ÚVOD DO FUNCIONÁLNÍ ANALÝZY - PŘEDNÁšKA ZIMNÍ SEMESTR 2016-17

Literatura.

Přednášku lze doplnit studiem z literatury. Z velkého množství např.

W. Rudin, Functional analysis (anglicky);

D. Werner, Funktionalanalysis (německy);

M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, Banach Space Theory (anglicky);

P. Habala, P. Hájek, V. Zizler, Introduction to Banach Spaces, I a II (kapitoly 1, 2, 4, 6 v I, index v II) (anglicky);

J. Lukeš, Úvod do funkcionální analýzy;

J. Lukeš: Zápisky z funkcionální analýzy (pro pokročilé);

M. Katětov a J. Jelínek, Úvod do funkcionální analýzy;

L. Mišík, Funkcionálna analýza;

K. Najzar, Funkcionální analýza;

I. Netuka a J. Veselý, Příklady z funkcionální analýzy;

P. Quittner, Funkcionálna analýza v príkladoch.

1. Pojmy normovaný lineární prostor, Banachův a Hilbertův prostor

1.1. **Vektorové prostory.** Vektorový prostor $(X, +, \cdot)$ nad tělesem $\mathbb{F}$ (reálných čísel $\mathbb{R}$ či komplexních čísel $\mathbb{C}$).

Příklady $\mathbb{R}^\Gamma$, $\mathbb{C}^\Gamma$ funkcí a jeho podprostory (např. $c_0(\Gamma) \subset \mathbb{R}^\Gamma$, $\ell_\infty(\Gamma)$).

Pojmy nezávislá množina, báze, dimenze (existence).

Pojmy úsečka, konvexní množina, $\operatorname{span} A$, $\operatorname{conv} A$.

1.2. **Normované lineární prostory.** Definice normy, normovaného lineárního prostoru (zkráceně NLP) $(X, \| \, \|)$ nad $\mathbb{R}$ či $\mathbb{C}$.

Příklady norem na $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, příklady prostorů funkcí, prostorů posloupností, prostorů měr ($\ell^\infty(\Gamma)$, ℓ^p ($p \in [1, \infty)$), $L^p(\Omega, \mu)$ ((Ω, μ) prostor s mírou - $p \in [1, \infty]$), $C^k(\overline{\Omega})$, $M(\Sigma) = M(K, \Sigma)$ - prostor borelovských regulárních znaménkových měr na σ-algebře Σ borelovských podmnožin kompaktního (metrického) prostoru K).

Součin dvou metrických prostorů - metriky na součinu souhlasící s konvergencí po složkách.

Tvrzení 1 (o metrice a operacích)**.**

(a) Je-li $(X, \| \, \|)$ normovaný lineární prostor, pak $\rho(x, y) = \|x - y\|$ je metrika.

(b) Zobrazení $+ : X \times X \to X$, $\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$ a $\| \cdot \| : X \to [0, \infty)$ jsou spojitá.

(c) Speciálně, zobrazení $x \in X \mapsto cx \in X$ pro c nenulový prvek $\mathbb{F}$ a $x \in X \mapsto a + x \in X$ pro $a \in X$ nenulový prvek X jsou homeomorfismy.

Pojmy konvergence posloupnosti, konvergence řady, uzavřenost množiny, otevřenost množiny, uzávěr, vnitřek, separabilita, úplnost a Bolzano-Cauchyova podmínka. Souvislost mezi uzavřeností a úplností. Kompaktnost. Separabilita (a neseparabilita) konkrétních prostorů. Vlastnosti c, ℓ^∞, ... - viz cvičení.

Uzavřené lineární (konvexní) obaly $\overline{\operatorname{span}} A$ ($\overline{\operatorname{conv}} A$) a uzávěry lineárních (konvexních) obalů. Uzavřené koule $B_X(x,r)$, B_X, otevřené koule $U_X(x,r)$, U_X, sféry $S_X(x,r)$, S_X.

Ekvivalence norem.

Tvrzení 2 (o normě a jednotkové kouli). *Nechť $(X, \| \ \|)$ je normovaný lineární prostor. Pak platí:*

(a) Pro normu $\|\cdot\|'$ na X je $\|\cdot\| = \|\cdot\|'$, právě když $B_{(X,\|\cdot\|)} = B_{(X,\|\cdot\|')}$ (speciální případ (c)).
(b) Uzavřená jednotková koule $B_X = B_{(X,\|\cdot\|)}$ je uzavřená konvexní množina. Navíc $B_X = -B_X$, $\bigcup_{t>0} tB_X = X$, $\bigcap_{t>0} tB_X = \{0\}$.
(c) Normy $\| \ \|_1$ a $\| \ \|_2$ na X jsou ekvivalentní, právě když existují $a, b > 0$ taková, že $aB_{(X,\| \ \|_1)} \subset B_{(X,\| \ \|_2)} \subset bB_{(X,\| \ \|_1)}$.
(d) Prostory $(X, \| \ \|_1)$ a $(X, \| \ \|_2)$ mají stejné otevřené množiny, jsou-li normy $\| \ \|_1$ a $\| \ \|_2$ ekvivalentní.

Konec 1. přednášky.

Poznámka - cvičení. Pro množinu B_X s vlastnostmi z (b) pro prostor nad $\mathbb{R}$ lze definovat normu $\|x\|$ ($= \inf\{t > 0 : x \in tB_X\}$) tak, že $B_X = B_{(X,\| \ \|)}$. Pojem absolutní konvexity a prostory nad $\mathbb{C}$.

1.3. **Spojitá lineární zobrazení.** Aditivita, homogenita, jádro $\ker T$, obraz $\operatorname{ran} T = T(X)$, prostota a jednoznačnost řešení rovnic, surjektivita a řešitelnost rovnic, obraz koule, obraz konvexní množiny.

Tvrzení 3 (spojitost operátoru). *Následující výroky o lineárním zobrazení $T : (X, \| \ \|_X) \to (Y, \| \ \|_Y)$ jsou ekvivalentní:*

(a) T je spojité.
(b) T je spojité v nule.
(c) $T(B_X)$ je omezená v Y ($T(B_X) \subset LB_Y$ pro nějaké $L \geq 0$).
(d) Existuje $L \in [0, \infty)$ tak, že pro všechna $x \in X$ platí $\|T(x)\| \leq L\|x\|$.
(e) T je lipschitzovské (a tedy stejnoměrně spojité).

Definice $\|T\|$ jako nejmenšího L, pro které platí (4) (ekvivalentně (3), tj. $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\}$).

Na některých Banachových prostorech X nemusí spojité lineární zobrazení $T : X \to \mathbb{R}$ nabývat hodnotu $\|T\|$ v žádném prvku B_X (např. $T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^n}$ pro $x \in c_0$ - cvičení).

Lineární zobrazení $T \in L(X,Y)$ je spojité, právě když obrazy omezených množin jsou omezené množiny. Ekvivalentně, když obraz nějaké koule je omezená množina.

Spojité lineární zobrazení $T \in L(X,Y)$ mezi normovanými lineárními prostory se nazývá též spojitý operátor nebo omezený operátor (nejde ovšem o omezenost v obvyklém smyslu, jak ji známe pro zobrazení do metrického prostoru). Často se používá značení Tx namísto $T(x)$.

Věta 4 (prostor omezených operátorů).

