Propletené stavy

Standardní bázi kubitu máme ve zvyku značit symboly $|0\rangle$ a $|1\rangle$. Existuje ovšem nekonečně mnoho jiných ortonormálních bází, které vzniknou ze standardní báze vždy nějakou unitární transformací. Použijeme-li jako takovou matici přechodu Hadamardovu matici

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

dostaneme bázi označovanou často znaménky plus a minus:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

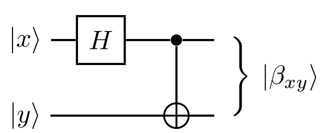
Pro dvoukubitový systém je jedou z přirozených alternativ ke kanonické bázi ortonormální báze označovaná jako Bellovy stavy. Jedná se o vektory

$$|\beta_{xy}\rangle = \frac{|0y\rangle + (-1)^x |1\bar{y}\rangle}{\sqrt{2}},$$

kde $\bar{y}$ označuje negaci y, neboli $\bar{y} = 1 - y$. Tedy

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}},$$
$$|\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Jména stavů jsou odvozena z tranformace $|xy\rangle \mapsto |\beta_{xy}\rangle$, kterou lze znázornit takto:



Věta o neklonování

Neurčitost veličin v kvantové mechanice je dána povahou měření. Měřený systém zkolabuje do naměřeného stavu čímž se nezvratně ztrácí možnost zjistit, v jakém stavu se systém nacházel před měřením. Tuto obtíž by bylo možné vyřešit pořízením kopie měřeného stavu. Opakovaným měřením kopií neznámého stavu by byl možné s velkou přesností určit jeho stav. Tato možnost je ale znemožněna skutečností, že kopii neznámého stavu nelze provést. Tento fakt bývá označován jako *věta o neklonování.*

Předpokládejme, že existuje unitární transformace U, která kopíruje stav $|\varphi\rangle$ do stavu, který můžeme označit $|0\rangle$, tedy

$$U|0\rangle \otimes |\varphi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle.$$

Předpokládejme, že je stejně možné zkopírovat i stav $|\psi\rangle$:

$$U|0\rangle \otimes |\psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle.$$

Skalárním součinem levých a pravých stran výše uvedených rovnic dostáváme

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^2,$$

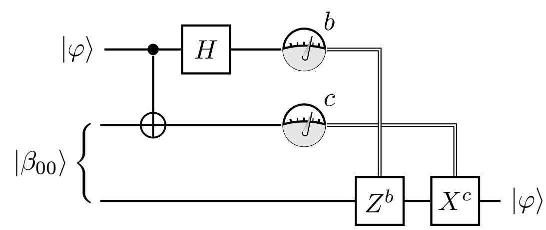
z čehož plyne, že $\langle\varphi|\psi\rangle$ je rovno nule nebo jedné. Stavy jsou si tedy buď rovny, nebo jsou na sebe kolmé. Vidíme, že kopírovat lze vždy pouze dva konkrétní vzájemně kolmé stavy, pro jiné stavy se kopírování nezdaří. Pro dva známé bázové stavy je přitom kopírování bezcenné, lze je totiž spolehlivě a bez ztráty informace rozlišit příslušným měřením.

Kvantová teleportace

Následující experiment je jistou protiváhou věty o neklonování. Ukazuje, že je možné překopírovat libovolný (neznámý) kvantový stav do jiného. Předpokladem je sdílený propletený pár kubitů, což je v kvantové informatice často využívaná situace, a přenos dvou klasických bitů informace. K porušení věty o neklonování nedochází, protože originál kopírovaného kubitu je zničen. Proto mluvíme spíše o teleportaci než o kopírování.

Předpokládejme, že Alice vlastní první a Bob druhý kubit z propleteného páru $|\beta_{00}\rangle$. Alice má navíc neznámý kubit ve stavu $|\varphi\rangle$. Oba protagonisté mohou být prostorově vzdáleni, ale potřebují prostředek pro klasickou komunikaci.

Podstata teleportace je velmi jednoduchá. Alice pouze změří dvoukubitový systém sestávající z jejího propleteného kubitu a neznámého kubitu v Bellově bázi. To znamená provést transformaci z Bellovy báze do kanonické a poté změřit. Výsledky měření oznámí Bobovi a ten na jejich základě doladí svůj kubit, který je už téměř ve stavu φ. Celý proces zobrazuje následující schéma, kde dvojitá čára představuje komunikaci klasického bitu.



Proměnné b a c jsou 0 nebo 1 podle naměřeného bázového stavu. Umocněním Z^b a X^c vyjadřujeme fakt, že se dané hradlo v závislosti na výsledku měření buď použije, nebo ne.

