zobrazení $f : V \times V \to T$ je *bilineární forma*, pokud pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a skaláry $a, b \in T$ platí:

(1) $f(a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) = a \cdot f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b \cdot f(\mathbf{v}, \mathbf{w})$,
(2) $f(\mathbf{w}, a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{v}) = a \cdot f(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + b \cdot f(\mathbf{w}, \mathbf{v})$.

**Poznámka 2.1.** *Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $T$ a nechť $f$ je zobrazení $f : V \times V \to T$. Definujme pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ zobrazení $f(\mathbf{v}, -) : V \to T$, které vektoru $\mathbf{x} \in V$ přiřadí hodnotu $f(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ a obdobně definujme zobrazení $f(-, \mathbf{v}) : V \to T$ přiřazující vektoru $\mathbf{x} \in V$ hodnotu $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. Pak je $f$ bilineární formou právě tehdy, když $f(\mathbf{v}, -)$ i $f(-, \mathbf{v})$ jsou lineární formy pro všechny vektory $\mathbf{v} \in V$.*

**Příklad.** 0) Zobrazení $0 : V \times V \to \mathbf{T}$ pro libovolný vektorový prostor nad tělesem $T$, které každé dvojici vektorů přiřadí nulu, je (tzv. *nulová*) bilineární forma.

1) Zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definované pro každou dvojici vektorů $(x_1, x_2, x_3)$, $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ předpisem $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_3 - 2x_3y_2$ je bilineární forma.

2) Vezměme nějakou čtvercovou matici $A$ stupně $n$ nad tělesem $T$. Pak zobrazení $g : T^n \times T^n \to T$ určené předpisem $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}\, A\, \mathbf{w}^{\mathsf{T}}$ je bilineární formou.

3) Nechť $a, b \in \mathbf{R}$ a $p, q$ jsou dva reálné polynomy. Potom zobrazení $H(p, q) = p(a) \cdot q(b)$ tvoří bilineární formu na (reálném vektorovém) prostoru všech reálných polynomů.

4) Buď $a < b$ dvě reálná čísla a $\mathbb{C}_0(\langle a, b\rangle)$ vektorový prostor všech spojitých reálných funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak zobrazení $I_{ab} : \mathbb{C}_0(\langle a, b\rangle) \times \mathbb{C}_0(\langle a, b\rangle) \to \mathbf{R}$ dané předpisem $I_{ab}(f, g) = \int_a^b fg$ je bilineární formou.

**Definice.** Nechť $V$ je konečně dimenzionální vektorový prostor nad tělesem $T$, $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ jeho báze a $f : V \times V \to T$ bilineární forma. Matici $[f]_{(\mathbf{u}_i)} = (a_{ij})$ nazveme *maticí bilineárního zobrazení $f$ vzhledem k bázi* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$, pokud $a_{ij} = f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$, kde $i, j \leq n$.

**Věta 2.2.** *Buď $V$ vektorový prostor nad tělesem $T$, $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ báze $V$, $f : V \times V \to T$ bilineární forma a $[f]_{(\mathbf{u}_i)}$ její matice vyhledem k bázi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Potom $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \{\mathbf{v}\}_{(\mathbf{u}_i)} [f]_{(\mathbf{u}_i)} \{\mathbf{w}\}^{\mathsf{T}}_{(\mathbf{u}_i)}$ pro každé dva vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.*

*Důkaz.* Nechť $\{\mathbf{v}\}_{(\mathbf{u}_i)} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $\{\mathbf{w}\}_{(\mathbf{u}_i)} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, tedy $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbf{u}_i$ a $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{n} b_j\,\mathbf{u}_j$. Potom podle definice bilineární formy dostáváme, že

$$f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = f(\sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^{n} b_j\,\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(a_i\,\mathbf{u}_i, b_j\,\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot b_j \cdot f(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j).$$

Nyní už snadno ověříme, že příslušný maticový součin nám dá stejný výsledek, tedy že $f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \{\mathbf{v}\}_{(\mathbf{u}_i)}[f]_{(\mathbf{u}_i)}\{\mathbf{w}\}^{\mathsf{T}}_{(\mathbf{u}_i)}$. □

**Věta 2.3.** *Mějme vektorový prostor $V$ nad tělesem $T$ a nějakou bilineární formu $f : V \times V \to T$. Nechť $B$ a $C$ jsou dvě báze prostoru $V$ a $[\mathrm{Id}]_{CB}$ matice přechodu od báze $B$ k bázi $C$. Potom $[f]_C = [\mathrm{Id}]^{\mathsf{T}}_{CB}[f]_B[\mathrm{Id}]_{CB}$*

*Důkaz.* Podle Věty 2.2 platí pro každé dva vektory $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$, že

$$f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \{\mathbf{v}\}_B[f]_B\{\mathbf{w}\}^{\mathsf{T}}_B = \{\mathbf{v}\}_C[f]_C\{\mathbf{w}\}^{\mathsf{T}}_C.$$

Připomeňme, že $\{\mathbf{w}\}^{\mathsf{T}}_B = [\mathrm{Id}]_{CB}\{\mathbf{w}\}^{\mathsf{T}}_C$ a $\{\mathbf{v}\}_B = \{\mathbf{v}\}_C[\mathrm{Id}]^{\mathsf{T}}_{CB}$. Tak dostáváme pro každé dva vektory $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$ rovnost

$$\{\mathbf{v}\}_C[f]_C\{\mathbf{w}\}^{\mathsf{T}}_C = \{\mathbf{v}\}_C[\mathrm{Id}]^{\mathsf{T}}_{CB}[f]_B[\mathrm{Id}]_{CB}\{\mathbf{w}\}^{\mathsf{T}}_C.$$

Budeme-li za $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ volit vektory báze $C$, pak souřadnicové vektory $\{\mathbf{v}\}_C$ a $\{\mathbf{w}\}_C$ budou tvořit příslušné vektory $\mathbf{e}_i$ a $\mathbf{e}_j$ kanonické báze prostoru $T^n$. Víme-li, že $\mathbf{e}_i \cdot (a_{kl}) \cdot \mathbf{e}_j = a_{ij}$ pro libovolnou čtvercovou matici $(a_{kl})$ stupně $n$ a

$$\mathbf{e}_i[f]_C\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i([\mathrm{Id}]^{\mathsf{T}}_{CB}[f]_B[\mathrm{Id}]_{CB})\mathbf{e}_j,$$

pak se matice $[f]_C$ a $[\mathrm{Id}]^{\mathsf{T}}_{CB}[f]_B[\mathrm{Id}]_{CB}$ shodují, což jsme měli dokázat. □

**Poznámka 2.4.** *Pro každou bázi $B$ vektorového prostoru $V$ dimenze $n$ a každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ stupně $n$ existuje právě jedna bilineární forma, pro níž $\mathbf{A} = [f]_B$.*

**Poznámka 2.5.** *Označme $B(V)$ množinu všech bilineárních forem na vektorovém prostoru $V$ nad tělesem $T$. Buď $f, g \in B(V)$ a $t \in T$. Definujme na $B(V)$ násobení skalárem a sčítání následujícím způsobem:*

$$(t \cdot f)(\mathbf{v},\mathbf{w}) = t \cdot (f(\mathbf{v},\mathbf{w})), \quad (f+g)(\mathbf{v},\mathbf{w}) = f(\mathbf{v},\mathbf{w}) + g(\mathbf{v},\mathbf{w})$$

*pro všechna $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$. Potom množina všech bilineárních forem $B(V)$ spolu se zavedeným násobením skalárem a sčítáním tvoří vektorový prostor nad tělesem $T$. Pokud je prostor $V$ konečné dimenze, položme $n = \dim(V)$, je prostor $B(V)$ navíc izomorfní vektorovému prostoru všech čtvercových matic stupně $n$ nad tělesem $T$.*

**Definice.** Mějme bilineární formu $f$ na vektorovém prostoru $V$. Řekneme, že $f$ je *symetrická bilineární forma*, pokud $f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = f(\mathbf{w},\mathbf{v})$ pro všechna $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$, a $f$ je *antisymetrická bilineární forma*, pokud $f(\mathbf{v},\mathbf{w}) = -f(\mathbf{w},\mathbf{v})$ pro všechna $\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$.

**Poznámka 2.6.** *Pro bilineární formu $f$ na vektorovém prostoru $V$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(1) *$f$ je (anti)symetrická,*
(2) *existuje taková báze $B$ prostoru $V$, že $[f]_B$ je (anti)symetrická matice,*
(3) *pro každou bázi $B$ prostoru $V$ je $[f]_B$ je (anti)symetrická matice.*

**Poznámka 2.7.** *Označme $BS(V)$ resp. $BA(V)$ množinu všech symetrických resp. antisymetrických bilineárních forem na prostoru $V$ nad tělesem $T$. Potom $BS(V)$ i $BA(V)$ jsou podprostory vektorového prostoru $B(V)$. Pokud navíc* $\mathrm{char}(T) \neq 2$*, pak $BS(V) \cap BA(V) = \{\mathbf{0}\}$.*

**Věta 2.8.** *Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $T$. Pokud* $\mathrm{char}(T) \neq 2$*, potom lze každou bilineární formu $f$ na $V$ jednoznačně zapsat ve tvaru $f = f_s + f_a$, kde $f_s$ je symetrická a $f_a$ antisymetrická bilineární forma.*

*Důkaz.* Položme $f_s(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{u}))$ a $f_a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - f(\mathbf{v}, \mathbf{u}))$. Zřejmě $f = f_s + f_a$ a a $f_s$ je symetrická a $f_a$ antisymetrická bilineární forma. Mějme nyní nějaký jiný rozklad bilineární formy $f = g_s + g_a$ na symetrickou a antisymetrickou část. Pak $f_s + f_a = g_s + g_a$, a proto $f_s - g_s = g_a - f_a$. Podle Poznámky 2.7 je $f_s - g_s \in BS(V)$ a $g_a - f_a \in BA(V)$ a $f_s - g_s = \mathbf{0} = g_a - f_a$. Tudíž $f_s = g_s$ a $f_a = g_a$, čímž jsme dokázali jednoznačnost volby rozkladu $f$ na symetrickou a antisymetrickou část. □

**Příklad.** Nad libovolným tělesem $T$ charakteristiky 2 platí, že $a = -a$ pro každé $a \in T$, což znamená, že bilineární forma je nad takovým tělesem symetrická právě tehdy, když je antisymetrická. Vezmeme-li tedy bilineární formu $g$ na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_2^2$ nad tělesem $\mathbb{Z}_2$ danou předpisem $g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2$ zřejmě nejde o symetrickou (a proto ani antisymetrickou) formu. Protože platí, že

$$BS(\mathbb{Z}_2^2) = BA(\mathbb{Z}_2^2) = BS(\mathbb{Z}_2^2) + BA(\mathbb{Z}_2^2) \neq \mathbb{Z}_2^2,$$

nelze bilineární formu $g$ rozložit na symetrickou a antisymetrickou část.

**Příklad.** Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{Z}_5^3$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ a $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ pro nějakou bázi $B$ prostoru $\mathbb{Z}_5^3$. Uvědomíme-li si (viz Poznámka 2.5), že přiřazení $f \to [f]_B$ je izomorfismus, můžeme předpis obsažený v důkazu Věty 2.8 pro rozklad bilineární formy na symetrickou a antisymetrickou část snadno vyjádřit pomocí matic:

$$[f_s]_B = \frac{1}{2}([f]_B + [f]_B^{\mathsf{T}}) = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f_a]_B = \frac{1}{2}([f]_B - [f]_B^{\mathsf{T}}) = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Definice.** Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$. Řekneme, že báze $B$ prostoru $V$ je *polární bází* bilineární formy $f$, jestliže $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ pro všechna $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in B$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

**Poznámka 2.9.** *$B$ je polární báze bilineární formy $f$ na konečně dimenzionálním prostoru právě tehdy, když $[f]_B$ je diagonální matice.*

**Věta 2.10.** *Nechť $V$ je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem $T$ a nechť $f$ je nenulová symetrická bilineární forma na $V$. Je-li* $\mathrm{char}(T) \neq 2$*, potom existuje vektor $\mathbf{u} \in V$, pro nějž $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0$.*

*Důkaz.* Protože $f$ je nenulová symetrická bilineární forma, existují vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, pro něž $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq 0$. Pokud $f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \neq 0$ nebo $f(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \neq 0$ jsme hotovi. V opačném případě $f(\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v})+f(\mathbf{v}, \mathbf{w})+f(\mathbf{w}, \mathbf{v})+f(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 2f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \neq 0$ neboť $\mathrm{char}(T) \neq 2$. □

**Věta 2.11.** *Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $T$ a nechť $f$ je symetrická bilineární forma na $V$. Pokud* $\mathrm{char}(T) \neq 2$*, pak $f$ je symetrická právě tehdy když existuje nějaká polární báze $f$.*

*Důkaz.* ($\Rightarrow$) Přímou implikaci budeme dokazovat indukcí podle $n = \dim(V)$, přičemž využijeme Poznámku 2.9. Jestliže $\dim(V) = 1$, není co dokazovat, protože každá čtvercová matice stupně 1 je diagonální (tj. triviálně splňuje podmínku, že má všude mimo diagonálu nuly).

Předpokládejme, že tvrzení platí pro každou symetrickou bilineární formu na libovolném prostoru dimenze $n$ a dokažme tvrzení pro prostory dimenze $n+1$. Pokud je $f$ nulová, pak je každá báze $V$ polární vzhledem k $f$. Je-li $f$ nenulová symetrická bilineární forma na prostoru $V$ dimenze $n+1$, pak podle Věty 2.10 existuje takový vektor $\mathbf{u}_0$, že $f(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0) \neq 0$. Vektor můžeme doplnit na bázi $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ celého vektorového prostoru $V$. Nyní položme $\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i - \frac{f(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_i)}{f(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)}\, \mathbf{u}_0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ a označme $W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$. Nyní zřejmě

$$f(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_i) = f(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_i - \frac{f(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_i)}{f(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)}\, \mathbf{u}_0) = f(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_i) - \frac{f(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_i)}{f(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)} f(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0) = 0$$

pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, a proto $f(\mathbf{u}_0, \mathbf{w}) = 0$ pro každé $\mathbf{w} \in W$. Protože $f$ omezená na podprostor $W$ dimenze $n$ tvoří rovněž symetrickou bilineární formu, existuje podle indukčního předpokladu nějaká polární báze $W$ vzhledem k $f$, označme ji $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Tedy $f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0$ pro všechna $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Navíc víme, že $f(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_i) = f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_0) = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, tedy jsme našli bázi $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ prostoru $V$ polární vzhledem k $f$.

($\Leftarrow$) Protože je matice $f$ vzhledem k polární bázi zjevně symetrická, je $f$ podle Poznámky 2.6 symetrickou bilineární formou. □

**Příklad.** Mějme $f$ symetrickou bilineární formu na prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ danou předpisem $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$. Matice $[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ je maticí bilineární formy $f$ vzhledem ke kanonické bázi $K_3$.
Symetrickou elementární úpravou nazývejme dvojici elemntárních úprav stejného typu na řádky a zároveň jim odpovídající sloupce matice. Tedy pokud přehodíme řádky $i$ a $j$, přehodíme zároveň i sloupce $i$ a $j$, pokud $i$-tý řádek vynásobíme nenulovým skalárem $a$, zároveň vynásobíme i $i$-tý sloupec týmž skalárem a konečně, pokud přičteme k $i$-tému řádku $a$-násobek $j$-tého řádku, přičteme zároveň k $i$-tému sloupci $a$-násobek $j$-tého sloupce.

Uvědomíme-li si, že matice bilineární formy upravená symetrickými úpravami, je maticí téže bilineární formy vzhledem k jisté nové bázi, zkusíme matici upravovat tak, aby postupně odpovídala maticím $f$ vzhledem k bázím, které se vyskytují v důkazu Věty 2.11. Nejprve symetrickými elementárními úpravami vynulujeme všechny hodnoty na prvním řádku a prvním sloupci matice $[f]_{K_3}$ kromě diagonální pozice $(1, 1)$. Potom postupně nulujeme hodnoty mimo diagonálu v dalších řádcích a sloupcích. Pokud narazíme na diagonále (na pozici $(i, i)$) na hodnotu 0, obdobně

jako je tomu ve Větě 2.10, kterou používáme v důkazu Věty 2.11, přičteme k $i$-tému řádku takový $j$-tý řádek, který má na místě $i$-té souřadnici nenulovou hodnotu a zároveň přičteme k $i$-tému sloupci $j$-tý sloupec. Pokud i po této úpravě bude na diagonále nula, zopakujeme ji ještě jednou (nebo rovnou přičteme dvojnásobek $j$-tého řadku a sloupce). Postupně tak vytvoříme diagonální matici:

$$[f]_{K_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Budeme-li zaznamenávat do matice provedené řádkové úpravy dostaneme podle Věty 2.3 matici $[\mathrm{Id}]^{\mathsf{T}}_{BK_3}$, kde $B$ je báze vůči níž má $f$ diagonální matici, kterou jsme získali výše uvedenými úpravami. Tedy

$$([f]_{K_3}|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) = ([f]_B|[\mathrm{Id}]^{\mathsf{T}}_{BK_3})$$

Dostali jsme matici přechodu od kanonické k polární bázi $[\mathrm{Id}]_{BK_3} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, a proto báze $((1,0,0),\ (6,1,2),\ (2,1,3))$ je polární bází vektorového prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ s bilineární formou $f$.

To snadno ověříme zkouškou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0.$$

**Definice.** Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$. *Levým* (resp. *pravým*) *vrcholem* bilineární formy $f$ nazveme množinu $V_l(f) = \{\mathbf{u} \in V |\ \forall\, \mathbf{v} \in V : f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$ (resp. $V_p(f) = \{\mathbf{u} \in V |\ \forall\, \mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0\}$).

**Poznámka 2.12.** *Nechť $f$ je bilineární forma na vektorovém prostoru $V$. Pak $V_l(f)$ a $V_p(f)$ tvoří podprostory prostoru $V$.*

**Poznámka 2.13.** *Mějme na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru $V$ bilineární formu $f$ a buď $B$ báze $V$. Potom množina souřadnic vzhledem k bázi $B$ vektorů pravého vrcholu $\{\{\mathbf{v}\}_B |\ \mathbf{v} \in V_p(f)\}$ (resp. levého vrcholu $\{\{\mathbf{v}\}_B |\ \mathbf{v} \in V_l(f)\}$) je rovna právě množině všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $[f]_B$ (resp. $[f]^{\mathsf{T}}_B$).*

**Poznámka 2.14.** *Nechť $f$ je bilineární forma na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru $V$. Potom $\dim(V_l(f)) = \dim(V_p(f)) = \dim(V) - h([f]_B)$ pro každou bázi $B$ prostoru $V$.*

**Definice.** *Nulitou* $n(f)$ bilineární formy $f$ na vektorovém prostoru $V$ nazveme číslo $\dim(V_l(f))$. Pokud $n(f) = 0$ mluvíme o *regulární* bilineární formě $f$.

**Poznámka 2.15.** *$V_l(f) = V_p(f)$ pro každou symetrickou bilineární formu $f$.*

**Definice.** Buď $f$ symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $V$. Pak podprostor $V(f) = V_l(f) = V_p(f)$ nazveme *vrcholem* symetrické bilineární formy $f$.