(a) Množina $L(X,Y)$ omezených operátorů mezi normovanými lineárními prostory X a Y s operacemi $S + T$ a tT pro $t \in \mathbb{F}$, $S, T \in L(X,Y)$ a s $\| \ \| = \| \ \|_{L(X,Y)}$ definovanou jako výše je normovaný lineární prostor.
(b) Jsou-li $S \in L(X,Y)$ a $T \in L(Y,Z)$, kde X, Y, Z jsou normované lineární prostory, je $T \circ S \in L(X,Z)$ a $\|T \circ S\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.

(c) Je-li Y Banachův prostor, je $L(X,Y)$ též Banachův prostor.

Značení $L(X,Y)$, $L(X)$, X^*.
Konec 2. přednášky.

1.4. **Speciální operátory a relace mezi prostory.** *Izomorfismy, izometrie, izomorfní prostory, lineárně izometrické prostory*
Pojmy lineárního homeomorfismu (izomorfismu) a lineární izometrie. Pojem relací X je izomorfní (lineárně izometrický) s Y pro normované lineární prostory a značení $X \simeq Y$ ($X \cong Y$).

Tvrzení 5 (o izomorfismech)**.**
(a) Lineární surjekce $T : X \to Y$ mezi normovanýni lineárními prostory je izomorfismus, právě když existují $a, b > 0$ taková, že pro všechna $x \in X$ platí

$$a\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq b\|x\|_X.$$

(b) Normy $\| \ \|_1$ a $\| \ \|_2$ na normovaném lineárním prostoru jsou ekvivalentní, právě když identický operátor $I : (X, \| \ \|_1) \to (X, \| \ \|_2)$ je homeomorfismem.
(c) Je-li X Banachův, pak každý s ním izomorfní normovaný lineární prostor je Banachův.

Pojem projekce, doplňkový podprostor a topologický součet podprostorů
Pojem lineární projekce P na vektorovém X. Pojem $X = E \oplus F$ direktního součtu vektorových podprostorů.

Tvrzení 6 (o projekci, jádru a obrazu)**.** *Nechť X je vektorový prostor a P je lineární projekce na X.*
(a) Pak $Q = I - P$ je lineární projekce, $Q(X) = \ker P$, $\ker Q = P(X)$ a $\ker P \oplus P(X) = X$.
(b) Nechť X je normovaný lineární prostor a P je spojitá lineární projekce. Pak $\ker P$, $P(X)$ jsou uzavřené v X a $Q = I - P$ je též spojitá.

Říkáme, že vektorový podprostor F normovaného prostoru X je *doplňkový*, pokud existuje spojitá lineární projekce P prostoru X na F. Prostor X je pak roven $F \oplus E$, kde $E = \ker P$. V takovém případě říkáme, že X je *topologickým součtem* F a E a píšeme $X = F \oplus_t E$. O prostoru E říkáme, že je topologickým doplňkem k F.

Ne každý uzavřený podprostor Banachova prostoru je doplňkový (např. c_0 není doplňkový v ℓ_∞ - důkaz není jednoduchý).

1.5. **Prostory se skalárním součinem.** Definice skalárního součinu a prostoru se skalárním součinem (unitárního prostoru).

Tvrzení 7 (o normě a skalárním součinu)**.**
(a) *(Cauchy-Schwarz) Je-li X prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pak $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ definuje normu na X a platí $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$. Skalární součin je spojité zobrazení vzhledem k této normě.*
(b) *(polarizační formule) Je-li X prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pak pro reálný prostor X platí*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Pro komplexní prostor X platí

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{8}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2).$$

Konec 3. přednášky.

Příklady $\ell^2(\Gamma)$, $L^2(\Omega,\mu)$ a skalární součin na nich.

Věta 8 (Jordan, von Neumann - rovnoběžníkové pravidlo)**.** *Norma $\|\cdot\|$ na vektorovém prostoru X je dána skalárním součinem, právě když pro všechna $x, y \in X$ platí $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.*

Pojem Hilbertův prostor.

1.6. **Konečně rozměrné normované lineární prostory.** V $\mathbb{F}^n$ jsou uzavřené omezené množiny kompaktní. B_{ℓ^2} ani B_{c_0} nejsou kompaktní. Také z příkladu spojitého lineárního funkcionálu $f \in c_0^*$, který nenabývá normu na B_{c_0} plyne, že B_{c_0} není kompaktní, a tedy ani totálně omezená (jde o úplný metrický podprostor).

Uvažujme opět $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^n}$ pro $x \in c_0$. Ukažte, že pro žádný prvek $x \in c_0 \setminus \ker f$ neexistuje v $\ker f$ nejbližší prvek k x.

Lemma 9 (eukleidovské prostory)**.** *Nechť X je n-dimensionální normovaný lineární prostor. Pak existuje lineární homeomorfismus (izomorfismus) eukleidovského prostoru $\mathbb{F}^n$ na X.*

Věta 10 (konečně rozměrné prostory)**.**

(a) *Každé dva normované lineární prostory stejné konečné dimenze jsou lineárně homeomorfní.*
(b) *Každý normovaný lineární prostor konečné dimenze je Banachův. Spec., je-li podprostorem Banachova prostoru Y, je jeho uzavřenou podmnožinou.*
(c) *Jednotková koule v normovaném lineárním prostoru konečné dimenze je kompaktní.*
(d) *Každé lineární zobrazení konečně rozměrného prostoru X do normovaného lineárního prostoru Y je spojité.*

V Banachových prostorech obecně neplatí, že k uzavřenému podprostoru Y existuje v jednotkové sféře prvek, který má od Y vzdálenost jedna (tedy maximální možnou vzdálenost). Ukažte to opět na prostoru $\ker f \subset\subset c_0$ pro $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^n}$ pro $x \in c_0$.

V konečně rozměrném prostoru to díky spojitosti $\operatorname{dist}(x, Y)$ v $x \in X$ a kompaktnosti sféry zřejmě platí.

Lemma 11 (Rieszovo lemma "o skoro kolmici")**.** *Nechť Y je vlastní uzavřený lineární podprostor normovaného lineárního prostoru X a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $s \in S_X$ takové, že $\|s-y\| \geq 1-\varepsilon$ pro všechna $y \in Y$.*

Konec 4. přednášky.

Věta 12 (o kompaktnosti jednotkové koule)**.** *Normovaný lineární prostor $(X, \|\ \|)$ je konečně rozměrný, právě když je B_X kompaktní.*

1.7. **Sčítání řad v normovaných lineárních prostorech.** Pojem *konvergence* řady $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Bolzano-Cauchyova podmínka, nutnost konvergence členů k nule, jednoznačnost součtu, záměna sumy a lineárních kombinací.

Pojem *absolutní konvergence* řady a vztah ke konvergenci v konečně rozměrných prostorech.

Věta 13 (o řadách a úplnosti)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když z $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$ plyne, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ konverguje (resp. konverguje bezpodmínečně).*

Pojem *bezpodmínečná konvergence* řad v normovaných lineárních prostorech X. Ekvivalence s absolutní konvergencí v konečně rozměrných prostorech a nutnost pro absolutní konvergenci v Banachových prostorech.

Příklad bezpodmínečně konvergentní řady, která nekonverguje absolutně (v ℓ^2). Bez důkazu si uveďme, že v žádném nekonečně rozměrném Banachově prostoru nejsou bezpodmínečně konvergentní řady absolutně konvergentní (Dvoretzky a Rogers).

