Smíšené stavy

Smíšeným stavem systému rozumíme pravděpodobnostní kombinaci stavů, o kterých jsme mluvili dosud, nazývaných *čisté.* (Všimněme si, že formálně je čistý stav speciální případ stavu smíšeného). Z početních důvodů se smíšené stavy obvykle reprezentují pomocí matice hustoty, nikoli pomocí vektoru. Matice hustoty smíšeného stavu je tedy tvaru

$$\rho = \sum p_i \rho_i,$$

kde p_i jsou nezáporná čísla se součtem jedna (tedy diskrétní pravděpodobnostní rozdělení) a ρ_i jsou matice hustot. Množina $\{(\rho_i, p_i)\}$, kde $\sum p_i = 1$ se nazývá *soubor stavů.* Smíšený stav tedy představuje situaci, kdy kromě základní kvantově-mechanické nejistoty o výsledku měření, existuje také „obyčejná“ pravděpodobnostní nejistota ohledně toho, v jakém čistém stavu systém je. Všimněme si, že smíšený stav dostaneme i tehdy, budou-li stavy ρ_i samy smíšené. To ukazuje na základní výhodu tohoto přístupu ke smíšeným stavům: s maticí hustoty můžeme počítat jako s jedním stavem bez ohledu na to, zda je smíšený nebo čistý. Snadno vidíme, že to platí i o vývoji systému: je-li ρ matice hustoty nějakého systému, pak je $U\rho U^\dagger$ matice hustoty tohoto systému po aplikaci unitární operace U (včetně příslušné pravděpodobnostní interpretace).

Předchozí pozorování můžeme ještě zesílit: se smíšeným stavem můžeme operovat **aniž bychom věděli, z jakých čistých stavů se skládá**. Stejná matice hustoty totiž může vzniknout z různých souborů stavů. Konstatovali jsme však, že nám neznalost „správného“ rozkladu matice hustoty na čisté stavy nebrání ve výpočtu vývoje systému. Nyní ukážeme, že totéž platí i pro měření: matice hustoty jednoznačně určuje výsledky měření (tedy jejich pravděpodobnostní rozdělení). Za tím účelem definujeme obecnější pojem měření, než je měření projektivní, na které jsme se omezili při formulaci příslušného postulátu.

Postulát 3' Měření kvantového systému je dáno systémem operátorů $\{M_i\}$ splňujících podmínku

$$\sum_i M_i^\dagger M_i = I.$$

Po měření stavu $|\psi\rangle$ je systém s pravděpodobností $\langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle$ ve stavu

$$\frac{M_i|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle}}.$$

Je-li použití operátoru M_i spojeno s naměřenou hodnotou m_i, je očekávaná hodnota měření

$$E(m) = \sum_i p_i m_i = m_i\langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle = \langle\psi|M|\psi\rangle\,,$$

kde

$$M = \sum m_i M_i^\dagger M_i$$

se nazývá *pozorovatelná veličina.*

Při použití matice hustoty $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ a vztahu $\langle\psi|A|\psi\rangle = \mathrm{tr}(A|\psi\rangle\langle\psi|)$ dostáváme ekvivalentní podmínku, že i-tý výsledek měření stavu ρ nastane s pravděpodobností

$\mathrm{tr}(M_i^\dagger M_i \rho)$ a systém bude po takovém měření ve stavu

$$\frac{M_i \rho M_i^\dagger}{\mathrm{tr}(M_i^\dagger M_i \rho)}\,.$$

Střední hodnota měření je $\mathrm{tr}(M\rho)$.