**Věta 2.16.** *Nechť $f$ je symetrická bilineární forma na konečně dimenzionálním vektorovém prostoru $V$ a $B$ polární báze $f$. Právě všechny vektory $\mathbf{u} \in B$ splňující podmínku $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ tvoří bázi vrcholu $V(f)$.*

*Důkaz.* Označme $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \mathbf{u}_n)$ vektory polární báze $V$ vzhledem k $f$. Zřejmě platí, že $f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0$ pro každé $i \neq j$. Pokud navíc $f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = 0$ pro nějaké $i \leq n$, leží vektor $\mathbf{u}_i$ ve vrcholu $V(f)$. Připomeňme, že nulita (tedy dimenze $V(f)$) je podle Poznámky 2.13 rovna hodnotě $n - h([f]_B)$ a dále si uvědomme, že hodnost diagonální matice $h([f]_B)$ je rovna právě počtu nenulových hodnot na diagonále, tedy naopak $n - h([f]_B)$ je počet nulových hodnot na diagonále matice $[f]_B$. Vezmeme-li všechny vektory $\mathbf{u}_i$, pro něž $f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = 0$ (tedy právě $i$-tá hodnota na diagonále matice $[f]_B$ je rovna nule), dostaneme $n - h([f]_B)$ lineárně nezávislých vektorů, které všechny leží ve vrcholu $V(f)$. Protože $\dim(V(f)) = n - h([f]_B)$ podle Poznámky 2.14, musí už nutně jít o bázi celého podprostoru $V(f)$. □

**Definice.** Mějme bilineární formu $f$ na vektorovém prostoru $V$ nad tělesem $T$. Zobrazení $f_2 : V \to T$ dané předpisem $f_2(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ nazveme *kvadratickou formou* vytvořenou bilineární formou $f$.

**Poznámka 2.17.** *$g_2 = 0$ pro každou antisymetrickou bilineární formu $g$ nad tělesem $T$ charakteristiky* $\mathrm{char}(T) \neq 2$.

**Poznámka 2.18.** *Buď $f$ bilineární forma na vektorovém prostoru $V$ nad tělesem $T$,* $\mathrm{char}(T) \neq 2$ *a buď $f = f_s + f_a$ rozklad na symetrickou a antisymetrickou část (viz Věta 2.8). Pak $f_s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(f_2(\mathbf{v}+\mathbf{w}) - f_2(\mathbf{v}) - f_2(\mathbf{w}))$.*

**Věta 2.19.** *Pro každou kvadratickou formu $f_2$ vytvořenou bilineární formou $f$ existuje právě jedna symetrická bilineární forma $g$ tak, že $f_2(\mathbf{u}) = g_2(\mathbf{u})$ pro všechna $\mathbf{u} \in V$. Přitom $g = f_s$.*

*Důkaz.* Z Poznámky 2.17 okamžitě plyne, že $f_2(\mathbf{u}) = f_s(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + f_a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = f_s(\mathbf{u}, \mathbf{u})$, tedy $f_2(\mathbf{u}) = (f_s)_2(\mathbf{u})$. Máme-li symetrickou bilineární formu $g$ splňující podmínku, že $f_2(\mathbf{u}) = g_2(\mathbf{u})$, potom $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(g_2(\mathbf{v}+\mathbf{w}) - g_2(\mathbf{v}) - g_2(\mathbf{w})) = \frac{1}{2}(f_2(\mathbf{v}+\mathbf{w}) - f_2(\mathbf{v}) - f_2(\mathbf{w})) = f_s(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ podle Poznámky 2.18, čímž máme ověřenu jednoznačnost. □

**Definice.** *Maticí, polární bází a vrcholem kvadratické formy $f_2$* budeme rozumět matici, polární bázi a vrchol příslušné symetrické bilineární formy $f_s$. Dále řekneme, že kvadratická forma $f_2$ je *regulární*, pokud $f_s$ je regulární bilineární forma.

**Věta 2.20** (Zákon setrvačnosti kvadratických forem)**.** *Buď $f_2$ kvadratická forma na reálném konečně dimenzionálním vektorovém prostoru $V$ a buď $B$ a $C$ dvě polární báze kvadratické formy $f_2$. Pak platí, že*

a) *počet vektorů $\mathbf{w}$, pro něž je $f_2(\mathbf{w}) = 0$, je v bázích $B$ a $C$ stejný, tedy $n(f_2) = |\{\mathbf{u} \in B | f_2(\mathbf{u}) = 0\}| = |\{\mathbf{v} \in C | f_2(\mathbf{v}) = 0\}|$,*
b) *počet vektorů $\mathbf{w}$, pro něž je $f_2(\mathbf{w})$ kladné, je v bázích $B$ a $C$ stejný, tedy $p(f_2) = |\{\mathbf{u} \in B | f_2(\mathbf{u}) > 0\}| = |\{\mathbf{v} \in C | f_2(\mathbf{v}) > 0\}|$,*
c) *počet vektorů $\mathbf{w}$, pro něž je $f_2(\mathbf{w})$ záporné, je v bázích $B$ a $C$ stejný, tedy $q(f_2) = |\{\mathbf{u} \in B | f_2(\mathbf{u}) < 0\}| = |\{\mathbf{v} \in C | f_2(\mathbf{v}) < 0\}|$.*

*Navíc $n(f_2) + p(f_2) + q(f_2) = \dim(V)$*

*Důkaz.* Označme $p_B$, $q_B$, $p_C$ a $q_C$ po řadě počet vektorů báze $B$ s kladnou a se zápornou hodnotou $f_2$ a báze $C$ s kladnou a se zápornou hodnotou $f_2$. Poznamenejme, že bod a) plyne okamžitě z Věty 2.16. Dále zřejmě platí rovnosti $n(f_2) + p_B + q_B = \dim(V) = n(f_2) + p_C + q_C$. Označme nyní $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{p_B}$ všechny bázické vektory báze $B$, pro které je $f_2(\mathbf{u}_i)$ kladné a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ všechny bázické vektory báze $C$, pro které $f_2(\mathbf{v}_i) \leq 0$, kde $k = n(f_2) + q_C$. Všimněme si, že $f_2(\mathbf{u}) > 0$ pro každý nenulový vektor $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{p_B} \rangle$ a že $f_2(\mathbf{u}) \leq 0$ pro každý vektor $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$. To znamená, že $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{p_B} \rangle \cap \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle = \{\mathbf{0}\}$ a posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{p_B}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ je tudíž lineárně nezávislá. Proto $p_B + k = p_B + n(f_2) + q_C \leq \dim(V) = n(f_2) + p_C + q_C$ a odtud dostáváme, že $p_B \leq p_C$. Symetrickou úvahou pro ty vektory $C$, na nichž je $f_2$ kladná, a ty vektory $B$, na nichž je $f_2$ nulová nebo záporná, dostaneme, že $p_C \leq p_B$. Tedy $p_B = p_C$, a proto i $q_B = q_C$. □

**Poznámka 2.21.** *Buď $f_2$ kvadratická forma na reálném konečně dimenzionálním vektorovém prostoru $V$. Pak matice $[f_2]_B$ a $[f_2]_C$ obsahují na diagonále pro každou dvojici polárních bází $B, C \in V$ stejné množství nul, kladných čísel s záporných čísel.*

**Definice.** Buď $f_2$ kvadratická forma na reálném konečně dimenzionálním vektorovém prostoru. Vezměme nulitu $n(f_2)$ kvadratické formy $f_2$ a dále čísla $p(f_2)$ a $q(f_2)$ z Věty 2.20. Pak uspořádanou trojici $(n(f_2), p(f_2), q(f_2))$ nazveme *signaturou* kvadratické formy $f_2$.

**Poznámka 2.22** (klasické znění Zákona setrvačnosti kvadratických forem)**.** *Buď $f_2$ kvadratická forma na reálném konečně dimenzionálním vektorovém prostoru, pak její signatura $(n(f_2), p(f_2), q(f_2))$ nezávisí na volbě polární báze a $n(f_2) + p(f_2) + q(f_2) = \dim(V)$.*

**Poznámka 2.23.** *Buď $f_2$ kvadratická forma na reálném konečně dimenzionálním vektorovém prostoru $V$. Pak existuje taková polární báze $B$, že $f_2(\mathbf{v}) \in \{-1, 0, 1\}$ pro každý vektor $\mathbf{v} \in B$.*

**Poznámka 2.24.** *Nechť $V$ a $W$ jsou dva reálné konečně dimenzionální vektorové prostory, $f_2$ kvadratická forma na $V$ a $g_2$ kvadratická forma na $W$. Pokud mají $f_2$ a $g_2$ stejnou signaturu, existuje izomorfismus $\varphi : V \to W$ tak, že $f_2(\mathbf{v}) = g_2(\varphi(\mathbf{v}))$ pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$.*

**Věta 2.25** (Klasifikace kvadratických forem)**.** *Nechť $f_2$ je kvadratická forma na reálném konečně dimenzionálním vektorovém prostoru $V$, $f_s$ jí příslušná symetrická bilineární forma a $(n(f_2), p(f_2), q(f_2))$ signatura $f$.*

(1) *Pokud $q(f_2) = 0$ a $n(f_2) = 0$, pak $f_2(\mathbf{v}) > 0$ pro každý nenulový vektor $\mathbf{v} \in V$ (říkáme, že $f_2$ resp. $f_s$ je* pozitivně definitní*).*
(2) *Pokud $q(f_2) = 0$ a $n(f_2) > 0$, pak $f_2(\mathbf{v}) \geq 0$ pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ (říkáme, že $f_2$ resp. $f_s$ je* pozitivně semidefinitní*).*
(3) *Pokud $p(f_2) = 0$ a $n(f_2) = 0$, pak $f_2(\mathbf{v}) < 0$ pro každý nenulový vektor $\mathbf{v} \in V$ (říkáme, že $f_2$ resp. $f_s$ je* negativně definitní*).*
(4) *Pokud $p(f_2) = 0$ a $n(f_2) > 0$, pak $f_2(\mathbf{v}) \leq 0$ pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ (říkáme, že $f_2$ resp. $f_s$ je* negativně semidefinitní*).*

*Důkaz.* Zvolme nějakou polární bázi $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ symetrické bilineární formy $f_s$, která existuje podle Věty 2.11. Nechť $\mathbf{v} \in V$ je libovolný nenulový vektor, potom $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i$ pro vhodné skaláry $a_i \in \mathbf{R}$, z nichž alespoň jedno $a_i$ je nenulové.

(2) Pokud $q(f_2) = 0$, pak $f_2(\mathbf{u}_i) \geq 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Tedy

$$f_2(\mathbf{v}) = f_s(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = f_s(\sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^{n} a_j\, \mathbf{u}_j) = \sum_{i,j \leq 1} a_i a_j f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) \geq 0.$$

(1) Pokud navíc $n(f_2) = 0$, je $f_2(\mathbf{u}_i) > 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, a proto $f_2(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) > 0$

Body (3) a (4) se dokazují obdobně. □

## 3. Skalární součin

V celé této kapitole je těleso $T$ buď tělesem **reálných** nebo **komplexních** čísel. Pokud $c = a + bi$ je komplexní číslo, kde $a, b \in \mathbf{R}$, budeme značit $\overline{c} = a - bi$ číslo komplexně sdružené. Je-li $c \in \mathbf{R}$, zřejmě $\overline{c} = c$.

**Definice.** *Skalárním součinem* na vektorovém prostoru $V$ nad tělesem $T$ (= $\mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$) nazveme zobrazení $g : V \times V \to T$ splňující pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a skaláry $a, b \in T$ podmínky:

(1) $g(\mathbf{u}, a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}) = a \cdot g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b \cdot g(\mathbf{u}, \mathbf{w})$,
(2) $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{g(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$,
(3) $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \in \mathbf{R}$ a $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$, navíc $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$, právě když $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Dvojici $(V, g)$ nazveme (reálným nebo komplexním) *unitárním prostorem.*

**Poznámka 3.1.** *Pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ a skaláry $a, b \in T$ na unitárním prostoru $(V, g)$ platí:*

a) $g(a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}, \mathbf{u}) = \overline{a} \cdot g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \overline{b} \cdot g(\mathbf{w}, \mathbf{u})$,
b) $g(a \cdot \mathbf{u}, a \cdot \mathbf{u}) = |a|^2 g(\mathbf{u}, \mathbf{u})$,
c) $g(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = g(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = 0$.

**Věta 3.2.** *Buď $V$ reálný vektorový prostor a $g$ zobrazeni $V \times V \to \mathbf{R}$. Pak $g$ je skalárním součinem právě tehdy, když $g$ je pozitivně definitní symetrickou bilineární formou na $V$.*

*Důkaz.* ($\Rightarrow$) Podle definice je skalární součin $g$ lineární v druhé složce a podle Poznámky 3.1 a) je nad reálným tělesem lineární i v první složce, tedy jde o bilineární formu. Dále bod (2) definice říká, že skalární součin na reálném vektorovém prostoru je symetrická bilineární forma. Konečně podle bodu (3) definice je $g$ pozitivně definitní.

($\Leftarrow$) Pozitivně definitní symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru zřejmě splňuje všechny tři axiomy definice skalárního součinu. □

**Příklad.** 1) Zobrazení $\omega : T^n \times T^n \to T$ definované pro každou dvojici vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ předpisem $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{\mathbf{x}}\mathbf{y}^\mathsf{T}$ je (takzvaným *standardním*) skalárním součinem.

2) Mějme nějakou bázi $B$ konečně dimenzionálního vektorového prostoru $V$. Zobrazení $g_B : V \times V \to T$ definované předpisem $g_B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\{\mathbf{v}\}_B}\{\mathbf{w}\}_B^\mathsf{T}$ pro všechny vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ je skalární součin.

3) Symetrická bilineární forma $I_{ab}(f, g) = \int_a^b fg$ na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{C}_0(\langle a, b\rangle)$ (viz příklad 4) bilineárních forem) je zřejmě pozitivně definitní, tedy jde o skalární součin.

**Definice.** Nechť $(V, g)$ je unitární prostor, potom zobrazení $\| - \|_g : V \to \mathbf{R}$ určené předpisem $\| \mathbf{v} \|_g = \sqrt{g(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$ nazveme *normou* danou skalárním součinem $g$.

**Poznámka 3.3.** *Pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ a skaláry $a \in T$ na unitárním prostoru $(V, g)$ platí:*

a) $\| \mathbf{v} \|_g \geq 0$ *a* $\| \mathbf{v} \|_g = 0$ *právě když* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
b) $\| a\,\mathbf{v} \|_g = |a| \cdot \| \mathbf{v} \|_g$,

**Věta 3.4.** *Nechť $(V, g)$ je unitární prostor. Potom pro všechny vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí:*

a) $|g(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \| \mathbf{u} \|_g \| \mathbf{v} \|_g$ (Cachyho-Schwarzova nerovnost),
b) $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|_g \leq \| \mathbf{u} \|_g + \| \mathbf{v} \|_g$ (Trojúhelníková nerovnost).

*Důkaz.* a) Je-li $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, a označme $c = \frac{g(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\| \mathbf{u} \|_g^2}$. S využitím definice a Poznámky 3.1 dostaneme:

$$0 \leq g(c\,\mathbf{u} - \mathbf{v}, c\,\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \overline{c}c \cdot g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - c \cdot g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - \overline{c} \cdot g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) =$$

$$= \frac{|g(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2}{\| \mathbf{u} \|_g^4} \cdot \| \mathbf{u} \|_g^2 - 2\frac{|g(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2}{\| \mathbf{u} \|_g^2} + \| \mathbf{v} \|_g^2 = \| \mathbf{v} \|_g^2 - \frac{|g(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2}{\| \mathbf{u} \|_g^2}.$$

Proto $|g(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2 \leq \| \mathbf{u} \|_g^2 \| \mathbf{v} \|_g^2$ a $|g(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \| \mathbf{u} \|_g \| \mathbf{v} \|_g$.

b) Uvědomíme-li si, že $\mathrm{Re}(g(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \leq |g(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \| \mathbf{u} \|_g \| \mathbf{v} \|_g$, kde Re označuje reálnou část komplexního čísla, snadno spočítáme, že

$$\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|_g^2 = \| \mathbf{u} \|_g^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}(g(\mathbf{u}, \mathbf{v})) + \| \mathbf{v} \|_g^2 \leq$$

$$\leq \| \mathbf{v} \|_g^2 + 2\| \mathbf{u} \|_g \| \mathbf{v} \|_g + \| \mathbf{v} \|_g^2 = (\| \mathbf{u} \|_g + \| \mathbf{v} \|_g)^2.$$

Tedy $\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|_g \leq \| \mathbf{u} \|_g + \| \mathbf{v} \|_g$. □

**Příklad** (Geometrie na reálném unitárním prostoru)**.** Na reálném unitárním prostoru $(V, g)$ můžeme měřit úhly a vzdálenosti vektorů následujícím způsobem: řekneme, že dva vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ svírají úhel $\alpha$, pokud

$$cos\alpha = \frac{g(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\| \mathbf{u} \|_g \| \mathbf{v} \|_g},$$

a vzdálenost dvou vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ definujeme jako hodnotu $\| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|_g$. Poznamenejme, že podle Věty 3.4 a) je úhel dobře definován (tj. $cos\alpha \in \langle -1, 1 \rangle$) a dva vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou kolmé právě tehdy, když $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Podle Poznámky 3.3 a) je velikost nenulového vektoru kladná a Věta 3.4 b) říká, že platí trojúhelníkoví nerovnost.

**Definice.** Nechť $(V, g)$ je konečně dimenzionální unitární prostor a $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze $V$. Matici $[g]_{(\mathbf{u}_i)} = (a_{ij})$ nazveme *maticí skalárního součinu g vzhledem k bázi* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$, pokud $a_{ij} = g(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$, kde $i, j \leq n$.

**Poznámka 3.5.** *Buď $(V, g)$ unitární prostor a $B$ nějaká báze $V$. Potom $[g]_B = \overline{[g]_B^{\mathsf{T}}}$, dále $[g]_C = \overline{[\mathrm{Id}]_{CB}}^{\mathsf{T}} [g]_B [\mathrm{Id}]_{CB}$ a $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{\{\mathbf{v}\}}_B [g]_B \{\mathbf{w}\}_B^{\mathsf{T}}$ pro každé dva vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.*

**Definice.** Nechť $(V, g)$ je unitárním prostorem. Řekneme, že množina (nebo posloupnost) vektorů $B \subset V$ je *ortogonální*, pokud $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ pro každou dvojici vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in B$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Ortogonální množinu (nebo posloupnost) vektorů $B \subset V$ nazveme *ortonormální*, pokud navíc $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$ pro každý vektor $\mathbf{u} \in B$

**Věta 3.6** (Pythagorova věta)**.** *Jsou-li dva vektory* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$ *unitárního prostoru* $(V, g)$ *ortogonální, pak* $\| \mathbf{u}+\mathbf{v} \|_g^2 = \| \mathbf{u} \|_g^2 + \| \mathbf{v} \|_g^2$.

*V reálném vektorovém prostoru platí i opačná implikace.*

*Důkaz.* Stačí uvážit rovnost

$$\| \mathbf{u}+\mathbf{v} \|_g^2 = \| \mathbf{u} \|_g^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}(g(\mathbf{u}, \mathbf{v})) + \| \mathbf{v} \|_g^2$$

z důkazu Věty 3.4. □

**Poznámka 3.7.** *Každá ortonormální množina (posloupnost) vektorů unitárního prostoru je lineárně nezávislá.*

**Věta 3.8.** *Nechť* $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *je báze unitárního prostoru* $(V, g)$*. Potom existuje* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *ortonormální báze* $V$ *splňující podmínku* $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i \rangle$ *pro všechna* $i = 1, 2, \ldots, n$.

*Důkaz.* Při hledání ortonormální báze s požadovanými vlastnostmi postupujme indukcí.