Definice součtu zobecněné řady $\sum_{\gamma\in\Gamma}x_\gamma$ pro $x_\gamma\in X$ a Γ libovolnou množinu. Ekvivalence s bezpodmínečnou konvergencí řad pro $\Gamma=\mathbb{N}$ (cvičení). Jako snadné cvičení si rozmyslete, že $\sum_{\gamma\in\Gamma}\varepsilon_\gamma=\sup\{\sum_{\gamma\in\Delta}\varepsilon_\gamma:\Delta\subset\Gamma \text{ konečná}\}$ pro konvergentní zobecněnou řadu nezáporných čísel ε_γ, $\gamma\in\Gamma$.

Tvrzení 14 (záměna součtu zobecněné řady a spojitého zobrazení)**.** *Platí, že $\sum_{\gamma\in\Gamma}T(x_\gamma)=T(\sum_{\gamma\in\Gamma}x_\gamma)$, pokud $T\in L(X,Y)$ je spojité lineární, $x_\gamma\in X$ pro $\gamma\in\Gamma$ a zobecněná řada na pravé straně konverguje v X.*

1.8. **Hilbertovy prostory.** Ortogonální podprostory (resp. vektory), ortogonální doplněk a jeho uzavřenost, ortogonální projekce.

Věta 15 (nejbližší prvek v Hilbertově prostoru)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor a K je neprázdná uzavřená konvexní podmnožina H. Pak pro každé $x\in H$ existuje jediné $y\in K$ takové, že $\|x-y\|=dist(x,K)$, tj. existuje jediný prvek K, který je nejbližší k x.*

Poznámka. Stačilo nám, že neprázdná konvexní množina $K\subset H$ je úplný metrický podprostor unitárního prostoru (prostoru se skalárním součinem) H.

Tvrzení 16 (ortogonalita a nejbližší prvek)**.** *Nechť H je unitární prostor a Y je vektorový podprostor H. Pak pro každé $x\in H$ je $\|x-y\|=\operatorname{dist}(x,Y)$, právě když $(x-y)\perp Y$.*

Konec 5. přednášky.

Věta 17 (ortogonální projekce a doplněk)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor. Je-li E uzavřený podprostor H, pak $H=E\oplus_t E^\perp$ a projekce P na E s jádrem $E^\perp$ je ortogonální a spojitá s normou jedna, není-li nulová. Speciálně, v Hilbertově prostoru je každý uzavřený podprostor doplňkový.*

Pojem *ortonormální množina*. V dalším píšeme také $\sum_{e\in B}T(e)$ namísto obvyklejšího $\sum_{\gamma\in\Gamma}T(e_\gamma)$, kde $B=\{x_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$.

Tvrzení 18 (projekce do konečně rozměrného podprostoru a Besselova nerovnost)**.** *Nechť H je unitární prostor.*

(a) Pro $B\subset H$ konečnou ortonormální je $Px=\sum_{e\in B}\langle x,e\rangle e$ ortogonální projekce $x\in H$ na $H_B=\operatorname{span}B$, koeficienty u $e\in B$ jsou určeny jednoznačně a $\|Px\|^2=\sum_{e\in B}|\langle x,e\rangle|^2\le\|x\|^2$.

(b) Navíc pro každou ortonormální $B\subset H$ je $\sum_{e\in B}|\langle x,e\rangle|^2\le\|x\|^2$.

Pojmy *generující (též úplná) ortonormální množina* a *ortonormální báze.*

Věta 19 (charakterizace ortonormální báze)**.** *Pro ortonormální množinu B v Hilbertově prostoru H jsou následující výroky ekvivalentní:*

(a) B je ortonormální báze prostoru H.
(b) Pro každé $x \in H$ platí $x = \sum_{e \in B} \langle x, e \rangle e$. Koeficienty $\langle x, e \rangle$ u $e \in B$ jsou určeny rovností jednoznačně.
(c) Pro každé $x \in H$ platí $\|x\|^2 = \sum_{e \in B} |\langle x, e \rangle|^2$ (Parsevalova rovnost).
(d) B je maximální ortonormální množina (vzhledem k inkluzi) v H.
(e) B je generující ortonormální množina v H.

Příklad prostoru $\ell_2(\Gamma)$.

Věta 20 (Riesz a Fisher)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor. Pak existuje ortonormální báze B prostoru H a H je lineárně izometrický s $\ell_2(B)$.*

Konec 6. přednášky.

1.9. **Kvocient normovaného lineárního prostoru.** Definice kvocientu (faktorprostoru) X/E pro normovaný lineární prostor X a uzavřený lineární podprostor E.

Věta 21 (o kvocientu)**.** *Nechť E je uzavřený lineární podprostor normovaného lineárního prostoru X.*

(a) *Pak X/E je normovaný lineární prostor s normou $\|[x]\| (= \|x + E\|) = \inf\{\|x - y\| : y \in E\}$. Navíc $q(U_X) = U_{X/E}$, kde $q(x) = x + E$ je "kanonické kvocientové zobrazení".*
(b) *Je-li X Banachův, je X/E Banachův.*

Tvrzení 22. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a F je uzavřený podprostor prostoru X. Pak zobrazení $T \mapsto T \circ q$ je lineární izometrie prostoru $L(X/F, Y)$ na prostor $F^{\perp} = \{S \in L(X, Y) : F \subset \ker S\}$ (zde $q : X \to X/F$ je kanonické kvocientové zobrazení).*

Speciálně $f \in X^*$, právě když existuje $\varphi \in (X/\ker f)^*$ takové, že $f = \varphi \circ q$. Navíc $\|\varphi\| = \|f\|$.

1.10. **Normované lineární prostory nad $\mathbb{R}$ a nad $\mathbb{C}$.** Normovaný lineární prostor X nad $\mathbb{C}$ jako prostor $X_{\mathbb{R}}$ nad $\mathbb{R}$.

Tvrzení 23 (f a $\Re f$)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{C}$. Pak $f(x) = \Re f(x) - i \Re f(ix) = \Im f(ix) + i \Im f(x)$. Zobrazení $f \mapsto \Re f$ je lineární izometrie prostoru $(X^*)_{\mathbb{R}}$ na prostor $(X_{\mathbb{R}})^*$.*

Reálná a imaginární část komplexního lineárního funkcionálu ($\Im f(x) = -\Re f(ix)$).

Každý normovaný prostor nad $\mathbb{R}$ lze izometricky vnořit do normovaného prostoru nad $\mathbb{C}$ (např. $X \subset X \times X \equiv X + iX$, sčítání po složkách, násobek $(t_1 + it_2)(x_1 + ix_2) = (t_1 x_1 - t_2 x_2) + i(t_1 x_2 + t_2 x_1)$ a $\|x + iy\| = \max\{\|\alpha x + \beta y\| : \alpha^2 + \beta^2 \leq 1,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$).

2. Spojité lineární funkcionály a duální prostory

2.1. **Příklady spojitých lineárních funkcionálů a věty o reprezentaci.** X^* značí $L(X, \mathbb{F})$ pro $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, resp. $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

(a) *Funkcionály na Hilbertově prostoru*

Věta 24 (Fréchet-Riesz)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor. Pro $y \in H$ definujme*

$$Ty : x \in H \mapsto \langle x, y \rangle.$$

Pak zobrazení T je sdružené (konjugovaně) lineární izometrie H na H^*.

Funkcionály Ty nabývají hodnotu normy v nějakém prvku jednotkové koule.