Ověřme korektnost výsledku. Nechť $|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Na počátku je tedy celý systém ve stavu

$$\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle.$$

Po aplikaci CNOT dostáváme

$$\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|110\rangle + \beta|101\rangle.$$

a použití H dává

$$\frac{(\alpha|0\rangle + \alpha|1\rangle)|00\rangle + (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)|11\rangle + (\beta|0\rangle - \beta|1\rangle)|10\rangle + (\beta|0\rangle - \beta|1\rangle)|01\rangle}{\sqrt{2}},$$

což lze uzávorkovat jako

$$\frac{|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\beta|0\rangle - \alpha|1\rangle)}{\sqrt{2}}.$$

Měřením zkolabuje superpozice do stavu, který je projekcí na bázové stavy odpovídající naměřeným hodnotám. Vidíme tedy, že příslušným použitím hradel Z (změna znaménka) a X (záměna bázových vektorů) dostáváme skutečně $|\varphi\rangle$ na třetím kubitu.

Superhusté kódování

Dalším přímočarým využitím sdílení propletených kubitů je fakt, že Alice může sdílený pár převést na libovolný z Bellových stavů působením pouze na svůj, tedy první kubit. Pokud potom pošle svůj kubit Bobovi, předá tím najednou dva bity informace, které Bob přečte změřením systému v Bellově bázi. Modifikace, které Alice provede, pokud je zpráva jiná než výchozí 00, shrnuje tato tabulka:

Transformace prvního kubitu	Účinek na $\lvert\beta_{00}\rangle$
$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lvert\beta_{00}\rangle \mapsto \lvert\beta_{01}\rangle$
$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\lvert\beta_{00}\rangle \mapsto \lvert\beta_{10}\rangle$
$iY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\lvert\beta_{00}\rangle \mapsto \lvert\beta_{11}\rangle$

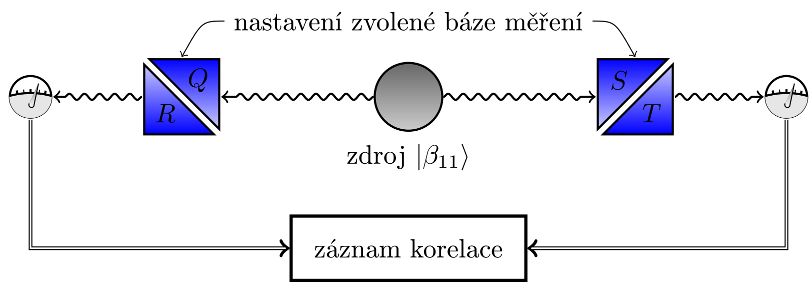
Bellovy nerovnosti

Bellovy stavy se také někdy nazývají EPR-dvojice, protože paradoxní chování těchto propletených stavů bylo důvodem pochybností, které vůči kvantové mechanice vznesli ve svém článku *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?* z roku 1935 fyzikové A. Einstein, B. Podolski a N. Rosen. Jde o to, že změření jednoho z propletených kubitů určuje výsledek měření na druhém kubitu, a to i tehdy, jsou-li tyto kubity prostorově vzdáleny. Pokud totiž např. Alice a Bob sdílejí dvojici β_{00}, Alice změří svůj kubit a dostane výsledek odpovídající stavu $\lvert x\rangle$, musí takový výsledek dostat i Bob. Výsledky jsou tedy synchronizované a obě možnosti nastávají s poloviční pravděpodobností. To samo o sobě není nic překvapivého. Můžeme to vysvětlit tak, že při generování páru kubitů získají oba vždy stejnou hodnotu příslušných veličin, přičemž ovšem neumíme určit kterou (odtud podezření na neúplnost kvantově-mechanického popisu). Není nutné předpokládat, jak to dělá kvantová mechanika, že k synchronizaci výsledků dochází až měřením.

Bell navrhl experiment, který umožňuje mezi klasickým pravděpodobnostním modelem a modelem kvantově mechanickým rozhodnout. Realizace experimentu potvrdila předpovědi kvantové mechaniky, což se považuje za jedno z nejvýznamnějších potvrzení její správnosti.