Protože $\mathbf{u}_1$ je bázický vektor, $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$, a proto $\| \mathbf{u}_1 \|_g \neq 0$ podle Poznámky 3.2. Položme $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\| \mathbf{u}_1 \|_g}$. Potom $g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = 1$ a $\langle \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$.

Mějme definovánu ortonormální posloupnost vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}$, která splňuje podmínku $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i-1} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1} \rangle$. Nyní nejprve definujme vektor

$$\mathbf{v}_i' = \mathbf{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} g(\mathbf{v}_j, \mathbf{u}_i)\, \mathbf{v}_j \,.$$

Zřejmě platí, že $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i' \rangle$. Odtud také plyne, že posloupnost $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i'$ generuje podprostor dimenze $i$, tedy jde o lineárně nezávislou posloupnost. Proto $\mathbf{v}_i' \neq \mathbf{0}$ a $\| \mathbf{v}_i' \|_g \neq 0$. Dále

$$g(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i') = g(\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i) - \sum_{j=1}^{i-1} g(\mathbf{v}_j, \mathbf{u}_i) g(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j) = g(\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i) - g(\mathbf{v}_k, \mathbf{u}_i) = 0$$

pro každé $k = 1, \ldots, i-1$. Když nyní položíme $\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{v}_i'}{\| \mathbf{v}_i' \|_g}$, dostáváme $\| \mathbf{v}_i \|_g = 1$, tedy $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i$ bude ortonormální posloupností vektorů. Konečně $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i' \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i \rangle$. □

**Příklad** (klasická Gramova-Schmidtova ortogonalizace)**.** Shrňme postup, kterým jsme v důkazu předchozí věty získali z báze $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ unitárního prostoru $(V, g)$ ortonormální bázi $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$:

V prvním kroku jsme položili $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\| \mathbf{u}_1 \|_g}$.

V i-tém kroku jsme nejprve hledali vektor ve tvaru $\mathbf{v}_i' = \mathbf{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_j\, \mathbf{v}_j$, který by byl kolmý na všechny předchozí vektory $\mathbf{v}_k$, tj. $g(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_i') = 0$ pro všechna $k = 1, \ldots, i-1$. Odtud snadno odvodíme, že $c_j = g(\mathbf{v}_j, \mathbf{u}_i)$ a $\mathbf{v}_i' = \mathbf{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} g(\mathbf{v}_j, \mathbf{u}_i)\, \mathbf{v}_j$ . Konečně $\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{v}_i'}{\| \mathbf{v}_i' \|_g}$.

Vezměme si bázi $((1,1,0),\ (0,1,1),\ (1,1,1))$ reálného vektorového prostoru $\mathbf{R}^3$ se standardním skalárním součinem $\omega$. Najdeme výše uvedeným postupem ortonormální bázi: $(\mathbf{v}_i)$.

1. $\mathbf{v}_1 = \frac{(1,1,0)}{\|(1,1,0)\|_\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$.

2. $\mathbf{v}_2' = (0,1,1) - \omega(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),(0,1,1)) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = \frac{1}{2}(-1,1,2)$. Proto $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$.
3. Předně $\omega(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),(1,1,1)) = \sqrt{2}$ a $\omega(\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2),(1,1,1)) = \frac{2}{\sqrt{6}}$, proto $\mathbf{v}_3' = (1,1,1) - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) = \frac{1}{3}(1,-1,1)$. Konečně $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$.

**Příklad** (modifikovaná Gramova-Schmidtova ortogonalizace)**.** V prvním kroku modifikovaného Gramova-Schmidtova algoritmu rovněž položme $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_g}$ a dále přiřaďme $\mathbf{u}_k \to \mathbf{v}_k'$ pro všechna $k = 2, \ldots, n$.

V i-tém kroku potom postupně nahradíme vektory $\mathbf{v}_k'$ pro všechna $k = i, i+1, \ldots, n$ vektorem $\mathbf{v}_k' - g(\mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_k')\,\mathbf{v}_{i-1}$. Nakonec položíme $\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{v}_i'}{\|\mathbf{v}_i'\|_g}$.

Chceme-li vytvořit ortonormální bázi z báze $((1,1,0),\ (0,1,1),\ (1,1,1))$ unitárního prostoru $(\mathbf{R}^3, \omega)$ modifikovaným Gramovým-Schmidtovým algoritmem, dostáváme:

1. $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$, $\mathbf{v}_2' = (0,1,1)$ a $\mathbf{v}_3' = (1,1,1)$.
2. $\mathbf{v}_2' = \frac{1}{2}(-1,1,2)$, $\mathbf{v}_3' = (1,1,1) - \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = (0,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$.
3. $\mathbf{v}_3' = (0,0,1) - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2) = \frac{1}{3}(1,-1,1)$ a $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$.

Výsledek modifikovaného algoitmu je stejný jako v případě klasického algoritmu, změnili jsme jen uspořádání úprav.

**Poznámka 3.9.** *Buď $(V,g)$ unitární prostor konečné dimenze a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ ortonormální báze $V$. Pak $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} g(\mathbf{v}_i, \mathbf{v})\,\mathbf{v}_i$ pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$.*

**Poznámka 3.10.** *Buď $(V,g)$ konečně dimenzionální unitární prostor. Pak báze $B \subset V$ je ortonormální právě tehdy, když $[g]_B$ je jednotková matice.*

**Definice.** Nechť $(V,g)$ a $(V',g')$ jsou dva unitární prostory nad stejným tělesem (tj. buď nad $\mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$). Řekneme, že homomorfismus $\varphi : V \to V'$ je *unitární zobrazení*, jestliže $g(\mathbf{v},\mathbf{w}) = g'(\varphi(\mathbf{v}), \varphi(\mathbf{w}))$ pro každou dvojici vektorů $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

**Poznámka 3.11.** *Každé unitární zobrazení je prosté.*

**Věta 3.12.** *Nechť $(V,g)$ je unitární prostor konečné dimenze (zopakujme, že nad tělesem $T = \mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$) a $B$ je ortonormální báze $V$, položme $n = \dim(V)$. Pak zobrazení $\varphi : V \to T^n$ dané předpisem $\varphi(\mathbf{u}) = \{\mathbf{u}\}_B$ je unitární zobrazení na prostor $(T^n, \omega)$.*

*Důkaz.* Zobrazení $\varphi$ je zřejmě izomorfismus. Dále podle Poznámky 3.5 je $g(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \overline{\{\mathbf{v}\}}_B [g]_B \{\mathbf{w}\}_B^{\mathsf{T}}$ pro každé dva vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. Ovšem matice $[g]_B$ je podle Poznámky 3.10 jednotková, proto $g(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \overline{\{\mathbf{v}\}}_B \{\mathbf{w}\}_B^{\mathsf{T}} = \omega(\varphi(\mathbf{v}), \varphi(\mathbf{w}))$, tedy $\varphi$ je unitární zobrazení. □

**Definice.** Buď $(V,g)$ unitární prostor a buď $M$ nějaká podmnožina $V$. Množinu $M^\perp = \{\mathbf{v} \in V |\ \forall\, \mathbf{u} \in M :\ g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0\}$ nazveme *ortogonálním doplňkem* množiny $M$ v unitárním prostoru $(V,g)$.

**Poznámka 3.13.** *Nechť $(V,g)$ je unitární prostor a $M$ podmnožina $V$. Potom $M^\perp$ je podprostor $V$ a platí, že $\langle M \rangle^\perp = M^\perp$*

**Věta 3.14.** *Nechť $(V,g)$ je unitární prostor a $U$ jeho podprostor konečné dimenze. Potom $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$ a $U + U^\perp = V$.*

*Důkaz.* Pokud $\mathbf{u} \in U \cap U^\perp$, zřejmě $g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$, tedy podle definice $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Tím jsme ověřili, že $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

Poznamenejme, že zobrazení $g$ omezené na množinu $U \times U$ je skalárním součinem na konečně dimenzionálním prostoru $U$. Vezměme nějakou ortonormální bázi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$ podprostoru $U$, kterou nám zaručuje Věta 3.8. Nechť $\mathbf{v} \in V$. Položme $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} g(\mathbf{u}_i, \mathbf{v})\, \mathbf{u}_i$ a $\mathbf{u}^\perp = \mathbf{v} - \mathbf{u}$. Zřejmě $\mathbf{u} \in U$. Dále $g(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}^\perp) = g(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) - g(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) = 0$, tedy $\mathbf{u}^\perp \in U^\perp$ podle Poznámky 3.13. Tedy každý vektor z $V$ leží v prostoru $U + U^\perp$, což znamená, že $U + U^\perp = V$. □

**Poznámka 3.15.** *Mějme $(V, g)$ unitární prostor a $U$ jeho podprostor konečné dimenze. Potom pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ existuje právě jeden vektor $P_U(\mathbf{v}) \in U$ a právě jeden vektor $P_U^\perp(\mathbf{v}) \in U^\perp$ tak, že $\mathbf{v} = P_U(\mathbf{v}) + P_U^\perp(\mathbf{v})$. Navíc obě zobrazení $P_U : V \to U$ i $P_U^\perp : V \to U^\perp$ jsou homomorfismy na (tj. epimorfismy).*

**Definice.** Homomorfismus $P_U$ z předchozí poznámky se nazývá *ortogonální projekcí* prostoru $V$ na podprostor $U$.

**Příklad.** Máme-li nějaký podprostor $U = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle$ unitárního prostoru $(V, g)$ a budeme-li chtít najít ortogonální projekci libovolného vektoru $\mathbf{v} \in V$, nemusíme nutně hledat ortogonální bázi $U$ (tak jak to vyžaduje postup důkazu Věty 3.14). Můžeme pozorování, které využívá důkaz Věty 3.14, aplikovat i na původní generující množinu $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$, tj. vyjádříme si hledanou ortogonální projekci ve tvaru $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{k} x_j\, \mathbf{u}_j$ a uvědomíme si, že vektor $\mathbf{u}^\perp = \mathbf{v} - \mathbf{u}$ musí být kolmý na všechny generátory $\mathbf{u}_i$, tedy $g(\mathbf{u}_i, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = 0$ pro $i = 1, \ldots k$. Dosaďme a upravujme:

$$0 = g(\mathbf{u}_i, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = g(\mathbf{u}_i, \mathbf{v} - \sum_{i=j}^{k} x_j\, \mathbf{u}_j) = g(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) - \sum_{i=j}^{k} x_j g(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$$

Dostaneme tak obecně nehomogenní soustavu rovnic:

$$\sum_{j=1}^{k} g(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) x_j = g(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}).$$

Matici levých stran $(g(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j))$ se zpravidla říká Gramova matice (všimněme si, že se jedná právě o matici skalárního součinu $g$ umezeného na podprostor U vzhledem k bázi $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$).

Poznámka 3.15 nám říká, že existuje řešení dané soustavy rovnic (tj. existuje příslušná ortogonální projekce). Pokud je posloupnost $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ navíc lineárně nezávislá (tj. jde o bázi $U$) je řešení dané soustavy právě jedno. Hledanou projekcí je lineární kombinace $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{k} x_j\, \mathbf{u}_j$.

Vezměme si například podprostor $U = \langle (1, 2, 1, -1),\ (1, 1, 0, 1) \rangle$ reálného unitárního porostoru se standardním skalárním součinem $(\mathbf{R}^4, \omega)$. Hledejme ortogonální projekci vektoru $(-1, 1, 0, 4)$. K tomu potřebujeme nejprve určit souřadnice $x_1, x_2$ ortogonální projekce $\mathbf{u} = x_1 \cdot (1, 2, 1, -1) + x_2 \cdot (1, 1, 0, 1)$. Řešíme tedy nehomogenní soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Snadno zjistíme, že $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$, proto $P_U(\mathbf{v}) = \mathbf{u} = (1, 0, -1, 3)$. Pro kontrolu ještě ověřme, zda je vektor $\mathbf{v} - \mathbf{u} = (-2, 1, 1, 1)$ skutečně kolmý na podprostor $U$. Zřejmě $\omega((-2, 1, 1, 1), (1, 2, 1, -1)) = 0$ a $\omega((-2, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1)) = 0$.

**Poznámka 3.16.** *Nechť $(V, g)$ je unitární prostor a $U$ jeho podprostor konečné dimenze. Pak $P_U(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ pro každý vektor $\mathbf{u} \in U$.*

**Poznámka 3.17.** *Mějme $(V, g)$ unitární prostor a $U$ jeho podprostor konečné dimenze. Potom $\| \mathbf{v} - P_U(\mathbf{v}) \|_g < \| \mathbf{v} - \mathbf{u} \|_g$ pro každý vektor $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{u} \neq P_U(\mathbf{v})$.*

**Příklad** (Metoda nejmenších čtverců)**.** Buď $A\mathbf{x}^\mathsf{T} = \mathbf{y}^\mathsf{T}$ nehomogenní soustava $m$ rovnic o $n$ neznámých nad tělesem $T = \mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$ a označme $\mathbf{a}_i$ sloupce matice $A$ zapsané do řádků, tj. $A = (\mathbf{a}_1^\mathsf{T} | \mathbf{a}_2^\mathsf{T} | \dots | \mathbf{a}_n^\mathsf{T})$. Pokud soustava nemá řešení, potom $\mathbf{y} \notin \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$. Soustavu můžeme v takovém případě vyřešit pouze "přibližně", tj. musíme vzít nějaký nový vektor pravých stran $\mathbf{y}'$, který by už ležel v podprostoru $U = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$. Uvažujeme-li na prostoru $T^n$ standardní skalární součin $\omega$, je podle Poznámky 3.17 $P_U(\mathbf{y})$ nejbližší (ve smyslu vzdálenosti, kterou jsme pomocí normy zavedli v této kapitole) vektor k vektoru $\mathbf{y}$ ležící v podprostoru $U$. Řešení nové soustavy rovnic $A\mathbf{x}^\mathsf{T} = P_U(\mathbf{y})^\mathsf{T}$ nazveme přibližným řešením nalezené metodou nejmenších čtverců. Při samotném počítání postupujeme obdobně jako v předchozím příkladu.

Mějme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rrrr} x_1 & +2x_2 & & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 10 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 7 \\ & x_2 & -x_3 & = 3 \end{array}$$

Snadno nahlédneme, že nemá řešení. Budeme hledat přibližné řešením metodou nejmenších čtverců. Máme vektor pravých stran $\mathbf{y} = (1, 4, 6, 2, -1)$ a vektory levých stran $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, -2, 2, 1)$ a $\mathbf{a}_3 = (0, 2, 1, 2, -1)$. Hledáme $x_i$ tak, aby $P_{\langle \mathbf{a}_i \rangle}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{a}_i$. To vede stejně jako v případě ortogonální projekce k soustavě rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \omega(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & \omega(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) & \omega(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) & \omega(\mathbf{a}_1, \mathbf{y}) \\ \omega(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) & \omega(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) & \omega(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) & \omega(\mathbf{a}_2, \mathbf{y}) \\ \omega(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1) & \omega(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2) & \omega(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3) & \omega(\mathbf{a}_3, \mathbf{y}) \end{array}\right).$$

Dosadíme a hledáme řešení soustavy rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & 7 & 17 \\ 4 & 14 & 3 & -3 \\ 7 & 3 & 10 & 21 \end{array}\right).$$

Zbývá nám dopočítat, že $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ a $x_3 = 1$.

## 4. Vlastní čísla a vlastní vektory

Podobně jako nad reálnými nebo komplexními čísly budeme nad každým tělesem $T$ pokládat za polynom zobrazení $p : T \to T$, které libovolnému prvku $t \in T$ přiřadí hodnotu $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$, pro nějaké pevně zvolené skaláry $a_0, \dots, a_n \in T$. Kořenem polynomu budeme rozumět každé číslo $t_0 \in T$, pro které $p(t_0) = 0$. Všimněme si, že polynomy lze sčítat a násobit a výsledkem těchto operací je opět polynom.

**Definice.** Nechť $A$ je čtvercová matice stupně $n$ nad tělesem $T$ a $E$ je jednotková matice stupně $n$. *Vlastním číslem matice $A$* nazveme každé $\lambda \in T$, pro nějž bude matice $A - \lambda E$ singulární. Každé nenulové řešení $\mathbf{v}_\lambda \in T^n$ soustavy

rovnic s maticí $A - \lambda E$ potom budeme nazývat *vlastním vektorem* příslušným vlastnímu číslu $\lambda$. Množině $\sigma(A)$ všech vlastních čísel matice budeme říkat *spektrum* matice $A$. Konečně *charakteristickým polynomem* matice $A$ nazveme polynom $p(\lambda) = det(A - \lambda E)$.

**Poznámka 4.1.** *Buď $A$ čtvercová matice stupně $n$ nad tělesem $T$. Pak $\lambda$ je vlastní číslo matice $A$ a $\mathbf{v}_\lambda \in T^n$ jemu příslušný vlastní vektor právě tehdy, když $\mathbf{v}_\lambda \neq \mathbf{0}$ a $A\,\mathbf{v}_\lambda^\intercal = \lambda\,\mathbf{v}_\lambda^\intercal$.*

**Poznámka 4.2.** *Skalár $\lambda$ je vlastní číslo matice $A$ právě tehdy, když je $\lambda$ kořenem charakteristického polynomu matice $A$.*

**Příklad.** 1) Hledejme vlastní vektory a vlastní čísla reálné matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Nejprve určíme charakteristický polynom $det(A-\lambda E) = \lambda^2-5\lambda+4 = (\lambda-1)(\lambda-4)$, tedy vlastní čísla jsou 1 a 4. Dále spočítáme množinu všech řešení homogenních soustav rovnic:

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A - 4 \cdot E = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že všechny nenulové násobky vektoru $(-2, 1)$ jsou vlastními vektory příslušnými vlastnímu číslu 1 a všechny nenulové násobky vektoru $(1, 1)$ jsou vlastními vektory příslušnými vlastnímu číslu 4.

2) Reálná matice $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ nemá žádná reálná vlastní čísla, a tedy ani žádné vlastní vektory, neboť její charakteristický polynom je $\lambda^2 + 1$.

**Poznámka 4.3.** *Nechť $A$ a $P$ jsou čtvercové matice stupně $n$ nad tělesem $T$, $P$ je navíc regulární. Potom jsou charakteristické polynomy matic $A$ a $P^{-1}AP$ stejné, tudíž $\sigma(A) = \sigma(P^{-1}AP)$.*

**Definice.** Nechť $\varphi : V \to V$ je endomorfismus vektorového prostoru $V$ nad tělesem $T$. Řekneme, že $\lambda \in T$ je *vlastní číslo endomorfismu* $\varphi$, pokud existuje nenulový vektor $\mathbf{v}_\lambda \in V$, pro který $\varphi(\mathbf{v}_\lambda) = \lambda\,\mathbf{v}_\lambda$. Vektor $\mathbf{v}_\lambda$ potom nazveme *vlastním vektorem endomorfismu* $\varphi$ příslušným vlastnímu číslu $\lambda$. Množině $\sigma(\varphi)$ všech vlastních čísel endomorfismu $\varphi$ budeme říkat *spektrum* endomorfismu $\varphi$.

Endomorfismu vektorového prostoru se často říká lineární operátor na prostoru. Je-li $\varphi$ endomorfismus na prostoru konečné dimenze $V$ a $B$ báze $V$ označujme $[\varphi]_B$ matici $\varphi$ vzhledem k bázi $B$.