Konec 7. přednášky.

(b) *Funkcionály na ℓ_∞ a na c_0*

Věta 25 (reprezentace c_o^*)**.**
(a) Zobrazení $T : \ell_1 \to \ell_\infty^*$ definované předpisem $Ty(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k$ je lineární izometrie ℓ_1 na podprostor (vlastní) prostoru ℓ_∞^*.
(b) Zobrazení $T : \ell_1 \to c_0^*$ definované předpisem $Ty(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k$ je lineární izometrie ℓ_1 na c_0^*.

(c) *Funkcionály na ℓ_p*

Věta 26 (reprezentace ℓ_p^*, $p < \infty$)**.** *Nechť $p, q \in (1, \infty)$ jsou takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, nebo $p = 1$ a $q = \infty$. Pak zobrazení $T : \ell_q \to \ell_p^*$ definované předpisem $Ty(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k$ je lineární izometrie ℓ_q na ℓ_p^*.*

Pro $p \in (1, \infty)$ funkcionály Ty hodnotu normy nabývají v nějakém prvku jednotkové koule.

(d) *Funkcionály na $_p$, $1 \leq p < \infty$*

Věta 27 (reprezentace L_p^*)**.** *Pro σ-konečnou míru μ na Ω definuje předpis $T\mu(x) = \int_\Omega x(t)y(t)\ d\mu(t)$ lineární izometrii $L_q(\mu)$ na $L_p(\mu)^*$.*

Schéma důkazu. Odhad normy pomocí *Hölderovy nerovnosti.* Redukce důkazu surjektivity a zachovávání normy na prostor Ω_n s konečnou mírou. Pro $f \in L_p^*(\mu)$ definujeme $nu(A) = f(\chi_A)$. Lze ověřit předpoklady *Radon-Nikodymovy věty* a najít $y_n \in L_1(\Omega_n)$ splňující $nu(A) = \int_{\Omega_n} y_n(t)\ d\mu_n(t)$. Pro $y_n^N = \min\{y_n, N|$, $N \in \mathbb{N}$, lze provést stejně jako pro posloupnosti *odhad* ($\|y_n^N\|_q \leq \|f\|$ a limitním přechodem se zbavit N. Dostaneme rovnost $Ty_n = f$ na span $\{\chi_A : A \subset \Omega$ měřitelná$\}$ v $L_\infty(\Omega_n)$. Rozšíříme díky spojitosti na $L_p(\Omega_n)$. Lze provést přechod k μ na Ω.

Konec 8. přednášky.

(d) *Funkcionály na $C(K)$, K kompaktní metrický*

Věta 28 (reprezentace $C(K)^*$)**.** *Je-li K kompaktní metrický prostor a $M(K)$ Banachův prostor $\mathbb{F}$-hodnotových borelvských (regulárních) měr na K s normou definovanou totální variací míry $\|\mu\| = |\mu|(K)$, pak zobrazení definované předpisem $T\mu = \int_K x(t)\ d\mu(t)$ je lineární izometrie prostoru $M(K)$ na prostor $C(K)^*$.*

2.2. **Existence a rozšiřování spojitých funkcionálů.** Připomenutí tvrzení dokázaných na cvičení.

Nenulový lineární funkcionál je dán jádrem a nenulovou hodnotou v některém bodě.

$X^* = L(X, \mathbb{F})$ je Banachův prostor.

Spojitost lineárního funkcionálu je ekvivalentní uzavřenosti jádra.

Nespojitost lineárního funkcionálu na X je ekvivalentní s tím, že jádro je hustý vlastní podprostor X.

Motivace: Oddělování bodů a rozšiřování spojitého funkcionálu z podprostoru. Pojmy *sublineárního funkcionálu* a *pseudonormy.*

Věta 29 (Hahn-Banachova věta - algebraická verze nad $\mathbb{R}$)**.** *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, X_0 je jeho vektorový podprostor, $p : X \to \mathbb{R}$ je sublineární funkcionál a $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál, pro který platí $f_0(x) \leq p(x)$ pro $x \in X_0$.*

Pak existuje lineární funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ takový, že $f \restriction_{X_0} = f_0$ a $f(x) \leq p(x)$ pro všechna $x \in X$.

Lemma 30 (o rozšíření o jednu dimenzi)**.** *Nechť $p : X \to \mathbb{R}$ je sublineární funkcionál, $X_1 \subset\subset X$, $f_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ je lineární, $f_1(x) \leq p(x)$ pro $x \in X_1$ a $x_2 \in X \setminus X_1$. Pak existuje lineární funkcionál $f_2 : X_2 = \operatorname{span}(X_1 \cup \{x_2\}) \to \mathbb{R}$ takový, že $f_2(x) = f_1(x)$ pro $x \in X_1$ a $f_2(x) \leq p(x)$ pro $x \in X_2$.*

Poznámka o Hahn-Banachově rozšiřovací větě na konečně rozměrných prostorech.

Pojmy *částečného*, resp. *lineárního (úplného) uspořádání*, *maximální prvek*, *horní závora množiny* a **Zornovo lemma**:

Je-li $\mathcal{F}$ množina s částečným uspořádáním $\subseteq$ a každá podmnožina $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$, na níž je $\subseteq$ uspořádáním, má horní závoru, pak má $\mathcal{F}$ maximální prvek.

Lemma 31 (existence maximálního rozšíření)**.** *Za předpokladů věty 29 definujeme $\mathcal{F} = \{g : Y \to \mathbb{R} : X_0 \subset Y \subset\subset X,\ g \restriction_{X_0},\ g \leq p \restriction_Y\}$ a částečné uspořádání $g_1 \subseteq g_2$, pokud $D(g_1) \subset D(g_2)$ a $g_2(x) = g_1(x)$ pro všechna $x \in D(g_1)$ (tj. pokud $\operatorname{graf} g_1 \subset \operatorname{graf} g_2$. Každá lineárně uspořádaná množina $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}$ má v $(\mathcal{F}, \subseteq)$ horní závoru.*

Důkaz věty 29

Věta (Hahn-Banachova věta - algebraická verze nad $\mathbb{C}$)**.** *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, X_0 je jeho vektorový podprostor, $p : X \to \mathbb{R}$ je sublineární funkcionál a $f_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál, pro který platí $\Re f_0(x) \leq p(x)$ pro $x \in X_0$.*

Pak existuje lineární funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ takový, že $f \restriction X_0 = f_0$ a $\Re f(x) \leq p(x)$ pro všechna $x \in X$.

Je-li p pseudonorma, splňuje výše popsané rozšíření nerovnost $|f(x)| \leq p(x)$ pro všechna $x \in X$.

Konec 9. přednášky.

Věta 32 (Hahn-Banachova věta - analytická verze)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor (nad $\mathbb{F}$), X_0 je jeho vektorový podprostor a $f_0 \in X_0^*$. Pak existuje $f \in X^*$, pro který $f \restriction X_0 = f_0$ a $\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{X_0^*}$. (Tj. každý spojitý funkcionál na podprostoru má rozšíření na celý prostor se zachováním normy.)*

Věta 33 (o oddělování bodů a o $\|x\|$)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Je-li $x \in X$ nenulový, pak existuje $f_x \in S_{X^*}$ s $f_x(x) = \|x\|$.
(b) Speciálně, jsou-li x, y různé prvky X, pak existuje $f \in X^*$ s $f(x) \neq f(y)$.
(c) Speciálně, $\|x\| = \max\{f(x) : f \in B_{X^*}\}$ pro každé $x \in X$.