Stav po měření můžeme tedy chápat jako smíšený stav $\sum_i M_i \rho M_i^\dagger$. Z linearity dostáváme požadovanou vlastnost, že výše uvedené platí i pokud byl původní měřený stav ρ smíšený, a to nezávisle na konkrétním souboru stavů. Ukažme to například na střední hodnotě. Je-li $\rho = \sum p_i \rho_i$, kde ρ_i jsou čisté stavy, pak střední hodnota měření čistého stavu ρ_i je $\mathrm{tr}(M\rho)$. Protože stav ρ_i je měřen s pravděpodobností p_i, je střední hodnota měření smíšeného stavu

$$\sum p_i \,\mathrm{tr}(M\rho_i) = \mathrm{tr}(M \sum p_i \rho_i) = \mathrm{tr}(M\rho)\,.$$

Všimněme si dále, že zatímco k výpočtu stavu systému po měření potřebujeme znát operátory měření, pro statistiku výsledků stačí znát soubor $\{M_i^\dagger M_i\}$, což je rozklad identity do pozitivních operátorů. Pro jednorázové měření, při kterém se nezajímáme o stav systému po měření (to např. přirozeně platí pro měření destruktivní, jako je např. detekce fotonu), stačí zadat takový soubor $\{E_i\}$. Takto definované měření se v literatuře nazývá POVM (positive operator value measurement).

Diagonální tvar matice hustoty čistého stavu obsahuje právě jednu jedničku na diagonále. Z toho plyne, že stopa matice čistého, a tudíž i libovolného smíšeného stavu je rovna jedné. Protože matice hustoty jsou pozitivní operátory, představuje jejich diagonální tvar diskrétní pravděpodobnostní rozdělení. Jinak řečeno, každou smíšenou matici lze chápat jako pravděpodobnostní kombinaci projekcí na nějakou ortonormální bázi.

Připomeňme, že matice hustoty obecného čistého kubitu je tvaru $\frac{1}{2}(E + xX + yY + zZ)$, kde (x, y, z) je jednotkový vektor. Smíšený stav kubitu je tedy tvaru

$$\frac{1}{2}\sum p_i \left(E + x_i X + y_i Y + z_i Z\right)\,.$$

Vektor

$$\sum p_i \left(x_i, y_i, z_i\right)$$

je váženým průměrem (těžištěm) bodů (x_i, y_i, z_i). Z konvexnosti koule plyne, že je to vektor menší než jedna. Naopak každý bod v jednotkové kouli reprezentuje smíšený stav. Blochova koule tedy reprezentuje všechny smíšené stavy, přičemž čisté stavy leží na kulové ploše.

Nechť je ρ^{AB} matice hustoty složeného systému. *Redukovanou matici hustoty* na systém A definujeme jako

$$\rho^A := \mathrm{tr}_B\left(\rho^{AB}\right),$$

kde tr_B je tzv. *částečná stopa* definovaná lineárním rozšířením vztahu

$$\mathrm{tr}_B(\rho_a \otimes \rho_b) = \mathrm{tr}(\rho_b)\rho_a$$

neboli, zapsáno v bázových vektorech,

$$\mathrm{tr}_B\left(|a_i\rangle\langle a_j| \otimes |b_k\rangle\langle b_\ell|\right) = \delta_{k\ell}|a_i\rangle\langle a_j|\,.$$

Redukovaná matice hustoty ρ^A má jasný a důležitý fyzikální význam. Uchopuje vlastnosti systému A chápaného izolovaně. Přesněji, výsledky měření samotného systému A jsou stejné pro stav ρ^A jako pro stav ρ^{AB}. Ještě přesněji, měření stavu ρ^A dané operátory (M_j) má stejné vlastnosti jako výsledky měření stavu ρ^{AB} dané operátory $(M_j \otimes E)$. Jiný fyzikální pohled na stejné tvrzení je, že matice ρ^A popisuje stav systému A po (jakémkoli!) měření systému B, u kterého neznáme výsledek (tato nejistota se promítne do smíšeného stavu ρ^A). Každé takové měření totiž uvolňuje systém A z propletenosti se systémem B. Tyto dva pohledy jsou ekvivalentní: jsme-li omezeni na měření systému A, nemůžeme poznat, jestli systém B byl, nebo nebyl měřen.