**Věta 4.4.** *Mějme $V$ konečně dimenzionální vektorový prostor, $\varphi$ nějaký endomorfismus na $V$ a $B$ libovolnou bázi $V$. Potom $\sigma(\varphi) = \sigma([\varphi]_B)$ a $\mathbf{v}$ je vlastní vektor endomorfismu $\varphi$ právě tehdy když $\{\mathbf{v}\}_B$ je vlastní vektor matice $[\varphi]_B$.*

*Důkaz.* Podle Poznámky 4.1 je $\lambda$ vlastní číslo matice $[\varphi]_B$ a $\{\mathbf{v}_\lambda\}_B$ je jemu příslušný vlastní vektor právě tehdy, když $[\varphi]_B\{\mathbf{v}_\lambda\}_B^\intercal = \lambda\{\mathbf{v}_\lambda\}_B^\intercal$. To ovšem nastává tehdy a jen tehdy, když $\varphi(\mathbf{v}_\lambda) = \lambda\,\mathbf{v}_\lambda$, protože $\{\varphi(\mathbf{v}_\lambda)\}_B^\intercal = [\varphi]_B\{\mathbf{v}_\lambda\}_B^\intercal$. Konečně $\mathbf{v}_\lambda \neq \mathbf{0}$, právě když $\{\mathbf{v}_\lambda\}_B \neq \mathbf{0}$. □

**Příklad.** Najdeme vlastní čísla a vlastní vektory endomorfismu $\varphi : \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5^2$ daného předpisem $\varphi((x, y)) = (y, x+4y)$. Podle Věty 4.4 nám stačí najít vlastní čísla a vlastní vektory matice $[\varphi]_{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ endomorfismu $\varphi$ vzhledem ke kanonické

bázi $K_2$. Tedy $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Našli jsme jedno vlastní číslo $\lambda = 2$ matice $[\varphi]_{K_2}$ i endomorfismu $\varphi$. Snadno nahlédneme, že vektory $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$ a $(4, 3)$ jsou právě všechny vlastní vektory matice $[\varphi]_{K_2}$. Podle Věty 4.4 jsou to zároveň souřadnice vlastního vektoru vzhledem ke kanonické bázi. Tudíž vektory $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(4, 3)$ jsou všechny vlastní vektory endomorfismu $\varphi$.

**Poznámka 4.5.** *Buď $\varphi$ endomorfismus na prostoru $V$ konečné dimenze a buď $B$ báze $V$. Matice $[\varphi]_B$ je diagonální právě tehdy, když jsou všechny vektory báze $B$ vlastními vektory endomorfismu $\varphi$.*

**Věta 4.6.** *Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou různá vlastní čísla endomorfismu $\varphi$ na prostoru $V$ a $\mathbf{v}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbf{v}_{\lambda_k}$ jsou po po řadě jim příslušné vlastní vektory. Potom je posloupnost vektorů $\mathbf{v}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbf{v}_{\lambda_k}$ lineárně nezávislá.*

*Důkaz.* Dokazujeme indukcí podle počtu vlastních čísel $i$.

Vlastní vektor $\mathbf{v}_{\lambda_1}$ je podle definice nenulový, to znamená, že jednočlená posloupnost obsahující pouze $\mathbf{v}_{\lambda_1}$ je lineárně nezávislá.

Předpokládejme, že $\mathbf{v}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbf{v}_{\lambda_{i-1}}$ je lineárně nezávislá posloupnost, a položme $\sum_{j=1}^{i} a_j \mathbf{v}_{\lambda_j} = \mathbf{0}$. Potom $\mathbf{0} = \varphi(\sum_{j=1}^{i} a_j \mathbf{v}_{\lambda_j}) = \sum_{j=1}^{i} a_j \varphi(\mathbf{v}_{\lambda_j}) = \sum_{j=1}^{i} a_j \lambda_j \mathbf{v}_{\lambda_j}$. Dále $\mathbf{0} = \lambda_i \sum_{j=1}^{i} a_j \mathbf{v}_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{i} a_j \lambda_i \mathbf{v}_{\lambda_j}$, proto

$$\mathbf{0} = (\sum_{j=1}^{i} a_j \lambda_i \mathbf{v}_{\lambda_j}) - (\sum_{j=1}^{i} a_j \lambda_j \mathbf{v}_{\lambda_j}) = \sum_{j=1}^{i} a_j (\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{v}_{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{i-1} a_j (\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{v}_{\lambda_j} .$$

Z indukčního předpokladu plyne, že $a_j(\lambda_i - \lambda_j) = 0$, a dále $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro všechna $j = 1, \ldots, i-1$. Proto $a_j = 0$ pro všechna $j = 1, \ldots, i-1$. Protože $\mathbf{v}_{\lambda_i} \neq \mathbf{0}$ a $a_i \mathbf{v}_{\lambda_i} = \sum_{j=1}^{i} a_j \mathbf{v}_{\lambda_j} = 0$, dostáváme, že $a_i = 0$. Tudíž posloupnost vektorů $\mathbf{v}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbf{v}_{\lambda_i}$ je podle definice lineárně nezávislá. □

**Definice.** Řekneme, že dvě čtvercové matice $A$ a $B$ stupně $n$ nad tělesem $T$ jsou *podobné* (značíme $A \sim B$), existuje-li regulární matice $P$ stupně $n$ nad tělesem $T$, pro kterou $A = P^{-1}BP$.

**Poznámka 4.7.** *Jestliže $A \sim B$, pak $\sigma(A) = \sigma(B)$.*

**Poznámka 4.8.** *Relace podobnosti je ekvivalencí na množině všech čtvercových matice stupně $n$ nad tělesem $T$.*

**Poznámka 4.9.** *Nechť $\varphi$ je endomorfismus na prostoru $V$ konečné dimenze $n$, $A$ je čtvercová matice stupně $n$ a $B$ je báze $V$. Pak matice $[\varphi]_B$ a $A$ jsou podobné právě tehdy, když existuje báze $C$ prostoru $V$ tak, že $[\varphi]_C = A$.*

**Definice.** Řekneme, že endomorfismu $\varphi$ na prostoru $V$ konečné dimenze je *diagonalizovatelný*, pokud existuje báze $B$, vůči níž je matice $[\varphi]_B$ diagonální. Řekneme, že čtvercové matice $A$ je *diagonalizovatelná*, pokud je $A$ podobná nějaké diagonální matici.

**Poznámka 4.10.** *Buď $V$ konečně dimenzionální prostor, $B$ nějaká jeho báze a $\varphi$ endomorfismus na $V$. Pak $\varphi$ je diagonalizovatelný právě tehdy, když je matice $[\varphi]_B$ diagonalizovatelná.*

**Věta 4.11.** *Nechť $V$ je konečně dimenzionální prostor a $\varphi$ endomorfismus na $V$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) *$\varphi$ je diagonalizovatelný,*
(2) *existuje báze $V$ složená z vlastních vektorů endomorfismu $\varphi$,*
(3) $V = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(\varphi)} \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\cdot \mathrm{Id})$.

*Důkaz.* (1) $\Leftrightarrow$ (2) Ekvivalence je obsahem Poznámky 4.5.

(2) $\Rightarrow$ (3) Označme $V_\lambda = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\cdot \mathrm{Id})$. Každý vektor báze prostoru $V$ složené z vlastních vektorů přitom leží v podprostoru $V_\lambda$ pro nějaké vlastní číslo $\lambda \in \sigma(\varphi)$, a proto $V = \sum_{\lambda\in\sigma(\varphi)} V_\lambda$. Nechť $\mathbf{u}_i \in V_{\lambda_i}$, kde $i = 1,\dots,k$ a $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$. Pokud $\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$, potom $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ pro všechna $i = 1,\dots,k$ podle Věty 4.6, a proto $V = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(\varphi)} V_\lambda$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Zvolme bázi $B_\lambda$ podprostoru $\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda\cdot\mathrm{Id})$ pro každé $\lambda \in \sigma(\varphi)$. Zřejmě jsou všechny vektory z bází $B_\lambda$ nenulové, a proto vlastní. Dále $B = \bigcup_{\lambda\in\sigma(\varphi)} B_\lambda$ je lineárně nezávislou generující množinou, tedy bází prostoru $V$. □

**Poznámka 4.12.** *Nechť $A$ je čtvercová matice stupně $n$ nad tělesem $T$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(1) *$A$ je diagonalizovatelná,*
(2) *existuje báze $T^n$ složená z vlastních vektorů matice $A$,*
(3) $T^n = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} \{\mathbf{x} \in T^n |\ (A - \lambda E)\mathbf{x}^\intercal = \mathbf{0}^\intercal\}$.

**Poznámka 4.13.** *Nechť $A$ je čtvercová matice stupně $n$ a $\varphi$ je endomorfismus na prostoru dimenze $n$.*

a) *Má-li $\varphi$ $n$ různých vlastních čísel, je diagonalizovatelný.*
b) *Má-li $A$ $n$ různých vlastních čísel, je diagonalizovatelná.*

**Příklad.** 1) Reálná matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ má dvě různá vlastní čísla, tedy je podle Poznámky 4.13 diagonalizovatelná. Budeme-li matici $A$ interpretovat jako matici $[\varphi]_{K_2}$ endomorfismu $\varphi$ například vzhledem ke kanonické bázi $K_2$, pak $[\varphi]_B = [\mathrm{Id}]_{K_2B}[\varphi]_{K_2}[\mathrm{Id}]_{BK_2} = [\mathrm{Id}]^{-1}_{BK_2}[\varphi]_{K_2}[\mathrm{Id}]_{BK_2}$, kde $B$ je báze sestávající z vlastních vektorů matice $A$. To znamená, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) O endomorfismu $\varphi$ na $\mathbb{Z}_5^2$ daném předpisem $\varphi((x,y)) = (y, x+4y)$ jsme zjistili, že má "málo"vlastních vektorů, tedy neexistuje báze $\mathbb{Z}_5^2$ složená z vlastních vektorů endomorfismu $\varphi$, a proto $\varphi$ není podle Věty 4.11 diagonalizovatelný.

3) Reálná trojúhelníková matice $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ má zřejmě charakteristický polynom $(2-\lambda)^2(1-\lambda)$, a tudíž $\sigma(M) = \{1, 2\}$. Hledáme-li množinu všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $M-1E$, tj. vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1, vidíme, že existuje jen jeden lineárně nezávislý takový vlastní vektor, protože dimenze podprostoru všech řešení je $3 - h(M - 1E) = 3 - 2 = 1$. Podprostor všech řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $M - 2E$ je ovšem dvoudimenzionální, protože hodnost matice $M - 2E$ je $h(M - 2E) = 1$. Tedy pro vlastní číslo 2 dostáváme dva lineárně nezávislé vlastní vektory. Podle Věty 4.6 (nebo přímo Poznámky 4.12) máme tříprvkou lineárně nezávislou množinu vlastních vektorů v třídimenzionálním prostoru, tedy jde o bázi a matice $M$ je diagonalizovatelná.

4) Reálná trojúhelníková matice $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ má stejný charakteristický polynom $(2-\lambda)^2(1-\lambda)$ jako matice $M$, a proto i $\sigma(N) = \{1, 2\}$. Zřejmě $h(N-1E) = h(N-2E) = 2$, tedy podprostory $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 |\ (N-\lambda E)\mathbf{x}^\mathsf{T} = \mathbf{0}^\mathsf{T}\}$ pro $\lambda = 1, 2$ jsou jen jednodimenzionální. Tudíž neexistuje báze prostoru $\mathbf{R}^3$ složená z vlastních vektorů matice $A$ a matice $N$ není diagonalizovatelná.

**Definice.** Řekneme, že reálná nebo komplexní čtvercová matice $U$ je *unitární*, pokud $\overline{U}^\mathsf{T} U = E$.

Reálná unitární matice se často nazývá ortogonální maticí.

**Poznámka 4.14.** *Je-li $U$ unitární matice, pak $U$ je regulární, $U^{-1} = \overline{U}^\mathsf{T}$ a $\overline{U}^\mathsf{T}$ je také unitární.*

**Poznámka 4.15.** *Součin dvou unitárních matic stejného stupně je opět unitární matice.*

**Poznámka 4.16.** *Matice stupně $n$ nad tělesem $T = \mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$ je unitární právě tehdy, když obsahuje ve sloupcích (v řádcích) ortonormální bázi unitárního prostoru $(T^n, \omega)$.*

**Poznámka 4.17.** *Buď $B$ ortonormální báze unitárního prostoru $(V, g)$ a $C$ je nějaká báze $V$. Pak je $C$ ortonormální, právě když je matice přechodu $[\mathrm{Id}]_{CB}$ unitární.*

**Definice.** Nechť $A$ je čtvercová matice nad tělesem $T = \mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$. Řekneme, že $A$ je *unitárně diagonalizovatelná*, pokud existuje unitární matice $U$ nad $T$ tak, že $\overline{U}^\mathsf{T} AU$ je diagonální. Řekneme, že $A$ je *normální*, pokud $A\overline{A}^\mathsf{T} = \overline{A}^\mathsf{T} A$. Endomorfismu $\varphi$ na unitárním prostoru $(V, g)$ nazveme *unitárně diagonalizovatelným*, pokud existuje ortonormální báze $B$ prostoru $(V, g)$ složená z vlastních vektorů endomorfismu $\varphi$.

**Příklad.** 1) Každá diagonální matice je normální.

2) Reálná symetrická matice je normální.

3) Komplexní matice splňující podmínku $A = \overline{A}^\mathsf{T}$ je normální, neboť v takovém případě $A\overline{A}^\mathsf{T} = AA = \overline{A}^\mathsf{T} A$.

4) Unitární matice je normální.

**Poznámka 4.18.** *Buď $\varphi$ endomorfismus na konečně dimenzionálním unitárním prostoru $(V, g)$ a buď $B$ ortonormální báze $(V, g)$. Pak je ekvivalntní:*

(1) *$\varphi$ je unitárně diagonalizovatelný,*
(2) *existuje ortonormální báze $C$ prostoru $(V, g)$ tak, že $[\varphi]_C$ je diagonální matice,*
(3) *matice $[\varphi]_B$ je unitárně diagonalizovatelná.*

**Poznámka 4.19.** *Nechť $A$ je čtvercová matice stupně $n$ nad tělesem $T = \mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$. Pak je $A$ unitárně diagonalizovatelná, právě když existuje ortonormální báze unitárního prostoru $(T^n, \omega)$ sestávající z vlastních vektorů matice $A$.*

**Věta** (Základní věta algebry)**.** *Každý komplexní polynom stupně alespoň jedna má komplexní kořen.*

**Poznámka 4.20.** *Každá komplexní čtvercová matice a každý endomorfismus na komplexním prostoru nenulové konečné dimenze mají nějaké vlastní číslo.*

**Věta 4.21.** *Čtvercová komplexní matice $A$ je unitárně diagonalizovatelná, právě když je normální. Navíc, pokud všechna vlastní čísla normální matice $A$ i všechny hodnoty $A$ jsou reálné, potom $A$ je reálná unitárně diagonalizovatelná matice.*

*Důkaz.* ($\Rightarrow$) Je-li $A$ unitárně diagonalizovatelná, existuje unitární matice $U$ tak, že $D = \overline{U}^{\mathsf{T}} A U$ je diagonální. Poznamenejme, že $\overline{D}^{\mathsf{T}} D = D\overline{D}^{\mathsf{T}}$ a $A = U D \overline{U}^{\mathsf{T}}$. Tudíž

$$\begin{aligned} A\overline{A}^{\mathsf{T}} &= U D \overline{U}^{\mathsf{T}} \overline{U D \overline{U}^{\mathsf{T}}}^{\mathsf{T}} = U D \overline{U}^{\mathsf{T}} U \overline{D}^{\mathsf{T}} \overline{U}^{\mathsf{T}} = U D \overline{D}^{\mathsf{T}} \overline{U}^{\mathsf{T}} \\ &= U \overline{D}^{\mathsf{T}} D \overline{U}^{\mathsf{T}} = \overline{U D \overline{U}^{\mathsf{T}}}^{\mathsf{T}} U D \overline{U}^{\mathsf{T}} = \overline{A}^{\mathsf{T}} A. \end{aligned}$$

Tím jsme ověřili, že $A$ je normální matice.

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že je matice $A$ normální. Nejprve ukážeme, že pokud $A\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} = \lambda\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}}$ pro nějaké vlastní číslo $\lambda$ a vlastní vektor $\mathbf{v}$ matice $A$, pak $\overline{A}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} = \overline{\lambda}\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}}$. K tomu použijeme vlastností standardního skalárního součinu a jednoduché pozorování, že $A\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} - \lambda\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} = \mathbf{0}^{\mathsf{T}}$ právě tehdy, když $\mathbf{v}\,A^{\mathsf{T}} - \lambda\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} &0 = \omega(\mathbf{v}\,A^{\mathsf{T}} - \lambda\,\mathbf{v}, \mathbf{v}\,A^{\mathsf{T}} - \lambda\,\mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}\,A^{\mathsf{T}} - \lambda\,\mathbf{v})}(A\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} - \lambda\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}}) \\ &= \overline{\mathbf{v}}\overline{A}^{\mathsf{T}} A\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} - \lambda\overline{\mathbf{v}}\overline{A}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} - \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}} A\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} + \overline{\lambda}\lambda\overline{\mathbf{v}}\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} = \\ &= \overline{\mathbf{v}} A\overline{A}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} - \lambda\overline{\mathbf{v}}\overline{A}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} - \overline{\lambda}\overline{\mathbf{v}} A\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} + \overline{\lambda}\lambda\overline{\mathbf{v}}\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} = \omega(\mathbf{v}\,\overline{A} - \overline{\lambda}\,\mathbf{v}, \mathbf{v}\,\overline{A} - \overline{\lambda}\,\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Podle definice skalárního součinu je $\mathbf{v}\,\overline{A} - \overline{\lambda}\,\mathbf{v} = \mathbf{0}$, a proto je i vektor $\overline{A}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}} - \overline{\lambda}\,\mathbf{v}^{\mathsf{T}}$ nulový a $\overline{\lambda}$ je vlastní číslo matice $\overline{A}^{\mathsf{T}}$.

Buď $n$ stupeň matice $A$. Budeme postupně hledat ortonormální bázi unitárního prostoru $(\mathbf{C}^n, \omega)$ složenou z vlastních vektorů matice $A$. Podle Poznámky 4.20 existuje nějaké vlastní číslo $\lambda_1$ matice $A$ a jemu příslušný vlastní vektor $\mathbf{v}_1$, můžeme předpokládat, že $\|\,\mathbf{v}_1\,\|_\omega = 1$. Už víme, že $\overline{A}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{v}_1^{\mathsf{T}} = \overline{\lambda_1}\,\mathbf{v}_1^{\mathsf{T}}$. Položme $U_1 = \langle \mathbf{v}_1 \rangle^\perp$. Ukážeme, že $(A\,\mathbf{u}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = \mathbf{u}\,A^{\mathsf{T}} \in U_1$ pro každý vektor $\mathbf{u} \in U_1$. Stačí nám ověřit, že $\omega(\mathbf{u}\,A^{\mathsf{T}}, \mathbf{v}_1) = 0$, k čemuž využijeme první krok důkazu této implikace:

$$\omega(\mathbf{u}\,A^{\mathsf{T}}, \mathbf{v}_1) = \overline{\mathbf{u}\,A^{\mathsf{T}}}\,\mathbf{v}_1^{\mathsf{T}} = \overline{\mathbf{u}}\overline{A}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{v}_1^{\mathsf{T}} = \overline{\lambda_1}\overline{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}_1^{\mathsf{T}} = \overline{\lambda_1}\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) = 0,$$

Zobrazení $\varphi_1 : U_1 \to U_1$, které každému $\mathbf{u} \in U$ přiřadí vektor $\varphi_1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\,A^{\mathsf{T}}$ je zřejmě endomorfismem. Pokud $U_1$ není nulový prostor, pak podle Poznámky 4.20 existuje vlastní číslo $\lambda_2$ endomorfismu $\varphi_1$ a příslušný vlastní vektor $\mathbf{v}_2 \in U_1$, který opět můžeme zvolit normovaný. Tedy $\varphi_1(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2\,A^{\mathsf{T}} = \lambda_2\,\mathbf{v}_2$, dále víme, že $\mathbf{v}_2\,\overline{A} = \overline{\lambda_2}\,\mathbf{v}_2$, protože $\lambda_2$ je rovněž vlastní číslo matice $A$, a vektory $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ jsou ortonormální. Vezmeme nyní podprostor $U_2 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$. Stejným způsobem jako v prvním kroku (tentokrát ovšem pro dva vektory) můžeme dokázat, že $\mathbf{u}\,A^{\mathsf{T}} \in U_2$ pro každé $\mathbf{u} \in U_2$ a pak definujeme endomorfismus $\varphi_2 : U_2 \to U_2$ opět předpisem $\varphi_2(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\,A^{\mathsf{T}}$. Takto budeme pokračovat, dokud $U_i$ nebude nulový podprostor, což nastane právě v okamžiku, kdy $i = n$. Zkonstruujeme tak ortonormální posloupnost vlastních vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ matice $A$, která tvoří bázi $\mathbf{C}^n$, proto je podle Poznámky 4.19 matice $A$ unitárně diagonalizovatelná.