Věta 34 (oddělování bodu a podprostoru)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li F uzavřený vektorový podprostor X a $x \in X \setminus F$, pak existuje $f \in S_{X^*}$ s $f \restriction_F = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, F) \in (0, \infty) \subset \mathbb{F}$.*

Důsledek 35 (kritérium hustoty podprostoru)**.** *Nechť Y je vektorový podprostor normovaného lineárního prostoru X. Pak $\overline{Y} = X$, právě když každý spojitý lineární funkcionál $f \in X^*$, který je nulový na Y, je nulový na X.*

Důsledek 36 (funkcionál a vzdálenost od jádra - Ascoliho formule)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, F je uzavřený podprostor X kodimenze 1. Nechť $f_x \in X^*$, $x \in X \setminus F$, jsou funkcionály z věty 34. Pak každý funkcionál $f \in X^*$ s jádrem F je pro každé $x \in X$ násobkem $t_x f_x$ a díky tomu je*

$$\|f\| = |t_x| \text{ a } |f(x)| = \|f\|\operatorname{dist}(x, F).$$

Věta 37 (o doplňcích a konečně rozměrných podprostorech)**.**

(a) Konečně rozměrný podprostor normovaného lineárního prostoru má topologický doplněk.

(b) Uzavřený podprostor normovaného lineárního prostoru, který má konečnou kodimenzi, má topologický doplněk.

Důkaz na cvičení.

Poznámka. V dalším kurzu funkcionální analýzy budou dokázána následující tvrzení o oddělování dvou disjunktních neprázdných konvexních množin C a D normovaného lineárního prostoru:

(a) Je-li C otevřená, existují $f \in X^*$ a $r \in \mathbb{R}$ taková, že $(\forall x \in C, y \in D)\ \Re f(x) < r \leq \Re f(y)$.

(b) Je-li C kompaktní a D uzavřená, existuje $f \in X^*$ takové, že $\max\{\Re f(x) : x \in C\} < \inf\{\Re f(y) : y \in D\}$.

O zachovávání vlastností mezi prostorem a jeho duálem.

Duální prostor X^* k normovanému lineárnímu prostoru je vždy úplný (věta 4(c)).

Duální prostor separabilního prostoru ℓ_1 je lineárně izometrický s neseparabilním prostorem ℓ_∞, a tedy není separabilní. Platí:

Věta 38 (separabilita X a X^*)**.** *Je-li X normovaný lineární prostor a je-li X^* separabilní, je X separabilní.*

Věta 39 (duál Hilbertova prostoru)**.** *Je-li X Hilbertův prostor a je norma X^* definována skalárním součinem, a tedy X^* je Hilbertův.*

2.3. **Kanonické vnoření do druhého duálu a reflexivita.** Značení X^{**}, pojem kanonického vnoření $\varepsilon = \varepsilon_X : X \to X^{**}$.

Věta 40 (vnoření je izometrie)**.** *Zobrazení $\varepsilon = \varepsilon_X : X \to X^{**}$ je lineární izometrie X do X^{**}. Je-li X úplný, je $\varepsilon_X(X)$ úplný podprostor X^{**}.*

Konec 10. přednášky.

Věta 41 (o zúplnění)**.** *Je-li X normovaný lineární prostor, pak existují Banachův prostor $\widehat{X}$ a lineární izometrie $T : X \to \widehat{X}$ tak, že $\overline{T(X)} = \widehat{X}$. Je-li X unitární, je $\widehat{X}$ Hilbertův.*

Pojem *reflexivního prostoru.*

Poznámka o úplnosti každého reflexivního prostoru. Reflexivita a izomorfismus.

Věta 42 (reflexivita klasických prostorů)**.**

(a) Hilbertovy prostory jsou reflexivní.

(b) Prostory $L_p(\mu)$ pro σ-konečnou míru a $p \in (1, \infty)$ jsou reflexivní. Speciálně to platí pro prostory ℓ_p pro $p \in (1, \infty)$.

Věta 43 (reflexivita a nabývání normy)**.** *Nechť X je reflexivní prostor. Pak každé $f \in X^*$ nabývá na B_X hodnotu $\|f\|$.*

Konec 11. přednášky.
Poznámka o Jamesově větě.

Věta 44 (zachovávání reflexivity)**.**
(a) Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.
(b) Banachův prostor X je reflexivní, právě když X^* je reflexivní.

Poznámka. Kvocienty reflexivního prostoru jsou reflexivní. Topologický součet reflexivních podprostorů je reflexivní.

Příklady nereflexivních klasických prostorů. ℓ_1, $L_1([0,1])$ i $C([0,1])$ (separabilní s neseparabilním druhým duálem nebo existuje spojitý lineární funkcionál, který nenabývá normu na jednotkové kouli - cvičení), c_0 (existuje spojitý lineární funkcionál, který nenabývá normu na jednotkové kouli - cvičení), ℓ_∞, $L_\infty([0,1])$ i $M([0,1])$ (jde o duál nereflexivního prostoru).

3. Operátory na Banachových prostorech

Příklady lineárních operátorů - cvičení.

Věta (Baireova věta)**.** *Nechť X je úplný metrický prostor. Pak spočetné sjednocení uzavřených množin s prázdným vnitřkem má prázdný vnitřek. Ekvivalentně, průnik hustých otevřených množin je hustá množina.*

3.1. Princip stejnoměrné omezenosti - Banach a Steinhaus.

Věta 45 (Banach-Steinhaus)**.** *Nechť X je Banachův a Y normovaný lineární prostor. Pro množinu operátorů $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ nechť platí, že $\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{T}\} < \infty$, tj. množina $\{Tx : T \in \mathcal{T}\}$ je omezená, pro každé $x \in X$.*

Pak $\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{T}\} < \infty$, tj. množina $\mathcal{T}$ je omezená v $L(X,Y)$.

Věta 46 (spojitost limitního operátoru)**.** *Nechť X je Banachův prostor a Y je normovaný lineární prostor. Pokud $T_n \in L(X,Y)$ a $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$ pro všechna $x \in X$, pak $T \in L(X,Y)$.*

Poznámka. Je-li operátor $T : X \to Y$, např. funkcionál pro $Y = \mathbb{F}$, definovaný bodově sumou či limitou spojitých lineárních operátorů, je spojitý, pokud je dobře definovaný na celém Banachově prostoru X.

Princip stejné omezenosti říká speciálně, že množina $\mathcal{F}$ spojitých lineárních funkcionálů na Banachově prostoru X je omezená, pokud je omezená "bodově"($\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ jsou omezené pro všechna $x \in X$). Pomocí "duality"dostaneme tvrzení o omezenosti v normovaném lineárním X.

Konec 12. přednášky.

Věta 47 (omezenost množin v X)**.** *Nechť M je podmnožina normovaného lineárního prostoru X. Pak M je omezená, právě když pro každé $x^* \in X^*$ je $x^*(M)$ omezená.*

Poznámka (důkazy na cvičení). Pojem slabé konvergence posloupnosti $x_n \in X$ k $x \in X$ pomocí konvergence $x^*(x_n)$ k $x^*(x)$ pro všechna $x^* \in X^*$.

(a) Slabá limita posloupnosti je určena jednoznačně.
(b) Slabě konvergentní posloupnost je omezená.
(c) V reflexivním X platí, že omezené posloupnosti mají slabě konvergentní podposloupnost.