Bellův experiment vypadá následovně. Generujme dvojici propletených kubitů ve stavu β_{11} a oba kubity prostorově oddělíme. Každý z kubitů poté změříme, přičemž pro měření prvního kubitu zvolíme náhodně jednu z bazí odpovídající náhodné veličině Q nebo R, zatímco pro měření druhého kubitu zvolíme opět náhodně jednu z veličin S a T. Konkrétní podoba těchto veličin je dána v Tabulce 1. Existují celkem čtyři různá měření: (Q,S), (Q,T), (R,S) a (R,T). Výsledkem měření je ve všech případech na obou stranách 1 nebo -1 a nás zajímá součin těchto hodnot, který vyjadřuje korelaci výsledků. Je to hodnota veličin $Q \otimes S$, $Q \otimes T$, $R \otimes S$ a $R \otimes T$. Experiment opakujeme mnohokrát, spočítáme střední hodnoty výsledků všech čtyř možných měření (tedy míru jejich korelovanosti) a konečně spočteme

$$\mathbf{E}(R \otimes S) + \mathbf{E}(Q \otimes S) + \mathbf{E}(R \otimes T) - \mathbf{E}(Q \otimes T).$$



Předpokládejme nyní, že

- hodnota veličin Q, R, S a T odpovídá nějakému *reálné vlastnosti* měřených částic. Částice by tuto vlastnost měly, i kdyby k měření nedošlo. Naměřená hodnota (plus nebo mínus jedna) tuto vlastnost vyjadřuje;
- hodnota veličin Q a R je nezávislá na měření veličiny S nebo T, a naopak hodnota veličin S a T je nezávislá na měření veličin Q nebo R. To je předpoklad vyjadřující *lokální charakter* fyzikálních jevů: změna na jednom místě nezpůsobuje bezprostředně změnu na jiném, vzdáleném místě (vzdálené místo může být ovlivněno až šířením změny v prostoru, která je omezena rychlostí světla).

Díky předpokladu reality můžeme mluvit o veličinách $R+Q$ a $R-Q$ jako o nějakých vlastnostech první částice. Vzhledem k tomu, že všechny uvažované veličiny nabývají hodnot ± 1, má jedna z uvedených veličin pro libovolnou částici hodnotu 0 a druhá hodnotu ± 2. Tyto dvě hodnoty jsou přitom díky předpokladu lokality nezávislé na volbě toho, zda se rozhodneme měřit veličinu S, nebo T. Hodnoty těchto veličin na sobě samozřejmě závislé být mohou, ale jejich závislost vzniká v okamžiku generování dvojice, nikoli v okamžiku měření. Můžeme tedy uvažovat veličiny $(R+Q)\otimes S$ a $(R-Q)\otimes T$, které vyjadřují vlastnosti propletené dvojice. Díky zmíněné nezávislosti je hodnota jedné z těchto veličin 0 a druhá ± 2. Všimněme si, že opravdu používáme předpoklad lokality: skutečnost, že pokud $R+Q$ má hodnotu ± 2, má $R-Q$ hodnotu 0, a naopak pokud $R+Q$ má hodnotu ± 0, má $R-Q$ hodnotu 2, není ovlivněna tím, že $R+Q$ je doprovázeno měřením S, zatímco $R-Q$ měřením T. Z toho plyne, že hodnota

$$\mathbf{E}((R+Q)\otimes S)+(R-Q)\otimes T)=\mathbf{E}(R\otimes S)+\mathbf{E}(Q\otimes S)+\mathbf{E}(R\otimes T)-\mathbf{E}(Q\otimes T)$$

je mezi -2 a 2.

Podívejme se nyní, co o této hodnotě říká kvantová mechanika. Připomeňme, že střední hodnota pozorovatelné veličiny A měřené na systému ve stavu $|\varphi\rangle$ je dána vztahem

$$\langle\varphi|A|\varphi\rangle.$$

Jelikož souřadnice $|\beta_{11}\rangle$ v kanonické bázi jsou $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)$, dostáváme z Tabulky 1 snadno (rozhodující jsou jen hodnoty označené šedým pozadím), že

$$\mathbf{E}(R\otimes S)=\mathbf{E}(Q\otimes S)=\mathbf{E}(R\otimes T)=-\mathbf{E}(Q\otimes T)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

a tedy

$$\mathbf{E}((R+Q)\otimes S)+(R-Q)\otimes T)=2\sqrt{2}.$$

Tato hodnota, která je v rozporu s uvedenými lokálně-realistickými úvahami, může být experimentálně ověřena, což vyznívá, jak už jsme řekli, jako vítězství kvantové

TABULKA 1. Veličiny použité v Bellově experimentu

Veličina	Matice	Vlastní čísla	Vlastní vektory
Q	$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	1 -1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
R	$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	1 -1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
S	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(Z+X) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	1 -1	$\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ -1 \end{pmatrix}$
T	$\frac{1}{\sqrt{2}}(Z-X) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	1 -1	$\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Q \otimes S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R \otimes S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q \otimes T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R \otimes T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mechaniky (a její většinové, tzv. kodaňské interpretace, kterou zde používáme) ve sporu s klasickými fyzikálními představami autorů EPR, které můžeme v souladu s výše uvedenými předpoklady označit jako *lokální realismus*.