Pokud byly reálné všechny hodnoty matice $A$ i všechna vlastní čísla $\lambda_i$, mohli jsme $A$ chápat jako matici endomorfismus na reálném unitárním prostoru $(\mathbf{R}^n, \omega)$ vzhledem ke kanonické bázi, resp. $\varphi_i$ jako endomorfismy na reálných vektorových prostorech $U_i$. Tedy jsme všechny vlastní vektory $\mathbf{v}_i$ mohli brát reálné. Proto opět pomocí Poznámky 4.19 zjišťujeme, že $A$ je reálnou unitárně diagonalizovatelnou

maticí, tj. existuje taková reálná unitární matice $U$, že $\overline{U}^{\mathsf{T}}AU = U^{\mathsf{T}}AU$ je diagonální reálnou maticí. □

**Poznámka 4.22.** *Nechť $A$ je normální komplexní čtvercová matice a* **u**, **v** *dva vlastní vektory $A$ příslušné různým vlastním číslům. Potom* **u** *a* **v** *jsou ortogonální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu.*

**Příklad.** O komplexní matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -1 \\ 1+i & 2 & -1-i \\ -1 & -1+i & 1 \end{pmatrix}$ už víme, že je normální, neboť $\overline{A}^{\mathsf{T}} = A$. Tudíž je podle Věty 4.21 unitárně diagonalizovatelná. Chceme-li najít ortonormální bázi $\mathbf{C}^3$ složenou z vlastních vektorů, stačí nám najít ortonormální báze podprostorů řešení homogení soustavy rovnic s maticí $A - \lambda E$ pro jednotlivá vlastní čísla $\lambda$, proto podle Poznámky 4.22 musí být jednotlivé podprostory vlastních vektorů vzájemně kolmé.

Charakteristický polynom matice $A$ je $-\lambda^3 + 4\lambda^2$, proto $\sigma(A) = \{0, 4\}$. Snadno najdeme ortonormální bázi množiny všech řešení soustavy s maticí

$$A - 4 \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -1 \\ 1+i & 2 & -1-i \\ -1 & -1+i & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1-i & -1 \\ 1+i & -2 & -1-i \\ -1 & -1+i & -3 \end{pmatrix}.$$

Podprostor všech řešení je jednodimenzionální, jeho bázi tvoří například vektor $(1, 1+i, -1)$. Protože $\|(1, 1+i, -1)\|_\omega = 2$, je vektor $\frac{1}{2}(1, 1+i, -1)$ hledaným normalizovaným vektorem. Dále snadno zjistíme, že například vektory $(-1+i, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ tvoří bázi dvoudimenzionálního podprostoru všech řešení soustavy s maticí $A$. Zbývá tyto vektory ortogonalizovat a normalizovat. To můžeme provést například Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací, tak dostaneme ortonormální bázi $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}(-1+i, 2, 1-i)$. Zjistili jsme, že $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1-i}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -1 \\ 1+i & 2 & -1-i \\ -1 & -1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1+i}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} + \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

## 5. Rozklady matic

Rozkladem matice $A$ budeme rozumět posloupnost (zpravidla dvou nebo tří) matic $R_1, \ldots, R_i$ takových, že platí $A = R_1 \ldots R_i$. Zajímavé (nejen) pro nás budou ty rozklady, které nám usnadní počítání s danou maticí, ať už matici interpretujeme jako matici nějaké soustavy lineárních rovnic, matici homomorfismu vzhledem k nějakým bázím, matici skalárního součinu či jinak.

Tak například víme, že každou matici $A$ typu $(n, m)$ můžeme elementárními transformacemi na řádky a sloupce převést na matici $D = (d_{ij})$, která má mimo hlavní diagonálu všechny hodnoty nulové, tedy $d_{ij} = 0$ pro všechna $i \neq j$. V maticovém zápisu to znamená, že $D = PAQ$ pro vhodné regulární matice $P$ stupně $n$ a $Q$ stupně $m$. Je-li $A = [h]_{B_V B_W}$ matice homomorfismu $h : V \to W$ a $B_V$ a $B_W$ báze prostorů $V$ a $W$, potom existují báze $C_V$ a $C_W$ prostorů $V$ a $W$, tak, že $P = [\mathrm{Id}]_{B_W C_W}$, $Q = [\mathrm{Id}]_{C_V B_V}$ a $D = [h]_{C_V C_W}$ (připomeňte si, jak báze $C_V$ a $C_W$ najít), tj. $[h]_{C_V C_W} = [\mathrm{Id}]_{B_W C_W} [h]_{B_V B_W} [\mathrm{Id}]_{C_V B_V}$. To znamená, že budeme-li

pracovat s homomorfismem $h$ v souřadnicích vzhledem k bázím $C_V$ a $C_W$, bude počítání (s maticí homomorfismu $h$) mnohem jednodušší.

### LU rozklad

**Definice.** Řekneme, že matice $A_U = (a_{ij})$ je *typu U*, pokud je to čtvercová horní trojúhelníková matice (tj. $a_{ij} = 0$ pro všechna $i > j$), matice $A_L = (a_{ij})$ je *typu L*, pokud je to čtvercová dolní trojúhelníková matice (tj. $a_{ij} = 0$ pro všechna $i < j$) a navíc má na diagonále jedničky (tj. $a_{ii} = 1$ pro všechna $i$). *LU rozkladem* libovolné čtvercové matice $A$ rozumíme rozklad $A = LU$, kde $L$ je matice typu L a $U$ je matice typu U.

**Poznámka 5.1.** *Nechť $L_1$ a $L_2$ jsou dvě matice stejného stupně typu L a $U_1$ a $U_2$ jsou dvě matice stejného stupně typu U. Pak součin $L_1L_2$ je opět maticí typu L a součin $U_1U_2$ je maticí typu U. Navíc jsou-li $L_1$ a $U_1$ regulární, potom $L_1^{-1}$ je typu L a $U_1^{-1}$ je typu U.*

**Poznámka 5.2.** *Pokud existuje LU rozklad regulární matice, pak je určen jednoznačně.*

**Příklad.** Zjistíme, zda existuje LU rozklad reálné matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.
K tomu účelu zkusíme $A$ gaussovsky upravovat a příslušné úpravy budeme zaznamenávat do (případné) matice $L$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} = U.$$

Při upravování jsme nepotřebovali přehazovat řádky (ani násobit řádek nenulovým skalárem), tedy dostali jsme $L_k \dots L_1 A = U$, kde $L_i$ jsou všechno elementární transformační matice odpovídající přičtení výše položeného řádku k řádku níže položenému. Matice $L_i$ jsou zřejmě typu L a podle Poznámky 5.1 je součin $L = L_1^{-1} \dots L_k^{-1}$ rovněž typu $L$, navíc $A = LU$. Tudíž jsme našli LU rozklad matice $A$. Všimněme si, že součin matic $L_1^{-1} \dots L_k^{-1}$ obsahuje na příslušných pozicích hodnoty jednotlivých transformačních matic (tj. $i$-tý řádek a $j$-tý sloupec, $i > j$, obsahuje hodotu $c_{ij}$, právě když jsme během Gaussovy eliminace odečítali od $i$-tého řádku matice $A$ a $c_{ij}$-násobek jejího $j$-tého řádku):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = L.$$

Našli jsme tedy (jednoznačně určený) LU rozklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

**Definice.** *Permutační maticí* budeme rozumět čtvercovou matici $P$, která v každém řádku a každém sloupci obsahuje právě jednu hodnotu 1 a jinak samé 0.

**Poznámka 5.3.** *Nechť $P$ a $Q$ jsou dvě permutační matice stupně $n$.*

a) *Každou permutační matici dostaneme z jednotkové matice vhodným přeházením řádků (sloupců).*
b) *Součin $PQ$ je permutační matice.*
c) $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ *je permutační matice.*

**Věta 5.4.** *Pro každou čtvercovou matici $A$ existuje permutační matice $P$ tak, že matice $PA$ má $LU$ rozklad.*

*Důkaz.* Tvrzení dokážeme indukcí pomocí Gaussova algoritmu. Vše je triviální pro matice stupně 1.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro každou čtvercovou matici stupně $n-1$ a mějme čtvercovou matici $A_n = (a_{ij})$ stupně $n$. Budeme gaussovsky upravovat její první sloupec. Je-li celý nulový, pak jsme hotovi, jinak vezmeme nejmenší $i \leq n$ tak, že $a_{i1} \neq 0$, přehodíme $i$-tý řádek s prvním řádkem a vynulujeme ostatní pozice prvního sloupce takto upravené matice $A_n$. Vyjádříme to pomocí maticového zápisu:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^{\mathrm{T}} & E \end{pmatrix} T_{1i} A_n = \begin{pmatrix} a_{i1} & \mathbf{a}_{n-1} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & A_{n-1} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ je vhodný sloupcový vektor o $n-1$ souřadnicích, $T_{1i}$ elementární transformační matice (tj. permutační matice), která odpovídá přehození prvního a $i$-tého řádku, $\mathbf{a}_{n-1} = (a_{i2}, a_{i3}, \dots a_{in})$ a $A_{n-1}$ je čtvercová matice stupně $n-1$. Nyní využijeme pro matici $A_{n-1}$ indukční předpoklad, který říká, že existuje permutační matice $P_{n-1}$, matice $L_{n-1}$ typu L a matice $U_{n-1}$ typu U (všechny stupně $n-1$) tak, že $P_{n-1}A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$. To ovšem znamená, že

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & P_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^{\mathrm{T}} & E \end{pmatrix} T_{1i} A_n = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & P_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & \mathbf{a}_{n-1} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & A_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{i1} & \mathbf{a}_{n-1} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & P_{n-1}A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & L_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & \mathbf{a}_{n-1} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & U_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dále si uvědomme, že

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & P_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}^{\mathrm{T}} & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ P_{n-1}\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & P_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Nyní už stačí jen položit $P_n = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & P_{n-1} \end{pmatrix} T_{1i}$, $\quad U_n = \begin{pmatrix} a_{i1} & \mathbf{a}_{n-1} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & U_{n-1} \end{pmatrix}$ a

$$L_n = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ P_{n-1}\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}} & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & L_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -P_{n-1}\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}} & L_{n-1} \end{pmatrix},$$

abychom dostali rovnost $P_nA_n = L_nU_n$. Konečně podle Poznámky 5.1 je matice $L_n$ typu L a podle Poznámky 5.3 b) je matice $P_n$ permutační, tedy jsme opravdu našli LU rozklad matice $P_nA_n$. □

**Příklad.** Pro reálnou matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ najdeme permutační matici $P$ tak, aby matice $PA$ měla LU rozklad. Stejně jako v důkazu Věty 5.4 budeme matici postupně Gausovsky upravovat, používat budeme pouze přehazování řádků

a přičítání násobku výše položeného k níže položenému řádku. Oba typy úprav budeme zaznamenávat (pravý sloupec jen čísluje řádky):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

Tedy permutační matice, kterou potřebujeme změnit původní matici $A$, odpovídá permutaci řádků zachycené v pravém sloupci, čili $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Původním transformacím typu přičtení výše položeného řádku k níže položenému odpovídala matice $L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, my ale musíme adekvátně matici $P$ (tak jak jsme to udělali i v průběhu důkazu Věty 5.4) změnit polohu upravovaných řádků, takže $L = PL'$ a dostáváme LU rozklad matice $PA$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Příklad.** Máme-li LU rozklad matice $A = LU$ a uvažujeme-li nehomogenní soustavu rovnic $A\mathbf{x}^{\mathsf{T}} = \mathbf{y}^{\mathsf{T}}$, potom můžeme úlohu rozdělit na dva jednodušší úkoly, najít nejprve řešení soustavy $L\mathbf{z}^{\mathsf{T}} = \mathbf{y}^{\mathsf{T}}$ a poté soustavy $U\mathbf{x}^{\mathsf{T}} = \mathbf{z}^{\mathsf{T}}$. V obou případech počítáme s trojúhelníkovými maticemi, takže při výpočtu už jen dosazujeme, aniž musíme matice jakkoli dále gausovsky upravovat.

Počítejme s LU rozkladem reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

pro vektor pravých stran $\mathbf{y} = (-3, 2, -1)$. Potom pro $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ spočítáme $z_1 = y_1 = -3$, dále $-1z_1 + z_2 = 3 + z_2 = y_2 = 2$, tedy $z_2 = -1$ a konečně $z_3 = -1 - 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) = 4$. Nyní počítáme soustavu $U\mathbf{x}^{\mathsf{T}} = \mathbf{z}^{\mathsf{T}}$: $2x_3 = z_3$, tedy $x_3 = 2$, dále $x_2 = \frac{-1-1\cdot 2}{3} = -1$ a $x_1 = \frac{-3-1\cdot(-1)+2\cdot 2}{2} = 1$.

### QR rozklad

**Definice.** Řekneme, že matice $A_Q = (a_{ij})$ je *typu Q*, pokud je reálná nebo komplexní a platí, že součin $\overline{A_Q}^{\mathsf{T}} A_Q$ je jednotková matice. *QR-rozkladem* matice $A$ nad reálným nebo komplexním tělesem $T$ rozumíme rozklad $A = QR$, kde $Q$ je matice typu Q a $R$ je regulární horní trojúhelníková matice s kladnými reálnými hodnotami na diagonále, obě matice nad tělesem $T$.

**Poznámka 5.5.** *Matice nad tělesem $T = \mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$ je typu Q, právě když obsahuje ve sloupečcích posloupnost ortonormálních vektorů vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu $\omega$.*

**Poznámka 5.6.** *Nechť $A = QR$ je QR rozklad matice A, kde $A = (\mathbf{a}_1^\mathsf{T}|\dots|\mathbf{a}_m^\mathsf{T})$ a $Q = (\mathbf{q}_1^\mathsf{T}|\dots|\mathbf{q}_m^\mathsf{T})$. Potom $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i\rangle = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i\rangle$ pro všechna $i = 1, \dots, m$.*

**Poznámka 5.7.** *Pokud existuje QR rozklad matice $A = QR$ typu $(n, m)$, pak Q je typu $(n, m)$ a hodnost matice A i Q je rovna m a QR rozklad je určen jednoznačně.*

**Věta 5.8.** *Nechť T je reálné nebo komplexní těleso, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ je posloupnost lineárně nezávislých vektorů prostoru $T^n$ a $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m$ je posloupnost ortonormálních vektorů unitárního prostoru $(T^n, \omega)$, kterou z ní vytvoříme Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací. Položme $A = (\mathbf{a}_1^\mathsf{T}|\dots|\mathbf{a}_m^\mathsf{T})$, $Q = (\mathbf{q}_1^\mathsf{T}|\dots|\mathbf{q}_m^\mathsf{T})$ a $R = (r_{ij})$, kde $r_{ij} = \omega(\mathbf{q}_i, \mathbf{a}_j)$. Potom $A = QR$ je QR rozklad matice A.*

*Důkaz.* Podle Poznámky 3.9 je $\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^m \omega(\mathbf{q}_i, \mathbf{a}_j)$, proto platí, že $A = QR$. Jelikož $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i\rangle = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i\rangle$, jsou $j+1$-ní až $m$-tá souřadnice vektoru $\mathbf{a}_j$ vzhledem k bázi $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i$ nulové, tedy $r_{ij} = 0$, pokud $i > j$. To znamená, že matice $R$ je horní trojúhelníková. Připomeňme, že během Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace dostáváme $\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{q}_i'}{\|\mathbf{q}_i'\|_\omega}$, kde $\mathbf{q}_i' = \mathbf{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1} r_{ji}\mathbf{a}_j$. Proto $\mathbf{a}_i = \|\mathbf{q}_i'\|_\omega \mathbf{q}_i + \sum_{j=1}^{i-1} r_{ji}\mathbf{a}_j$, a tudíž $r_{ii} = \omega(\mathbf{q}_i, \mathbf{a}_i) = \|\mathbf{q}_i'\|_\omega > 0$. Konečně podle Poznámky 5.5 je $Q$ matice typu Q. □

**Poznámka 5.9.** *Pro reálnou nebo komplexní matici A existuje QR rozklad právě tehdy když se její hodnost rovná počtu jejích sloupců.*

**Příklad.** Budeme hledat QR rozklad reálné matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Podle Věty 5.8 stačí klasickou Gramovou-Schmidtovou ortogonalizací upravovat lineárně nezávislou posloupnost vektorů $(1,1,1,1)$, $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,2)$ unitárního prostoru $(\mathbf{R}^4, \omega)$ a mezivýsledky sepsat do matic $Q$ a $R$. Všimněme si, že $r_{ii} = \omega(\mathbf{q}_i, \mathbf{a}_i) = \|\mathbf{q}_i'\|_\omega$.