(d) V reflexivním X platí, že k $x \in X$ existuje v každé neprázdné uzavřené konvexní množině $F \subset X$ prvek $y \in F$ takový, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, F)$.

Připomeňte si, že Hilbertův prostor je speciálním případem reflexivního a že jsme si pro Hilbertovy prostory poslední tvrzení již dokázali.

3.2. **Banachova věta o otevřeném zobrazení.** Pojem *otevřené zobrazení.* Zde budeme uvažovat jen lineární zobrazení.

Věta 48 (Banachova věta o otevřeném zobrazení)**.** *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory, $T \in L(X,Y)$ a $T(X) = Y$. Pak T je otevřené.*

Pozorování. Lineární zobrazení T mezi normovanými lineárními prostory X a Y je otevřené, právě když $T(U_X)$ je okolí nuly v Y.

Lemma 49 (o hustotě a otevřenosti)**.** *Nechť X je Banachův, Y je normovaný lineární prostor a $T \in L(X,Y)$. Nechť $r > 0$ a $rU_Y \subset \overline{T(U_X)}$. Pak $rU_Y \subset T(U_X)$.*

Důkaz Banachovy věty.

Důsledek 50 (o izomorfismu)**.** *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X,Y)$ je bijekce. Pak T je izomorfismus.*

Poznámka - cvičení. Nechť X je Banachův, Y je normovaný lineární prostor a $T \in L(X,Y)$ je surjektivní otevřený. Pak je prostor Y Banachův. (Návod. Užijte faktorizaci T na izomorfismus T_q kvocientu $X/T^{-1}(0)$ na Y ($T = T_q \circ q$).)

Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X,Y)$ je prostý. Pak T je izomorfismus X na $T(X)$, právě když $T(X)$ je uzavřený podprostor Y.

3.3. **Věta o uzavřeném grafu.**

Tvrzení 51 (součet prostorů)**.** *Nechť $(X, \|\ \|_X)$ a $(Y, \|\ \|_Y)$ jsou normované lineární prostory. Pak na $X \times Y$ definujeme sčítání a násobek po složkách a $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$. $(X \times Y, \|\ \|_{X\times Y})$ je normovaný lineární prostor. Značíme jej též $X \oplus_\infty Y$ a platí $X \oplus_\infty Y = (X \times \{0\} \oplus_t (\{0\}) \times Y)$. Jsou-li X a Y úplné, je i $X \oplus_\infty Y$ úplný.*

Konec 13. přednášky.

Věta 52 (o uzavřeném grafu)**.** *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a T je lineární zobrazení X do Y s uzavřeným grafem v $X \oplus_\infty Y$. Pak $T \in L(X,Y)$.*

Věta 53 (důsledek o topologickém součtu)**.** *Nechť X je Banachův prostor a $X = Y \oplus Z$ (direktní součet vektorových podprostorů). Pak $Y \oplus_t Z$, právě když Y a Z jsou uzavřené.*

3.4. **Duální a adjungované operátory.** Definice *duálního operátoru $T' : Y^* \to X^*$* k operátoru $T \in L(X,Y)$.

Tvrzení 54 (vlastnosti operace $T \mapsto T'$)**.** *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.*

(a) *Pak zobrazení $T \in L(X,Y) \mapsto T'$ je lineární izometrie $L(X,Y)$ do $L(Y^*, X^*)$.*
(b) *Je-li $T \in L(X,Y)$ a $S \in L(Y,Z)$, pak $(S \circ T)' = T' \circ S'$.*
(c) *${Id_X}' = Id_{X^*}$.*
(d) *Je-li $T \in L(X,Y)$, pak $T'' \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T$ pro $T \in L(X,Y)$.*

Poznámka. T'' lze tedy chápat jako rozšíření T.

Věta 55 (adjungovaný operátor na HP). *Nechť H_i, $i = 1,2,3$, jsou Hilbertovy prostory a $T \in L(H_1, H_2)$.*

(a) Pak existuje právě jeden operátor $T^* \in L(H_2, H_1)$, pro který platí $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ pro všechna $x \in H_1$ a $y \in H_2$.

(b) Je-li $J_i : y \in H_i \mapsto \langle \cdot, y\rangle_{H_i} \in H_i^*$ kanonická reprezentace funkcionálů na H_i pro $i = 1,2$, pak $J_1^{-1} \circ T' \circ J_2 = T^* \in L(H_2, H_1)$.

(c) Platí, že $T \mapsto T^*$ je sdruženě lineární izometrie, $Id^*_{H_1} = Id_{H_1}$ a $T^{**} = T$. Jsou-li $T \in L(H_1, H_2)$ a $S \in L(H_2, H_3)$, pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Operátor T^* pro $T \in L(H)$ se nazývá *adjungovaný operátor* k T.

Konec 14. přednášky.

Poznámka. K úlohám, které požadují popis duálního operátoru k zadanému operátoru. Máme-li $T : X \to Y$ popsaný nějakým předpisem a máme-li reprezentace funkcionálů z Y^* a X^* pomocí lineárních izometrií $J_Y : Y_r \to Y^*$ a $J_X : X_r \to X^*$, pak nám jde o to najít předpis popisující operátor $T_r := J_X^{-1} \circ T' \circ J_Y$ (viz cvičení). (Pro případ $T \in L(H_1, H_2)$, kde H_i jsou Hilbertovy prostory, splývá adjungovaný operátor $T^* \in L(H_2, H_1)$ s operátorem $J_{H_1}^{-1} \circ T' \circ J_{H_2}$. Zde jsou $J_{H_i} : H_i \to H_i^*$, i=1,2, sdruženě lineární izometrie.)

3.5. **Řešitelnost rovnic $Tx = y$ a $T'y^* = x^*$.** Pojem *anihilátorů* (již se objevil u faktorizace).

Nechť X je normovaný lineární prostor. Pro $A \subset X$ a $B \subset X^*$ definujeme $A^\perp = \{y^* \in Y^* : y^* = 0 \text{ na } A\}$ a

$B_\perp = \{x \in X : x^*(x) = 0 \text{ pro všechna } x^* \in B\}$.

Lemma 56 (o dvojitém anihilátoru). *Za předpokladů předchozí definice platí, že $(A^\perp)_\perp$ je uzavřený lineární obal A v X.*

(Snadno lze dokázat též, že $(B_\perp)^\perp$ obsahuje uzavřený lineární obal B v X^*.)

Tvrzení 57 (o jádrech a obrazech T a T'). *Pro $T \in L(X,Y)$ platí*

(a) $\ker T' = (T(X))^\perp$.
(b) $\overline{T(X)} = (\ker T')_\perp$.

Lze též dokázat $\ker T = (T'(Y^*))_\perp$ a $\overline{T'(Y^*)} \subset (\ker T)^\perp$ (cvičení).

Příklad. Pro $T \in L(X,Y)$ obecně neplatí $\overline{T'(Y^*)} = (\ker T)^\perp$. Uvažujte například identické vnoření $E : \ell^1 \to c_0$. Pak "$E' : \ell_1 \to \ell_\infty$"(duální operátor vyjádřený pomocí kanonických reprezentací funkcionálů na c_0 a na ℓ_1) je identické vnoření, ale $\overline{\ell_1}^{\|\cdot\|_\infty} = c_0 \subset \ell_\infty$, $c_0 \neq \ell_\infty = (\ker E)^\perp$, neboť $\ker E = \{0\}$.