1. $\mathbf{q}_1 = \frac{(1,1,1,1)}{\|(1,1,1,1)\|_\omega} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ a $r_{11} = \|(1,1,1,1)\|_\omega = 2$.
2. $\mathbf{q}_2' = (1,0,1,0) - \omega(\frac{1}{2}(1,1,1,1), (1,0,1,0)) \cdot \frac{1}{2}(1,1,1,1) = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$. Proto $r_{12} = \omega(\frac{1}{2}(1,1,1,1), (1,0,1,0)) = 1$, $r_{22} = \|\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)\|_\omega = 1$ a $\mathbf{q}_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
3. Konečně $r_{13} = \omega(\mathbf{q}_1, (0,1,0,2)) = \frac{3}{2}$, $r_{23} = \omega(\mathbf{q}_2, (0,1,0,2)) = -\frac{3}{2}$, proto $\mathbf{q}_3' = (0,1,0,2) - \frac{3}{2} \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \frac{3}{2} \cdot (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$. Tedy $r_{33} = \|(0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})\|_\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $\mathbf{q}_3 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Dostáváme QR rozklad $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

**URV rozklad**

**Věta 5.10.** *Nechť $T$ je těleso reálných nebo komplexních čísel a $A$ je matice typu $(n,m)$ hodnosti $k$ nad tělesem $T$. Potom nad $T$ existují unitární matice $U$ stupně $n$ a $V$ stupně $m$ a reguární matice $D$ stupně $k$ tak, že*

$$A = U \begin{pmatrix} D & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \overline{V}^{\mathsf{T}},$$

*kde $\mathbf{0}_1$ je nulová matice typu $(k, m-k)$, $\mathbf{0}_2$ je nulová matice typu $(n-k, k)$ a $\mathbf{0}_3$ je nulová matice typu $(n-k, m-k)$.*

*Důkaz.* Označme $\mathcal{R}(\overline{A})$ podprostor vektorového prostoru $T^m$ generovaný všemi řádky matice $A$ a $\mathcal{S}(A)$ budiž podprostor vektorového prostoru $T^n$ generovaný všemi sloupci matice $A$. Zřejmě $k = h(A) = h(\overline{A}) = \dim(R(\overline{A})) = \dim(\mathcal{S}(A))$. Podle Věty 3.8 existují ortonormální báze $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ unitárního prostoru $(T^m, \omega)$ a ortonormální báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ unitárního prostoru $(T^n, \omega)$ tak, že $\mathcal{R}(\overline{A}) = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ a $\mathcal{S}(A) = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle$. Umístěme sloupcové nektory těchto bazí do matic $V$ a $U$, tj $U = (\mathbf{u}_1^{\mathsf{T}} \,|\, \mathbf{u}_n^{\mathsf{T}} \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{u}_n^{\mathsf{T}})$ a $V = (\mathbf{v}_1^{\mathsf{T}} \,|\, \mathbf{v}_n^{\mathsf{T}} \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{v}_m^{\mathsf{T}})$. Poznámka 4.16 říká, že se jedná o unitární matice. Konečně definujme matici $R = \overline{U}^{\mathsf{T}} A V$. Potom bezpochyby $A = U\overline{U}^{\mathsf{T}} A V \overline{V}^{\mathsf{T}} = UR\overline{V}^{\mathsf{T}}$. Zbývá si uvědomit, že matice $R$ má požadovaný tvar. Připomeňme, že vektory $\mathbf{u}_i$ pro $i = k+1, \ldots, n$ jsou kolmé na $\mathcal{S}(A) = \langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle$. To znamená, že $\mathbf{u}_i\, A = \mathbf{0}$, a tedy i $\mathbf{u}_i\, AV = \mathbf{0}\, V = \mathbf{0}$ pro všechna $i = k+1, \ldots, n$. Tedy řádky $k+1, \ldots, n$ matice $R$ jsou nulové. Symetrickou úvahou ověříme, že i sloupce $k+1, \ldots, m$ matice $R$ jsou nulové. Tím máme dokázáno, že matice $R$ je tvaru $\begin{pmatrix} D & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}$. Konečně obě matice $\overline{U}^{\mathsf{T}}$i $V$ jsou regulární, proto $h(A) = h(R) = k$. To znamená, že prvních $k$ řádků i sloupců matice $R$ je lineárně nezávislých, proto je čtvercová matice $D$ stupně $k$ nutně regulární. □

**Definice.** Posloupnost matic $U$, $\begin{pmatrix} D & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}$ a $\overline{V}^{\mathsf{T}}$ z předchozí věty nazveme *URV rozkladem* reálné nebo komplexní matice $A$.

**Příklad.** Hledejme URV rozklad reálné matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nejdříve musíme najít ortonormální báze podprostorů generovaných řádky a sloupci matice $A$, které doplníme na ortonormální báze celých prostorů. Snadno nahlédneme, že $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ tvoří ortonormální bázi podprostoru prostoru $\mathbf{R}^4$ tvořeného řádky matice $A$, kterou můžeme doplnit vektory $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{6}})$ na ortonormální bázi celého $\mathbf{R}^4$. Podobně najdeme ortonormální bázi $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ podprostoru generovaného sloupci, a vektorem $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ji doplníme na ortonormální bázi $\mathbf{R}^3$.

Tedy $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ a $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

V souladu s pozorováním provedeným v důkazu Věty 5.10 dopočítáme matici $R$:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Tedy $R = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, našli jsme reálný URV rozklad $A = URV^{\mathsf{T}}$.

**Poznámka 5.11.** *$h(A) = h(\overline{A}^{\mathsf{T}}A) = h(A\overline{A}^{\mathsf{T}})$ pro každou komplexní matici $A$.*

**Poznámka 5.12.** *Nechť $\varphi : V \to W$ je homomorfismus, kde $(V, \omega)$ a $(W, \omega)$ jsou unitární prostory nad týmž tělesem. Potom existují ortonormální báze $B_V$ prostoru $(V, \omega)$ a $B_W$ prostoru $(W, \omega)$ tak, že $[\varphi]_{B_V B_W} = \begin{pmatrix} D & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}$, kde $D$ je regulární matice a $\mathbf{0}_i$ nulové matice příslušného typu.*

**Příklad.** Máme-li homomorfismus $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ jehož matice vzhledem ke kanonickým bázím je $[\varphi]_{K_4K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ pak s využitím hodnot z předchozího příkladu zjistíme, že pro matice přechodu

$$[\mathrm{Id}]_{CK_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad [\mathrm{Id}]_{BK_4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

je $[\varphi]_{BC} = [\mathrm{Id}]_{K_3C}[\varphi]_{K_4K_3}[\mathrm{Id}]_{BK_4} = [\mathrm{Id}]^{\mathsf{T}}_{CK_3}[\varphi]_{K_4K_3}[\mathrm{Id}]_{BK_4} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Hledané ortonormální báze najdeme přímo ve sloupečcích matic $[\mathrm{Id}]_{BK_4}$ a $[\mathrm{Id}]_{CK_3}$, tedy $B = ((\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{6}}))$.
Obdobně $C = ((\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}))$.

**Poznámka 5.13.** *Mějme $A = U_1 \begin{pmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \overline{V_1}^{\mathsf{T}}$ a $A = U_2 \begin{pmatrix} D_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \overline{V_2}^{\mathsf{T}}$ dva URV rozklady reálné nebo komplexní matice $A$, kde $D_i$ jsou regulární matice. Pak $V_1 \begin{pmatrix} D_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \overline{U_1}^{\mathsf{T}} = V_2 \begin{pmatrix} D_2^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \overline{U_2}^{\mathsf{T}}$.*

**Definice.** Buď $A = U \begin{pmatrix} D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \overline{V}^{\mathsf{T}}$ URV rozklad reálné nebo komplexní matice $A$ typu $(n, m)$, kde $D$ je regulární. Jednoznačně určenou matici $A^\dagger = V \begin{pmatrix} D^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \overline{U}^{\mathsf{T}}$ typu $(m, n)$ nazveme *(Moore-Penroseovou) pseudoinverzní maticí* k matici $A$.

**Poznámka 5.14.** *Je-li $A$ regulární reálná nebo komplexní matice, pak $A^\dagger = A^{-1}$.*

**Poznámka 5.15.** *Nechť $A$ je reálná nebo komplexní matice. Pak platí:*

a) $AA^\dagger A = A$ *a* $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$,
b) $AA^\dagger = (\overline{AA^\dagger})^\mathsf{T}$ *a* $A^\dagger A = (\overline{A^\dagger A})^\mathsf{T}$,
c) $\overline{A}^\mathsf{T} = \overline{A}^\mathsf{T} AA^\dagger = A^\dagger A\overline{A}^\mathsf{T}$.

**Poznámka 5.16.** $\overline{A^\dagger}^\mathsf{T} = (\overline{A}^\mathsf{T})^\dagger$ *pro každou komplexní matici $A$.*

**Příklad.** Spočítejme pseudoinverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Uvědomme si, že nám Poznámky 5.11 a 5.15 c) v tomto případě poskytují jinou metodu nalezení pseudoinverzní matice, než je URV rozklad. Protože matice $A$ má hodnost dva, a tudíž i čtvercová matice $A\overline{A}^\mathsf{T}$ stupně dva má hodnost dva (viz Poznámka 5.11), je $A\overline{A}^\mathsf{T}$ regulární matice. Jednoduchou úpravou druhé části Poznámky 5.15 c) dostáváme, že $A^\dagger = \overline{A}^\mathsf{T}(A\overline{A}^\mathsf{T})^{-1}$. Snadno zjistíme, že $(A\overline{A}^\mathsf{T})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$, a proto

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

**Příklad.** Nechť $A\mathbf{x}^\mathsf{T} = \mathbf{y}^\mathsf{T}$ je obecně nehomogenní soustava rovnic. Podle Poznámky 5.15 c) je $\overline{A}^\mathsf{T} AA^\dagger \mathbf{y}^\mathsf{T} = \overline{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}^\mathsf{T}$. Pokud položíme $\mathbf{x}_0^\mathsf{T} = A^\dagger \mathbf{y}^\mathsf{T}$, vidíme, že $\overline{A}^\mathsf{T} A\mathbf{x}_0^\mathsf{T} = \overline{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}^\mathsf{T}$, tedy $A^\dagger \mathbf{y}^\mathsf{T}$ je přibližným řešením soustavy $A\mathbf{x}^\mathsf{T} = \mathbf{y}^\mathsf{T}$ metodou nejmenších čtverců (pokud je soustava řešitelná, tak je to, jak víme, exaktní řešení dané soustavy).

Vezmeme-li například soustavu rovnic $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, pak určíme $A^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ pomocí předchozího příkladu a Poznámky 5.16. Přibližné řešení soustavy metodou nejmenších čtverců je $\mathbf{x}_0^\mathsf{T} = A^\dagger \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

### SVD rozklad

**Poznámka 5.17.** *Nechť $A$ je komplexní čtvercová matice. Pak $\overline{A}^\mathsf{T} A$ je normální matice a všechna vlastní čísla $\overline{A}^\mathsf{T} A$ jsou reálná a nezáporná.*

**Věta 5.18.** *Nechť $T$ je reálné nebo komplexní těleso a $A$ je matice typu $(n, m)$ hodnosti $k$ nad $T$. Potom nad tělesem $T$ existují unitární matice $U$ stupně $n$ a $V$ stupně $m$ a diagonální matice $D$ s kladnými reálnými hodnotami na diagonále stupně $k$ tak, že*

$$A = U \begin{pmatrix} D & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \overline{V}^\mathsf{T},$$

*kde $\mathbf{0}_1$ je nulová matice typu $(k, m-k)$, $\mathbf{0}_2$ je nulová matice typu $(n-k, k)$ a $\mathbf{0}_3$ je nulová matice typu $(n-k, m-k)$.*

*Důkaz.* Podle Poznámky 5.17 je matice $\overline{A}^\mathsf{T} A$ normální a všechna vlastní čísla $\overline{A}^\mathsf{T} A$ jsou nezáporná reálná. Věta 4.21 říká, že $\overline{A}^\mathsf{T} A$ je unitárně diagonalizovatelná, navíc,

je-li $A$ reálná, jde o reálnou unitárně diagonalizovatelnou matici. Tedy existuje taková unitární matice $V = (\mathbf{v}_1^{\mathsf{T}} \,|\, \dots \,|\, \mathbf{v}_m^{\mathsf{T}})$ stupně $m$ nad tělesem $T$, že $\overline{V}^{\mathsf{T}}(\overline{A}^{\mathsf{T}}A)V$ je diagonální matice, která má na diagonále po řádě právě vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, všechna nezáporná. Podle Poznámky 5.11 je $h(A) = h(\overline{A}^{\mathsf{T}}A) = h(\overline{V}^{\mathsf{T}}(\overline{A}^{\mathsf{T}}A)V)$, proto právě $k$ čísel $\lambda_i$ je kladných, můžeme předpokládat, že jsou to právě vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ a $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_m = 0$. Všimněme si, že pro všechna $i = k+1, \dots, m$:

$$\omega(\mathbf{v}_i\, A^{\mathsf{T}}, \mathbf{v}_i\, A^{\mathsf{T}}) = \overline{\mathbf{v}_i}\overline{A}^{\mathsf{T}} A\, \mathbf{v}_i^{\mathsf{T}} = 0 \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, \mathbf{v}_i^{\mathsf{T}} = 0,$$

tedy $A\, \mathbf{v}_i^{\mathsf{T}} = \mathbf{0}^{\mathsf{T}}$ v důsledku definice skalárního součinu. Dále položíme $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ a $\mathbf{u}_i^{\mathsf{T}} = \frac{A\, \mathbf{v}_i^{\mathsf{T}}}{\sigma_i}$ pro všechna $i = 1, \dots, k$. Potom

$$\omega(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = \frac{\overline{\mathbf{v}_i}\overline{A}^{\mathsf{T}}}{\sigma_i} \frac{A\, \mathbf{v}_i^{\mathsf{T}}}{\sigma_i} = \frac{\overline{\mathbf{v}_i}(\overline{A}^{\mathsf{T}}A)\, \mathbf{v}_i^{\mathsf{T}}}{\lambda_i} = \frac{\lambda_i \overline{\mathbf{v}_i}\, \mathbf{v}_i^{\mathsf{T}}}{\lambda_i} = 1,$$

$$\omega(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \frac{\overline{\mathbf{v}_i}\overline{A}^{\mathsf{T}}}{\sigma_i} \frac{A\, \mathbf{v}_j^{\mathsf{T}}}{\sigma_j} = \frac{\overline{\mathbf{v}_i}(\overline{A}^{\mathsf{T}}A)\, \mathbf{v}_j^{\mathsf{T}}}{\sigma_i\sigma_j} = \frac{\lambda_j \overline{\mathbf{v}_i}\, \mathbf{v}_j^{\mathsf{T}}}{\sigma_i\sigma_j} = 0,$$

pro každé $i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$. Tedy posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1 \dots, \mathbf{u}_k$ je ortonormální v unitárním prostoru $(T^n, \omega)$ a můžeme ji podle Věty 3.8 doplnit na ortonormální bázi $\mathbf{u}_1 \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1} \dots, \mathbf{u}_n$ prostoru $(T^n, \omega)$. Definujme nyní matici $U = (\mathbf{u}_1^{\mathsf{T}} \,|\, \dots \,|\, \mathbf{u}_n^{\mathsf{T}})$ a spočítejme hodnotu $r_{ij}$ na $i$-tém řádku a $j$-tém sloupci matice $R = \overline{U}^{\mathsf{T}}AV$:

$$r_{ij} = \overline{\mathbf{u}_i} A\, \mathbf{v}_j^{\mathsf{T}} = \overline{\mathbf{u}_i}\sigma_j\, \mathbf{u}_j = \sigma_j \omega(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ \sigma_j & \text{pro } i = j, \end{cases}$$

pro každé $i = 1, \dots, n$ a každé $j = 1, \dots, k$. Konečně pro $i = 1, \dots, n$ a $j = k+1, \dots, m$

$$r_{ij} = \overline{\mathbf{u}_i} A\, \mathbf{v}_j^{\mathsf{T}} = \overline{\mathbf{u}_i}\, \mathbf{0}^{\mathsf{T}} = 0.$$

Matice $U$ a $V$ jsou unitární, proto $A = U\overline{U}^{\mathsf{T}}AV\overline{V}^{\mathsf{T}} = UR\overline{V}^{\mathsf{T}}$, kde $R$ zjevně splňuje požadavky věty. □

**Definice.** Posloupnost matic $U$, $\begin{pmatrix} D & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}$ a $\overline{V}^{\mathsf{T}}$ z předchozí věty nazveme *SVD rozkladem* (anglicky single value decomposition) reálné nebo komplexní matice $A$. Kladným reálným číslům na diagonále matice $D$ budeme říkat *singulární hodnoty* matice $A$.

**Poznámka 5.19.** *Singulární hodnoty komplexní (reálné) matice $A$ jsou určeny jednoznačně jako $\sqrt{\lambda}$ pro všechna kladná vlastní čísla $\lambda$ matice $\overline{A}^{\mathsf{T}}A$ nebo $A\overline{A}^{\mathsf{T}}$.*

**Poznámka 5.20.** *Nechť $\varphi : V \to W$ je homomorfismus, kde $(V, \omega)$ a $(W, \omega)$ jsou unitární prostory nad týmž tělesem. Potom existují ortonormální báze $B_V$ prostoru $(V, \omega)$ a $B_W$ prostoru $(W, \omega)$ tak, že $[\varphi]_{B_V B_W} = \begin{pmatrix} D & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}$, kde $D$ je diagonální matice s kladnou diagonálou a $\mathbf{0}_i$ nulové matice příslušného typu.*

**Příklad.** Najděme SVD rozklad reálné matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nejprve spočítáme $\overline{A}^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a určíme tak spektrum $\sigma(\overline{A}^{\mathrm{T}}A) = \{0, 3, 9\}$. Singulární hodnoty matice $A$ jsou $\sqrt{3},\ 3$. Snadno najdeme normalizované vlastní vektory příslušné vlastním číslům 3 a 9: $\mathbf{v}_3 = (0, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ a $\mathbf{v}_9 = (\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$. Už jsme spočítali, že tuto dvojici můžeme doplnit dvojicí vektorů $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{6}})$ vlastních vzhledem k vlastnímu číslu 0 na ortonormální bázi celého $(\mathbf{R}^4, \omega)$.

Nyní spočítáme $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathbf{v}_3\,A^{\mathrm{T}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ a $\mathbf{u}_9 = \frac{1}{3}\,\mathbf{v}_9\,A^{\mathrm{T}} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$. Vektor $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ doplňuje dvojici $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_9$ na ortonormální bázi $\mathbf{R}^3$. Nyní už můžeme napsat SVD rozklad matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

**Příklad. Vyhledávač**.

Mějme systém $n$ výrazů a $m$ dokumentů, v nichž budeme chtít vyhledávat výrazy. Na $i$-té souřadnici vektoru $\mathbf{c}_j$ budeme mít zaznamenán počet výskytů $i$-tého slova v $j$-tém dokumentu. Předpokládejme, že každý dokument obsahuje alespoň jeden výraz, tedy $\mathbf{c}_j \neq \mathbf{0}$. Normalizujeme-li tento vektor $\mathbf{d}_j = \frac{\mathbf{c}_j}{\|\mathbf{c}_j\|_\omega}$, budeme mít na $i$-té souřadnici vektoru $\mathbf{d}_j$ podíl $i$-tého slova v $j$-tém dokumentu vztažený k tomuto dokumentu. Položme $A = (\mathbf{d}_1^{\mathrm{T}} | \ldots | \mathbf{d}_m^{\mathrm{T}})$.

Zadáme-li otázku sestávající z jisté množiny vyšetřovaných výrazů, budeme se ptát na relevanci jednotlivých dokumentů vzhledem k této otázce. K tomu účelu vytvoříme vektor $\mathbf{q}$, který má na $i$-té souřadnici hodnotu 1, pokud otázka obsahuje $i$-tý výraz a všude jinde budou nuly. Uvědomme si, jaký význam má vektor $(x_1, \ldots, x_m) = \frac{\mathbf{q}A}{\|\mathbf{q}\|_\omega}$. Podle Věty 3.4 a) $\mathbf{q}\mathbf{d}_i^{\mathrm{T}} = \omega(\mathbf{q}, \mathbf{d}_i) \leq \|\mathbf{q}\|_\omega \|\mathbf{d}_i\|_\omega = \|\mathbf{q}\|_\omega$, proto $x_i \leq 1$. Zřejmě $x_i = \mathbf{q}\mathbf{d}_i^{\mathrm{T}} = 0$ právě tehdy, když se žádný z dotazovaných výrazů nevyskytuje v $i$-tém dokumentu.

Pomocí SVD faktorizace můžeme odstranit "šumy" metody a zároveň zjednodušit výpočet. Nechť $U = (\mathbf{u}_1^{\mathrm{T}} | \ldots | \mathbf{u}_n^{\mathrm{T}})$ a $V = (\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} | \ldots | \mathbf{v}_m^{\mathrm{T}})$ a $A = URV^{\mathrm{T}}$ je SVD rozklad se singulárními hodnotami $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r$, kde $r = h(A)$. Snadno spočítáme, že $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i\, \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\, \mathbf{v}_i$ (kde $\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\, \mathbf{v}_i$ je matice typu $(n, m)$). Předpokládejme, že singulární hodnoty $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_r$ jsou výrazně menší než singulární hodnoty $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$. Vezměme místo matice $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i\, \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\, \mathbf{v}_i$ matici $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i\, \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\, \mathbf{v}_i$. Dále vezměme $U_k = (\mathbf{u}_1^{\mathrm{T}} | \ldots | \mathbf{u}_k^{\mathrm{T}})$, $V_k = (\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} | \ldots | \mathbf{v}_k^{\mathrm{T}})$ a $D_k$ buď diagonální čtvercová matice stupně $k$, která má na diagonále po řadě hodnoty $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$. Tedy platí: $A_k = U_k D_k V_k^{\mathrm{T}}$.

Nahraďme původní hodnoty $x_i$ hodnotami

$$\xi_i = \frac{\mathbf{q}A_k\mathbf{e}_i^{\mathrm{T}}}{\|\mathbf{q}\|_\omega\|\mathbf{e}_iA_k^{\mathrm{T}}\|_\omega}.$$

Konečně položme $S_k = D_kV_k^{\mathrm{T}} = (\mathbf{s}_1|\dots|\mathbf{s}_k)$. Potom $A_k\mathbf{e}_i^{\mathrm{T}} = U_k\mathbf{s}_i^{\mathrm{T}}$. Uvědomíme-li si, že zobrazení $\mathbf{s} \to \mathbf{s}U^{\mathrm{T}}$ je unitární pro libovolnou matici $U$ typu Q, pak $\|\mathbf{s}\|_\omega = \|\mathbf{s}U^{\mathrm{T}}\|_\omega$, a proto

$$\|\mathbf{e}_iA_k^{\mathrm{T}}\|_\omega = \|\mathbf{s}_iU_k^{\mathrm{T}}\|_\omega = \|\mathbf{s}_i\|_\omega.$$

Tedy k určení relevance $i$-tého dokumentu stačí spočítat

$$\xi_i = \frac{\mathbf{q}U_k\mathbf{s}_i^{\mathrm{T}}}{\|\mathbf{q}\|_\omega\|\mathbf{s}_i\|_\omega}$$

a k tomu nám stačí předem znát (a pro daný systém dokumentů jednou spočítat) matice $S_k$ a $U_k$. Jeli $k$ výrazně menší než $r$ (v mnoha konkrétních situacích to opravdu nastává) je výpočet hodnot $\xi_i$ výrazně jednodušší než výpočet $x_i$.

### Choleskyho rozklad symetrické matice

**Definice.** Řekneme, že symetrická reálná čtvercová matice $A$ stupně $n$ je *pozitivně definitní*, pokud $\mathbf{v}\,A\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}} > 0$ pro každý nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$.

**Poznámka 5.21.** *Buď $A$ symetrická reálná čtvercová matice stupně $n$. Pak je následující ekvivalentní:*

(1) *$A$ je pozitivně definitní,*
(2) *Zobrazení $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ dané předpisem $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}\,A\,\mathbf{v}^{\mathrm{T}}$ je pozitivně definitní symetrická bilineární forma,*
(3) *existuje regulární matice $P$ tak, že $A = P^{\mathrm{T}}P$.*

**Příklad.** Zjistíme, zda je reálná matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ pozitivně definitní. Budeme-li ji chápat jako matici reálné bilineární $f$ formy vzhledem ke kanonické bázi, stačí podle Poznámky 5.21 ověřit, zda je tato forma pozitivně definitní. Tedy potřebujeme zjistit, zda matice formy $f$ vzhledem k polární bázi obsahuje na diagonále samá kladná čísla. Budeme tedy symetricky upravovat matici $A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že matice má na diagonále pouze kladná čísla, tudíž je pozitivně definitní.

**Věta 5.22.** *Nechť $A$ je pozitivně definitní symetrická reálná čtvercová matice stupně $n$. Pak existuje právě jedna reálná horní trojúhelníková matice $R$ stupně $n$ s kladnými hodnotami na diagonále taková, že $A = R^{\mathrm{T}}R$.*

*Důkaz.* Vezměme regulární matici $P$, pro níž $A = P^{\mathrm{T}}P$, kterou zaručuje Poznámka 5.21. Podle Věty 5.8 existuje QR rozklad matice $P = QR$. Potom $A = P^{\mathrm{T}}P = R^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}QR = R^{\mathrm{T}}R$. Matice $R$ je podle definice QR rozkladu horní trojúhelníková s kladnými čísly na diagonále.

Zbývá nám ověřit jednoznačnost. Nechť tedy $A = R^{\mathrm{T}}R = S^{\mathrm{T}}S$ pro dvě horní trojúhelníkové matice $R = (r_{ij})$ a $S = (s_{ij})$ takové, že $r_{ii} > 0$ a $s_{ii} > 0$. Nejprve si všimněme, že diagonála matice $SR^{-1}$ je opět kladná. Zřejmě $(RS^{-1})^{\mathrm{T}} = (S^{\mathrm{T}})^{-1}R^{\mathrm{T}} = SR^{-1}$. Matice $R$ a $S$ jsou obě typu U, proto i součin $RS^{-1}$ a $SR^{-1}$ jsou podle Poznámky 5.1 typu U. To ovšem znamená, že jsou matice $RS^{-1}$ a $SR^{-1}$ horní a zároveň dolní trojúhelníkové, tedy diagonální. Dále $(SR^{-1})^{-1} = RS^{-1} = (RS^{-1})^{\mathrm{T}} = SR^{-1}$, tudíž $SR^{-1}$ je diagonální matice s kladnou diagonálou inverzní sama k sobě, tj. $SR^{-1} = E$, a proto $S = R$. □

**Definice.** Nechť $A$ je pozitivně definitní symetrická reálná čtvercová matice. Potom jednoznačně určenému rozkladu $A = R^{\mathrm{T}}R$, kde $R$ je reálná horní trojúhelníková matice s kladnými čísly na diagonále, budeme říkat *Choleskyho rozklad.*

**Příklad.** Spočítejme Choleskyho rozklad matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Budeme-li počítat v souladu s důkazem Věty 5.22, měli bychom nejprve najít regulární matici $P$ tak, aby $P^{\mathrm{T}}P = A$, a potom bychom hledali QR rozklad matice $P$. Jednodušší ovšem bude, když se nám podaří rovnou určit matici $P$ jako horní trojúhelníkovou s kladnými čísly na digonále. Upravujme opět matici $A$ symetrickými elementárními úpravami na řádky a na sloupce tak, abychom dostali jednotkovou matici (tj. kromě odčítání řádků budeme řádky a zároveň odpovídající sloupce násobit také skalárem) a úpravy inverzní k provedeným úpravám na řádky si zapamatujeme

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní úpravy k provedeným jsou:

$$R^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zřejmě $(R^{\mathrm{T}})^{-1}AR^{-1} = E$, tedy $R^{\mathrm{T}}R = A$ a matice $R$ splňuje podmínky Choleskyho rozkladu. Tedy $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## 6. Jordanův normální tvar matice

Je-li $f$ endomorfismus na prostoru $V$, bude $f^n = f \dots f$ značit složení $n$ endomorfismů $f$ pro každé $n \geq 1$ a $f^0 = \mathrm{Id}$. Je-li $B$ nějaká množina, pak zápisem $f[B]$ budeme rozumět množinu $\{f(b) \mid b \in B\}$.

**Poznámka 6.1.** *Nechť $f$ je endomorfismus na komplexním vektorovém prostoru $V$ konečné dimenze $n$. Potom* $\operatorname{Im} f^k \supseteq \operatorname{Im} f^{k+1}$ *a* $\operatorname{Ker} f^k \subseteq \operatorname{Ker} f^{k+1}$ *pro každé $k \geq 1$ a dále*

a) $\operatorname{Im} f^m = \operatorname{Im} f^n$ *pro všechna $m \geq n$,*
b) $\operatorname{Ker} f^m = \operatorname{Ker} f^n$ *pro všechna $m \geq n$,*
c) $V = \operatorname{Im} f^n \oplus \operatorname{Ker} f^n$.

**Definice.** Buď $\varphi$ endomorfismus na vektorovém prostoru $V$, řekneme, že podprostor $U$ prostoru $V$ je *invariantním podprostorem endomorfismu* $\varphi$, pokud $\varphi(U) \subseteq U$.

**Příklad.** 1) Triviální podprostory $\{\mathbf{0}\}$ a $V$ prostoru $V$ jsou invariantními podprostory libovolného endomorfismu na $V$.

2) Mějme podprostor $U = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ prostoru $V$ generovaný vlastními vektory endomorfimsu $\varphi$ na $V$. Pak $U$ je invariantním podprostorem endomorfismu $\varphi$.

Je-li $\varphi$ endomorfimus na vektorovém prostoru $V$ a $U$ je jeho invariantním podprostor, pak restrikcí endomorfismu $\varphi$ na invariantním podprostor $U$ budeme rozumět endomorfismus $\varphi_U$ na $U$ daný předpisem $\varphi_U(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u})$ pro každé $\mathbf{u} \in U$.

**Věta 6.2.** *Nechť $\varphi$ je endomorfismus na komplexním vektorovém prostoru konečné dimenze $n$, $\lambda \in \sigma(\varphi)$ a $f = \varphi - \lambda \,\mathrm{Id}$. Pak $\operatorname{Im} f^k$ a $\operatorname{Ker} f^k$ jsou invariantní podprostory endomorfismu $\varphi$ pro každé $k \geq 1$.*

*Důkaz.* Nechť $\mathbf{u} \in \operatorname{Im} f^k$. Pak $\varphi(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + \lambda\,\mathbf{u}$. Protože $\lambda\,\mathbf{u}$ i $f(\mathbf{u})$ leží v $\operatorname{Im} f^k$, leží také $\varphi(\mathbf{u})$ v $\operatorname{Im} f^k$ a prostor je invariantní.

Nechť $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} f^k$. Ptáme se, zda $\varphi(\mathbf{u}) \in \operatorname{Ker} f^k$. Platí $f^k(\varphi(\mathbf{u})) = f(f^k(\mathbf{u})) + \lambda f^k(\mathbf{u}) = 0$ a prostor $\operatorname{Ker} f^k$ je tedy invariantní. □

**Věta 6.3.** *Nechť $r > 1$ a $B$ je lineárně nezávislá podmnožina nějakého doplňku $\operatorname{Ker} f^r$ v $\operatorname{Ker} f^{r-1}$. Pak je $f[B]$ lineárně nezávislá podmnožina nějakého doplňku $\operatorname{Ker} f^{r-1}$ v $\operatorname{Ker} f^{r-2}$.*

*Důkaz.* Nechť $B = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$. Pokud

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j f(\mathbf{u}_j) = 0,$$

pak také

$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\,\mathbf{u}_j\right) = 0.$$

Protože $\langle B \rangle$ má nulový průnik s $\operatorname{Ker} f^{r-1}$, a tedy také s $\operatorname{Ker} f$, platí

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\,\mathbf{u}_j = 0.$$

Všechny koeficienty jsou tedy nulové, neboť $B$ je lineárně nezávislá množina.

Vztah $f[B] \subset \operatorname{Ker} f^{r-1}$ plyne z toho, že pro každé $\mathbf{u} \in B$ platí $0 = f^r(\mathbf{u}) = f^{r-1}(f(\mathbf{u}))$.

Konečně, pokud

$$f^{r-2}\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j f(\mathbf{u}_j)\right) = 0,$$

pak

$$f^{r-1}\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\,\mathbf{u}_j\right) = 0,$$

a tedy jsou jako výše všechny koeficienty nulové, díky $\langle B \rangle \bigcap \operatorname{Ker} f^{r-1} = \{\mathbf{0}\}$. □

**Věta 6.4.** *Buď $\varphi$ endomorfismus na komplexním vektorovém prostoru $V$ konečné dimenze $n$, $\lambda \in \sigma(\varphi)$ a nechť platí, že $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \operatorname{Id})^k = V$ pro nějaké $k > 0$. Potom $\sigma(\varphi) = \{\lambda\}$ a existuje báze $B$ prostoru $V$ a čísla $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-1} \in \{0, 1\}$ tak, že*

$$[\varphi]_B = \begin{pmatrix} \lambda & \epsilon_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \epsilon_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & \epsilon_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

*Důkaz.* Položme $f = \varphi - \lambda \operatorname{Id}$. Nechť $s \geq 0$ je takové číslo, pro nějž $\operatorname{Ker} f^s = V$ a $\operatorname{Ker} f^{s-1} \neq V$. Budeme postupně konstruovat bázi s požadovanými vlastnostmi.

Nejprve zvolme bázi $B_s$ vercová matice. Potom $\rho(A)$ je vlastní číslo matice $A$ a existuje právě jeden jeho kladný vlastní vektor $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ tak, že $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Navíc každý vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\rho(A)$ je násobkem vektoru $\mathbf{p}$.

*Důkaz.* Ve Větě 7.4 jsme dokázali, že $\rho(A)$ je vlastním číslem matice $A$, a že pro něj existuje kladný vlastní vektor $|\,\mathbf{v}\,| = \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Položíme-li $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}}{v_1 + \cdots + v_n}$, pak $\mathbf{p}$ zřejmě splňuje požadavek věty. Konečně předpokládejme, že $\mathbf{u}$ je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu $\rho(A)$, pro nějž $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \notin \langle \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{p} \rangle$. Vektor $\mathbf{u}$ je nenulový, tedy existuje $i$ tak, že $u_i \neq 0$. Zřejmě je $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \frac{v_i}{u_i}\mathbf{u}$ opět (nenulovým) vlastním vektorem, jehož $i$-tá souřadnice je ovšem nulová, tedy $|\,\mathbf{w}\,|$ není kladný vektor. Podle Věty 7.4 ovšem vektor $|\,\mathbf{w}\,|$ kladným vlastním vektorem je, čímž jsme odvodili spor. □

**Poznámka 6.5.** *Nechť $A$ a $B$ jsou dvě nezáporné čtvercové matice stejného stupně a $A \geq B$. Pak $\rho(A) \geq \rho(B)$.*

**Věta 6.6.** *Nechť $A$ je nezáporná čtvercová matice. Pak $\rho(A)$ je vlastní číslo matice $A$ a existuje nezáporný vlastní vektor matice $A$ příslušný vlastnímu číslu $\rho(A)$.*

*Důkaz.* Pro každé přirozené číslo $k > 1$ definujme kladnou matici $A_k$ takto: $(A_k)_{i,j} = \frac{1}{k}$, pokud $(A)_{i,j} = 0$ a jinak $(A_k)_{i,j} = (A)_{i,j}$. Matice $A$ je zřejmě limitou posloupnosti $(A_k)_1^\infty$. Podle Perronovy věty má každá matice $A_k$ kladný vlastní vektor $v_k$, jehož všechny složky jsou menší než jedna. Z posloupnosti $(v_k)_1^\infty$ tedy můžeme vybrat konvergentní podposloupnost konvergující k nějakému vektoru $v$. Ukážeme, že $v$ je vlastní vektor matice $A$.

□

**Definice.** Řekneme, že matice $A$ je *primitivní*, pokud je nezáporná čtvercová a existuje $k > 0$ takové, že $A^k > \mathbf{0}$.

**Příklad.** Mějme orientovaný (případně kladnými reálnými hodnotami ohodnocený orientovaný) graf $\mathcal{G}$ s množinou vrcholů $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a buď $A$ matice incidence grafu $\mathcal{G}$, tj.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud existuje hrana } v_i \to v_j \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}$$

(v případě ohodnoceného grafu je $a_{ij}$ rovno hodnotě hrany $v_i \to v_j$). Poznamenejme, že $A$ je nezáporná čtvercová matice. Předpokládejme, že jsou každé dva různé vrcholy grafu $\mathcal{G}$ spojeny orientovanou cestou (tj. pro každé $i$ a $j$ existuje posloupnost hran $v_i \to v_{i_1} \to \ldots v_{i_s} \to v_j$, řekneme, že $\mathcal{G}$ je *silně souvislý*), ukážeme,

že $(A+E)^n > \mathbf{0}$, tedy že $A+E$ je primitivní matice. Uvědomme si, že nejkratší orientovaná cesta z vrcholu $i$ do vrcholu $j$ má nejvýše $n-1$ hran, vezměme si takovou orientovanou cestu $v_i \to v_{i_1} \to \dots v_{i_{k-1}} \to v_j$, která zřejmě obsahuje právě $k < n$ hran. Dále si všimněme, že číslo na pozici $(i,j)$ matice $A^{k+1}$ je součtem nezáporných hodnot, z nichž sčítanec $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\dots a_{i_{k-2}i_{k-1}}a_{i_{k-1}j}$ je zřejmě kladný. Protože však je hodnota na $j$-té pozici diagonály matice $(A+E)^{n-k-1}$ také kladná, máme na místě $(i,j)$ matice $(A+E)^n = (A+E)^{k+1}(A+E)^{n-k-1}$ kladné číslo. Tím jsme dokázali, že $(A+E)^n$ je kladná matice. Konečně poznamenejme, že $A^k \neq \mathbf{0}$ pro všechna celá $k > 0$, proto podle Poznámky 6.10. je $\rho(A) > 0$.

**Poznámka 6.7** (Perronova-Frobeniova věta)**.** *Nechť $A$ je primitivní matice. Potom $\rho(A)$ je kladné vlastní číslo matice $A$ a existuje právě jeden kladný vlastní vektor $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ tak, že $p_1 + \dots + p_n = 1$. Navíc každý vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\rho(A)$ je násobkem vektoru $\mathbf{p}$.*

Jednoznačně určenému vektoru $\mathbf{p}$ z Věty 7.5 a Poznámky 7.8 budeme říkat *Perronův vektor* matice $A$.

**Příklad** (Google)**.** Mějme systém webových stránek označených čísly $1, 2, \dots, n$, který budeme reprezentovat jako vrcholy grafu $\mathcal{G}$, přitom z vrcholu (stránky) $i$ povede $j$ do hrana právě tehdy, když bude na stránku $i$ odkazovat stránka $j$. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice incidence tohoto grafu. Vyslovme požadavek, že důležitost $i$-té webové stránky je lineárně závislá na součtu důležitostí stránek, které na ni odkazují. To můžeme pomocí matice $A$ vyjádřit tak, že $x_i = c\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, kde $x_i$ je "hodnota důležitosti"$i$-té stránky a $c$ je kladná konstanta vyjadřující naší přímou úměrnost. Označíme-li $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ *vektor důležitosti*, pak $A\mathbf{x}^\mathsf{T} = \frac{1}{c}\mathbf{x}^\mathsf{T}$. Pochopitelně chceme, aby byl vektor důležitost nezáporný.

Budeme předpokládat, že orientovaný graf webu $\mathcal{G}$ je silně souvislý (tj. vyšetřujeme zvlášť každou komponentu silné souvislosti grafu webu, hrany v takovém případě mohou vést pouze z "důležitější"komponenty do komponenty "méně důležité", žádná opačně). Zjistili jsme (viz předchozí příklad), že $\rho(A) > 0$, dále podle Poznámky 7.7 je $\rho(A)$ vlastní číslo matice $A$, a proto $\rho(A) + 1 > 1$ je vlastní číslo matice $A+E$. Tudíž $r = \rho(A+E) \geq \rho(A) + 1 > 1$. Navíc víme, že $A+E$ je primitivní matice, tedy podle Poznámky 7.8 existuje kladný Perronův vektor $\mathbf{x}$, pro nějž $(A+E)\mathbf{x}^\mathsf{T} = r\mathbf{x}^\mathsf{T}$, a proto $A\mathbf{x}^\mathsf{T} = (r-1)\mathbf{x}^\mathsf{T}$. Položíme-li $c = \frac{1}{r-1} > 0$, našli jsme vektor důležitosti (dané komponenty souvislosti) našeho systém webových stránek.