Důsledek 58 (kritérium hustoty $T(X)$). *Nechť $T \in L(X,Y)$ a X, Y jsou normované lineární prostory. Pak T' je prostý, právě když $T(X)$ je hustý podprostor Y.*

Věta 59 (o dualitě izomorfismů). *Nechť X, Y jsou Banachovy a $T \in L(X,Y)$. Pak T je izomorfismus, právě když T' je izomorfismus.*

Platí věta:

Věta (o uzavřeném obrazu). *Nechť X a Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X,Y)$. Pak je ekvivalentní:*

(a) *$T(X)$ je uzavřený;*
(a') *$T(X) = \ker(T')_\perp$;*

(b) *$T'(Y^*)$ je uzavřený;*
(b') $T'(Y^*) = \ker(T)^\perp$.

Speciálně, je-li T izomorfismus X na $T(X)$, je T' otevřené a je-li T' izomorfismus Y^* na $T'(Y^*)$, je T otevřené.
Konec 15. přednášky.

3.6. **Invertibilita a spektrum omezeného operátoru na X.** Pojem *invertibilní operátor.*

Lemma 60 (o Neumannově řadě)**.**
(a) *Nechť X je normovaný lineární prostor, $E \in L(X)$ a $\sum_{n=0}^\infty E^n$ konverguje v $L(X)$. Pak $\sum_{n=0}^\infty E^n = (I-E)^{-1}$.*
(b) *Je-li X Banachův prostor, $T \in L(X)$ je (netriviální) invertibilní a $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, pak S je invertibilní (a $\|S^{-1} - T^{-1}\| \le \frac{\|T^{-1}\|^2\|S-T\|}{1-\|T^{-1}\|\|S-T\|}$).*

Konec 15. přednášky.

Věta 61 ($\mathcal{I}(X)$ a operace inverze)**.** *Je-li X Banachův prostor, pak $\mathcal{I}(X)$ je otevřená v $L(X)$ a $T \in \mathcal{I}(X) \mapsto T^{-1} \in \mathcal{I}(X)$ je spojitá zobrazení.*

Spektrum operátoru na X.
Pojem spektra a *bodového spektra. Vlastní čísla* a *vlastní vektory.*
Příklady - cvičení.
(1) Pro $\dim X < \infty$ a $T \in L(X)$ je $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.
(2) Existuje operátor T na $\mathbb{R}^2$ takový, že $\sigma(T) = \emptyset$.
(3) Pro operátor $Sx(t) = \int_0^t x(s)\,ds$ na $C([0,1])$ je $\sigma(S) = \{0\}$ a $\sigma_p(S) = \emptyset$.
(4) Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \sigma_p(T)$ a $x_1, \dots, x_n$ příslušné vlastní vektory. Pak jsou $x_1, \dots, x_n$ lineárně nezávislé.

Pojmy *rezolventní množiny* $\rho(T)$ a rezolventního zobrazení $r_T : \lambda \in \rho(T) \mapsto (\lambda - T)^{-1} \in L(X)$.

Lemma 62 (o rezolventě T)**.** *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{C}$ a $T \in L(X)$. Pak $\rho(T)$ je otevřená v $\mathbb{C}$ a $\varphi \circ r_T$ je holomorfní na $\rho(T)$ pro každé $\varphi \in L(X)^*$.*

Věta 63 (o spektru omezeného operátoru)**.** *Nechť $T \in L(X)$ a $X \neq \{0\}$ je Banachův. Pak $\sigma(T)$ je neprázdná kompaktní podmnožina množiny $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \|T\|\}$.*

Konec 16. přednášky.

Věta 64 (o spektru duálního operátoru)**.** *Nechť X je Banachův prostor. Pak pro $T \in L(X)$ platí $\sigma(T) = \sigma(T')$.*

3.7. **Kompaktní operátory.** *Známá fakta.* Pojem kompaktního metrického, resp. Hausdorffova topologického) prostoru. Charakterizace pomocí existence vybrané konvergentní posloupnostiv metrickém prostoru. Charakterizace pomocí totální omezenosti a úplnosti metrického prostoru. Pojem *relativně kompaktní množina.*

Definice *kompaktního operátoru* a *konečně dimenzionálního operátoru* - značení $K(X,Y)$ a $F(X,Y)$.

Tvrzení 65 (o prostoru kompaktních operátorů)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.*
(a) *Jsou-li $T \in K(X,Y)$ (nebo $F(X,Y)$), $S \in L(Y,Z)$ a $R \in L(W,X)$, je $S \circ T \circ R \in K(W,Z)$ (nebo $F(W,Z)$).*

(b) *$K(X,Y)$ je uzavřený vektorový podprostor $L(X,Y)$.*
(c) $\overline{F(X,Y)} \subset K(X,Y)$.

Poznámky - civčení.
Jsou-li $T_n \in F(X,Y)$ a $T_n \to T$ v $L(X,Y)$, tj. $\|T_n - T\| \to 0$ pro $n \to \infty$, pak $T \in K(X,Y)$. To je jedna metoda, jak ověřit kompaktnost.
Kompaktnost integrálního operátoru na $L_2(\mathbb{R})$ s jádrem v $L_2(\mathbb{R}^2)$. (Lze dokázat pomocí aproximace operátory z $F(L^2(\mathbb{R}))$.)
Poznámka o existenci příkladu prostorů, pro které $\overline{F(X,Y)} \neq K(X,Y)$ (řešeno roku 1973).
Charakterizace kompaktnosti uzavřených množin v $C(I)$ poskytuje další metodu pro ověřování kompaktnosti.
Definice *stejně spojité množiny* pro $A \subset C(K)$ jako ve větě:

$$(\forall \varepsilon > 0, x \in K)(\exists \text{ otevřené okolí } U \text{ bodu } x)(\forall y \in U, f \in A)|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ekvivalentně můžeme psát předchozí definici o něco stručněji takto:

$$(\forall \varepsilon > 0,\ x \in K)(\exists \text{ otevřené okolí } U \text{ bodu } x)(\forall f \in A) \operatorname{diam} f(U) < \varepsilon.$$

Věta 66 (Arzelá-Ascoliho věta)**.** *Množina $A \subset C(K)$ pro kompaktní metrický prostor (i pro Hausdorffův kompaktní prostor) je totálně omezená, právě když A je omezená a stejně spojitá.*

Konec 17. přednášky.
Kompaktnost operátoru $Tf(x) = \int_0^x f(y)\, dy$ na $C([0,1])$.

Věta 67 (kompaktnost duálníhooperátoru - Schauder)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in L(X,Y)$. Pak T je kompaktní, právě když je T' kompaktní.*

Poznámka - cvičení.
Pro normované lineární prostory platí: Je-li $T \in K(X,Y)$ a T je otevřený, pak $T \in F(X,Y)$.
Pro Banachovy prostory X, Y platí: Je-li $T \in K(X,Y)$ a $T(X)$ je uzavřený, pak $T \in F(X,Y)$.

3.8. **Spektrum kompaktního operátoru.** Zde opět mluvíme o Banachových prostorech nad $\mathbb{C}$, navíc $K(X) = K(X,X)$ a I značí identický operátor I_X na X.