**Definice.** *Stochastickou maticí* budeme rozumět nezápornou čtvercovou matici, jejíž každý řádek ma součet hodnot roven jedné.

**Poznámka 6.8.** *Součin stochastických matic stejného stupně je stochastickou maticí.*

**Příklad.** Buď $S_1, S_2, \dots, S_n$ stavy (nějakého děje či přístroje) a označme $p_{ij}$ pravděpodobnost toho, že po uplynutí jedné časové jednotky nastane po stavu $S_i$ stav $S_j$. Protože po každém stavu nastane některý ze stavů $S_j$, platí, že $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$. Tedy $P = (p_{ij})$ je stochastická matice. Pozice $(i,j)$ (podle Poznámky 7.9 rovněž stochastické) matice $P^k$ přitom obsahuje právě pravděpodobnost toho, že se po uplynutí $k$ časových jednotek stav $S_i$ změní na stav $S_j$.

**Poznámka 6.9.** *Nechť $A$ je stochastická matice stupně $n$ a $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbf{R}^n$. Pak $A\mathbf{e}^\mathsf{T} = \mathbf{e}^\mathsf{T}$ a $\rho(A) = 1$.*

**Poznámka 6.10.** *Nechť $S$ je stochastická matice a $A$ nezáporná matice, pro níž $A \neq S$, $S \geq A$ a existuje kladný vlastní vektor matice $A^{\mathrm{T}}$ příslušný vlastnímu číslu $\rho(A) = \rho(A^{\mathrm{T}})$. Pak $\rho(A) < 1$.*

**Příklad** (Leontievův ekonomický model)**.** Uvažujeme uzavřenou soustavu průmyslových podniků označených $P_1, \ldots, P_n$, z nichž každý vyrábí právě jeden výrobek. *$P$-jednotkou* nazveme počet (resp. podíl) výrobků podniku $P$ s cenou rovnou jedné finanční jednotce (např 1 US dolar). Označme

$s_i$ počet $P_i$-jednotek produkovaných podnikem $P_i$ za rok a

$a_{ij}$ počet $P_i$-jednotek potřebných pro produkci jedné $P_j$-jednotky, potom je

$a_{ij}s_j$ počet $P_i$-jednotek spotřebovaných podnikem $P_j$ za rok,

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j$ počet $P_i$-jednotek spotřebovaných všemi podniky za rok a

$c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ je množství finančních jednotek nutných k výrobě $P_j$-jednotky.

Konečně

$d_i = s_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j$ je počet $P_i$-jednotek určených k (vnější) spotřebě.

Položme $A = (a_{ij}) \geq \mathbf{0}$ a nazvěme $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n) \geq \mathbf{0}$ *vektorem poptávky* a $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ *vektorem nabídky.* Rádi bychom určili vektor $\mathbf{s}$ pro předem daný vektor poptávky $\mathbf{d}$, samozřejmě rozumným řešením úlohy budou jen nezáporné hodnoty $s_i$, tj požadujeme, aby $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$.

Převedeme-li úlohu do maticového tvaru máme najít $\mathbf{s}$ tak, aby $\mathbf{d}^{\mathrm{T}} = (E - A)\mathbf{s}^{\mathrm{T}}$, tedy pro regulární matici dostáváme, že $\mathbf{s}^{\mathrm{T}} = (E - A)^{-1}\mathbf{d}^{\mathrm{T}}$. Nemáme ovšem ničím zaručeno, že matice $(E-A)^{-1}$ a vektor $\mathbf{s}$ budou nezáporné (koneckonců nevíme ani to, zda je matice $(E - A)$ regulární), proto musíme uvážit další podmínky kladené na systém. Předně můžeme oprávněně předpokládat, že každý výrobek alespoň zprostředkovaně ke své produkci potřebuje všechny ostatní výrobky, tj. orientovaný ohodnocený graf s maticí $A$ je silně souvislý. Navíc by ve zdravé ekonomice mělo pro všechna $j$ platit, že $c_j \leq 1$ (tj. náklady na výrobek by neměly převyšovat cenu výrobku) a alespoň jeden podnik $P_k$ by měl vydělávat, tj. $c_k < 1$. Potom $S \geq A^{\mathrm{T}}$ pro nějakou stochastickou matici $S \neq A^{\mathrm{T}}$, stejnou úvahou jako v předchozím příkladu najdeme kladný vlastní vektor matice $A$ příslušný $\rho(A)$, proto podle Poznámky 7.10 je $\rho(A) = \rho(A^{\mathrm{T}}) < 1$. Tudíž z Poznámky 6.11 b) dostáváme, že $(E - A)^{-1} = \lim_{n\to\infty}(E + A + A^2 + \cdots + A^n) \geq \mathbf{0}$ (mohli bychom dokonce dokázat, že $(E - A)^{-1}$ je kladná matice, což plyne z pozorování, které jsme učinili v předchozích dvou příkladech, totiž že $(E + A)^k > \mathbf{0}$). Ukázali jsme, že za vyslovených předpokladů je matice $(E - A)$ regulární a vektor nabídky je jednoznačně určený nezáporný vektor $\mathbf{s}^{\mathrm{T}} = (E - A)^{-1}\mathbf{d}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$.

## 7. Afinní a euklidovské prostory

**Definice.** *Afinním prostorem* nazveme dvojici $(A, V)$, kde $A$ je neprázdná množina (bodů) a $V$ je vektorový prostor konečné dimenze, spolu se zobrazením $+ : A \times V \to A$ splňujícím podmínky

(1) $a + \mathbf{0} = a$ a $a + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (a + \mathbf{u}) + \mathbf{v}$ pro všechna $a \in A$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,
(2) pro každé $a, b \in A$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{v} \in V$ tak, že $a + \mathbf{v} = b$.

Jednoznačně určený vektor $\mathbf{v}$ pro nějž $a + \mathbf{v} = b$ budeme značit $b - a$.

*Euklidovským prostorem* budeme rozumět trojici $(A, V, g)$, kde $(A, V)$ je afinní a $(V, g)$ reálný unitární prostor.

Všimněme si, že symbolem $+$ značíme dvě různá zobrazení, jednak binární operaci na vektorovém prostoru a potom zobrazení „posunutí bodu o vektor". Podobně i symbol $-$ používáme ve dvou různých (vzájemně nezaměnitelných) významech.

**Příklad.** 1) Nechť $V$ je libovolný vektorový prostor konečné dimenze, potom dvojice $(V, V)$ s afinním zobrazením $V \times V \to V$ daným vektorovým sčítáním je afinním prostorem.

2) Nechť $(V, g)$ je libovolný reálný unitární prostor konečné dimenze, potom dvojice $(V, V, g)$ se zobrazením $V \times V \to V$ daným vektorovým sčítáním je euklidovským prostorem.

3) Obvyklý „geometrický" třídimenzionální prostor bodů a vektorů v $\mathbf{R}^3$ se standardním pojmem vzdálenosti, je euklidovským prostorem $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3, \omega)$ z předchozí konstrukce.

**Poznámka 7.1.** *Buď $(A, V)$ afinním prostoru, $a, b, c \in A$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Pak*

a) $a + (b - a) = b$ *(∈ A),*
b) $(a - b) + (b - c) = a - c$ *(∈ V),*
c) $(a + \mathbf{u}) - (b + \mathbf{v}) = (a - b) + \mathbf{u} - \mathbf{v}$ *(∈ V),*
d) $(a + \mathbf{u}) - (b + \mathbf{u}) = (a - b)$,
e) $(a + \mathbf{u}) - (a + \mathbf{v}) = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

**Definice.** *Podprostorem afinního prostoru* $(A, V)$ nazveme takovou dvojici $(B, W)$, že $B \subseteq A$, $W$ je podprostorem $V$ a $(B, W)$ je afinním prostorem s operací posunutí bodu o vektor $+ : A \times V \to A$ restringovanou na podmnožinu $B \times W$. *Podprostorem euklidovského prostoru* $(A, V, g)$ nazveme podprostor $(B, W)$ afinního podprostoru $(A, V)$.

Každý euklidovský prostor je zároveň afinním prostorem (zapomeneme-li na skalární součin), proto následující tvrzení o afinních prostorech popisují i vlastnosti euklidovských prostorů.

**Poznámka 7.2.** *Nechť $(A, V)$ je afinní prostor, $\emptyset \neq B \subseteq A$ a $W$ je podprostor $V$. Pak $(B, W)$ je podprostorem $(A, V)$ právě tehdy, když pro každé $a, b \in B$ a $\mathbf{v} \in W$ je $b - a \in W$ a $a + \mathbf{v} \in B$.*

**Poznámka 7.3.** *Nechť $(A, V)$ je afinní prostor.*

a) *Je-li $W$ podprostor $V$, $a \in A$ a $B = \{a + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in W\}$, pak $(B, W)$ je podprostor $(A, V)$.*
b) *Je-li $(B, W)$ podprostor $(A, V)$ a $a \in B$, pak $B = \{a + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in W\}$.*

Předchozí poznámka umožňuje zápis libovolnéhp podprostoru $(B, W)$ afinního podprostoru $(A, V)$ ve tvaru $B = b + W$, tj. jako součtu vybraného bodu $b \in B$ a podprostoru $W$. Všimněme si, že $A = a + V$ pro všechny body $a \in A$.

**Příklad.** Mějme afinní prostor $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ (nebo euklidovský prostor $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3, \omega)$). Pak každou reálnou přímku můžeme vyjádřit ve tvaru $\{a + t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathbf{R}\} = a + \langle \mathbf{v} \rangle$ a každou rovinu můžeme vyjádřit ve tvaru $\{a + (s\,\mathbf{u} + t\,\mathbf{v}) \mid s, t \in \mathbf{R}\} = a + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, kde $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé vektory. V Poznámce 8.2 a) jsme ukázali, že přímky a roviny jsou podprostory afinního prostoru $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$. Přidáme-li k nim ještě podprostory tvaru $a + \{\mathbf{0}\}$ a $\mathbf{R}^3 = a + \mathbf{R}^3$, pak nám Poznámka 8.2 b) říká, že už žádné další podprostory afinního prostoru $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ neexistují.

**Definice.** *Souřadnou soustavou* afinního prostoru $(A, V)$ budeme rozumět takovou posloupnost $S = \{a, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$, že $a \in A$ a $B = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je báze $V$. *Souřadnicemi* bodu $b \in A$ vzhledem k souřadné soustavě $S$ nazveme souřadnice vektoru $b - a$ vzhledem k bázi $B$, píšeme $\{b\}_S = \{b - a\}_B$.

*Kartézskou souřadnou soustavou* euklidovského prostoru $(A, V, g)$ nazveme souřadnou soustavu $S = \{a, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ afinního prostoru $(A, V)$, v níž $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ tvoří ortonormální bázi unitárního prostoru $(V, g)$.

**Poznámka 7.4** (Transformace souřadnic)**.** *Nechť $S = \{a, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ a $S' = \{a', \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_n\}$ jsou dvě souřadné soustavy v afinním prostoru $(A, V)$. Pak pro každý bod $b \in A$ platí*

$$\{b\}_S = \{a'\}_S + \{b\}_{S'}[\mathrm{Id}]^{\mathsf{T}}_{(\mathbf{v}'_i)(\mathbf{v}_i)},$$

*kde $[\mathrm{Id}]_{(\mathbf{v}'_i)(\mathbf{v}_i)}$ je matice přechodu od báze $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ k bázi $(\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n)$.*

**Příklad.** Uvažujme afinní prostor $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$ se sčítáním bodu a vektoru po složkách (tj. daným sčítáním v reálném vektorovém prostoru $\mathbf{R}^2$). Pro přehlednost budeme body i jejich souřadnice označovat $[r, s] \in \mathbf{R}^2$ narozdíl od vektorů značených $(r, s) \in \mathbf{R}^2$. Mějme souřadné soustavy $S = \{[0, 0], (1, 0), (0, 1)\}$ a $S' = \{[1, 1], (1, 1), (1, -1)\}$ a označme $B = ((1, 0), (0, 1))$ a $B' = ((1, 1), (1, -1))$. Známe-li souřadnice bodu $\{b\}_{S'} = [1, 2]$. Určíme podle Poznámky 8.3 jeho souřadnice vzhledem ke (kanonické) bázi $S$:

$$\{b\}_S = \{[1, 1]\}_S + [1, 2][\mathrm{Id}]^{\mathsf{T}}_{B'B} = \{[1, 1] - [0, 0]\}_B + [1, 2] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= [1, 1] + [3, -1] = [4, 0].$$

**Věta 7.5** (Popis podprostorů rovnicemi)**.** *Buď $V$ vektorový prostor nad tělesem $T$ dimenze $n$, $W$ jeho podprostor dimenze $n - k$, $S = \{a, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ souřadná soustava v afinním prostoru $(A, V)$ a nechť $(B, W)$ je podprostor $(A, V)$, kde $B = b + W$. Pak existuje matice $M$ typu $(k, n)$ a vektor $\mathbf{y} \in T^k$ tak, že bod $c \in A$ leží v $B$ právě tehdy, když $M\{c\}^{\mathsf{T}}_S = \mathbf{y}^{\mathsf{T}}$.*

*Důkaz.* Označme $D = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ a $W_D = \{\{\mathbf{w}\}_D \in \mathbf{T}^n |\ \mathbf{w} \in W\} \subseteq \mathbf{T}^n$. Pak je $W_D$ podprostor dimenze $n-k$ prostoru $\mathbf{T}^n$. Zvolme nějakou bázi $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-k})$ podprostoru $W_D$ a seřaďme vektory $\mathbf{w}_i$ do matice $B = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{n-k} \end{pmatrix}$. Matice $B$ má zřejmě hodnost $n - k$ a existuje nějaká báze $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \subseteq T^n$ podprostoru všech řešení homogenní soustavy s maticí $B$. Položme $M = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k \end{pmatrix}$. Snadno nahlédneme, že $M$ je matice hodnosti $k$, jejíž množinu všech řešení tvoří právě $W_D$. Podle Poznámky 8.3 je $c \in B$, právě když $c - b \in W$, tj. $\{c - b\}_D \in W_D$. To nastává v důsledku Poznámky 8.1 b) právě tehdy, když $\mathbf{0} = M\{c - b\}^{\mathsf{T}}_D = M\{c - a\}^{\mathsf{T}}_D - M\{b - a\}^{\mathsf{T}}_D = M\{c\}^{\mathsf{T}}_S - M\{b\}^{\mathsf{T}}_S$, což je konečně ekvivalentní tomu, že $M\{c\}_S = \mathbf{y}^{\mathsf{T}}$, kde $\mathbf{y} = M\{b\}_S$. □

**Příklad.** Buď $S = \{[0, 0, 0, 0], (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ souřadná soustava v afinním prostoru $(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^4)$ a buď $(B, W)$ podprostor $(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^4)$, kde $W =$

$\langle(2,1,-2,-1),(1,1,3,1)\rangle$ a $B = [0,2,1,0] + W$. Najdeme podle Věty 8.5 rovnice, které nám vzhledem k souřadné soustavě $S$ určují podprostor $B$.

Snadno zjistíme, že například vektory $(5,-8,1,0)$ a $(2,-3,0,1)$ tvoří bázi řešení homogenní soustavy rovnic s maticí $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Dále $\{[0,2,1,0]\}_S = [0,2,1,0]$, proto v podprostoru $B$ leží právě ty body $x \in A$ pro něž

$$\begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} x^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} [0,2,1,0]^{\mathrm{T}} = [-15,-6]^{\mathrm{T}}.$$

Tedy $\{[x_1,x_2,x_3,x_4]\}_S = [x_1,x_2,x_3,x_4] \in B$ právě tehdy, když

$$\begin{aligned} 5x_1 - 8x_2 + x_3 &= -15, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 &= -6. \end{aligned}$$

**Definice.** Buď $(B_1,W_1)$ a $(B_2,W_2)$ dva podprostory afinního prostoru $(A,V)$. Pak řekneme, že podprostory $(B_1,W_1)$ a $(B_2,W_2)$ jsou

- *rovnoběžné*, pokud $W_1 \subseteq W_2$ nebo $W_2 \subseteq W_1$,
- *různoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné a $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$,
- *mimoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné ani různoběžné.

**Poznámka 7.6.** *Nechť $(B_1,W_1)$ a $(B_2,W_2)$ jsou dva podprostory afinního prostoru $(A,V)$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní.*

(1) $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$.
(2) *Pro každé $b_1 \in B_1$ a $b_2 \in B_2$ je $b_1 - b_2 \in W_1 + W_2$.*
(3) *Existují $b_1 \in B_1$ a $b_2 \in B_2$ takové, že $b_1 - b_2 \in W_1 + W_2$.*

**Příklad.** Podprostory $[1,1,2,0] + \langle(1,0,1,0),(1,1,0,0)\rangle$ a $[0,0,1,0] + \langle(0,0,0,1)\rangle$ afinního prostoru $(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^4)$ podle definice zřejmě nejsou rovnoběžné, neboť platí, že $\langle(1,0,1,0),(1,1,0,0)\rangle \cap \langle(0,0,0,1)\rangle = \{\mathbf{0}\}$. Navíc $(1,1,1,0) = [1,1,2,0] - [0,0,1,0] \notin \langle(1,0,1,0),(1,1,0,0),(0,0,0,1)\rangle$, proto jsou podprostory podle Poznámky 8.6 mimoběžné.

**Příklad** (Vzdálenost mimoběžných podprostorů)**.** Buď $(B_1,W_1)$ a $(B_2,W_2)$ dvojice mimoběžných podprostorů euklidovského prostoru $(A,V,g)$. *Vzdáleností* dvou bodů $a,b \in A$ budeme rozumět hodnotu $\|a-b\|_g$ a vzdáleností podprostorů $B_1$ a $B_2$ budeme nazývat hodnotu $d(B_1,B_2) = min\{\|b_1 - b_2\|_g |\ b_1 \in B_1,\ b_2 \in B_2\}$. Pokud $B_1 = a_1 + W_1$ a $B_2 = a_2 + W_2$, hledáme minimální hodnotu $\|(a_1-a_2) - \mathbf{w}\,\|_g$, kde $\mathbf{w} \in W_1 + W_2$. Z Poznámky 3.17 víme, že hodnota $\|(a_1-a_2) - \mathbf{w}\,\|_g$ je minimální, pokud $\mathbf{w} = P_{W_1+W_2}(a_1-a_2)$, tj. vektor je $(a_1-a_2) - \mathbf{w}$ kolmý na $W$. Můžeme tedy úkol řešit pomocí metody nejmenších čtverců.

Mějme $B_1 = [1,0,5] + \langle(1,1,2)\rangle$ a $B_2 = [0,0,1] + \langle(1,0,1)\rangle$ dva mimoběžné podprostory euklidovského prostoru $(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3,\omega)$. Pomocí metody nejmenších čtverců zjistíme, že $([1,0,5]-[0,0,1]) - 1\cdot(1,1,2) - 1\cdot(1,0,1) = (-1,-1,1)$ je kolmou částí rozkladu vektoru $[1,0,5]-[0,0,1]$ na část vektoru z $W$ a $W^{\perp}$. Z předchozí úvahy plyne, že vzdálenost podprostorů $B_1$ a $B_2$ je $\|(-1,-1,1)\|_\omega = \sqrt{3}$.