Věta 68 (Riesz-Schauder)**.** *Nechť X je Banachův prostor a $K \in K(X)$. Pak*
(a) $\ker(I - K)$ *je uzavřený podprostor X konečné dimenze;*
(b) $(I - K)(X)$ *je uzavřený podprostor X.*

Věta 69 (Fredholmova alternativa)**.** *Nechť X je Banachův prostor a $K \in K(X)$. Pak* $\ker(I - K) = \{0\}$, *právě když $(I - K)(X) = X$.*

Věta 70 (struktura spektra kompaktního operátoru)**.** *Nechť X je Banachův a $K \in K(X)$. Pak*
(a) *Je-li X nekonečně dimenzionální, pak $0 \in \sigma(K)$.*
(b) *Je-li $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$, pak $\lambda \in \sigma_p(K)$. Navíc* $\dim\ker(\lambda I - K) < \infty$ *a $(\lambda I - K)(X)$ je uzavřený.*
(c) *Množina $\{\lambda \in \sigma(K) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$ je konečná pro každé $\varepsilon > 0$.*

Konec 18. přednášky.

Platí následující výsledky doplňující "Fredholmovu alternativu"o souvislosti řešitelnosti rovnic pro T a pro T'.

Věta. *Nechť X je Banachův prostor, $T \in K(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ je nenulové. Pak*

(a) $(\lambda I - T)(X) = (\ker(\lambda I' - T'))_\perp$ *a* $(\lambda I' - T')(X^*) = (\ker(\lambda I - T))^\perp$*;*

(b) $\dim(X/(\lambda I - T)(X)) = \dim(\ker(\lambda I' - T')) = \dim(X^*/(\lambda I' - T')(X)) = \dim(\ker(\lambda I - T)) < \infty$.

Poznámka. První tvrzení v (a) plyne z Tvrzení 57 a z Věty 68(b), resp. Věty 70(b).

4. Úvod do teorie distribucí

Motivace. Řešení úloh (diferenciálních rovnic), které nemají klasické řešení. Potřeba definovat a pracovat s derivacemi všech spojitých funkcí.

Není-li řečeno jinak, je $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená neprázdná, $d \in \mathbb{N}$, $\| \ \|$ je eukleidovská norma na $\mathbb{R}^d$.

Pojem *nosič funkce* $f : G \to \mathbb{F}$ jako množiny $\operatorname{spt} f = \overline{\{x \in G : f(x) \neq 0\}}$.

Tvrzení 1 (o f' pro $C^1(G)$)**.** *Pro $f \in C^1(G)$ a každou $\varphi \in C^1(G)$, která má kompaktní nosič* $\operatorname{spt} \varphi$*, platí pro $i = 1, \dots, d$ rovnost*

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\ dx = -\int_G f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x).$$

Pojmy *lokálně absolutně spojitá funkce* na $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a *lokálně integrovatelná funkce* na G.

Tvrzení 2 (o f' pro absolutně spojité funkce)**.** *Je-li f lokálně absolutně spojitá na (a, b), pak $f' \in L^1_{\mathrm{lok}}((a, b))$ a*

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\ dx.$$

Idea uvažovat "$(\frac{\partial f}{\partial x_i})(\varphi)$" $= -\int_G f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$. Teorie distribucí ("zobecněných funkcí") - L. Schwartz - pojem funkce s hodnotami v bodech G zaměníme uvažováním "zobecněných funkcí"(distribucí), které jsou lineárními funkcionály s hodnotami v testovacích funkcích φ.

4.1. **Prostor testovacích funkcí.**

Definice multiindexu $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, derivace $D^\alpha f$ pro funkce $f \in C^\infty(G)$, množiny $\mathcal{D}(G)$. Jde o vektorový prostor, dokonce komutativní algebru, která ovšem neobsahuje jednotku.

Konec 19. přednášky

Věta 3 (oddělování C^∞-funkcemi)**.** *Pro každou neprázdnou uzavřenou $K \subset \mathbb{R}^d$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\varphi_{K,\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ s hodnotami v intervalu $[0, 1]$ taková, že $\varphi_{K,\varepsilon}(x) = 1$ pro $x \in K$ a $\varphi_{K,\varepsilon}(x) = 0$ pro $x \notin U(K, \varepsilon) := \bigcup\{U(a, \varepsilon) : a \in K\}$. Pro K kompaktní je $\varphi_{K,\varepsilon} \in \mathcal{D}(G)$.*

Slabé derivace. Definice slabých (α-tých) derivací $g \in {}^1_{\mathrm{lok}}(G)$ nebo $\mu \in M(G)$ pro lokálně integrovatelné funkce $f \in L^1_{\mathrm{lok}}(G)$. $M(G)$ je prostor znaménkových borelovských reálných měr, resp. prostor komplexních borelovských měr na G.

Příklady. První a druhá slabá derivace funkce $f(x) = |x|$ na $\mathbb{R}$ je sgn a Diracova míra $2\delta_0$. (Srovnání s klasickými derivacemi.)

Lemma 4 (f a μ jsou určeny testováním na prvcích $\mathcal{D}(G)$)**.**
(a) Je-li $\int_G g(x)\varphi(x)\,dx = 0$ *pro všechna* $\varphi \in \mathcal{D}(G)$*, pak* $g = 0$ *skoro všude.*
(b) Je-li $\int_G \varphi(x)\,d\mu(x) = 0$ *pro všechna* $\varphi \in \mathcal{D}(G)$*, pak* $\mu = 0$*.*

Konec 20. přednášky

Věta 5 (o slabých derivacích)**.** *(a) Jsou-li* $g_1, g_2 \in L^1_{\text{lok}}(G)$ *slabé derivace funkce* $f \in L^1_{\text{lok}}(G)$*, pak* $g_1 = g_2$ *skoro všude. Jsou-li* $\mu_1, \mu_2 \in M(G)$ *slabé derivace funkce* $f \in L^1_{\text{lok}}(G)$*, pak* $\mu_1 = \mu_2$*.*
(b) Pro $f \in L^1_{\text{lok}}((a,b))$ *existuje* f_0*, která je lokálně absolutně spojitá na* (a,b) *taková, že* $f = f_0$ *skoro všude, právě když* f *má slabou derivaci* $g \in L^1_{\text{lok}}((a,b))$*. V takovém případě je* $g = f_0'$ *skoro všude.*
(c) Pro $f \in L^1_{\text{lok}}((a,b))$ *existuje* f_0*, která má konečnou variaci na kompaktních intervalech v* (a,b) *taková, že* $f = f_0$ *skoro všude, právě když* f *má slabou derivaci* $\mu \in M((a,b))$*. V takovém případě je* $\mu((c,d)) = f_0(d_-) - f_0(c_+)$*.*

Poznámka. Tvrzení (b) a (c) věty plynou z výsledků obsažených v přednáškách z matematické analýzy, resp. z teorie funkcí o absolutně spojitých funkcích a o funkcích s konečnou variací.

Příklad. Slabá derivace Cantorovy funkce je borelovská pravděpodobnost μ taková, že míra Cantorova diskontinua je rovna jedné. (Klasická derivace je rovna nule skoro všude.)

4.2. **Konvergence posloupností testovacích funkcí.** Pro $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ a $N \in \mathbb{N}_0$ definujeme $\|\varphi\|_N$.

Pro $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(G)$ definujeme $\rho(\varphi, \psi)$.

Pro $\varphi_k, \varphi \in \mathcal{D}(G)$ definujeme konvergenci $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ v $\mathcal{D}(G)$.

Definujeme podprostor $\mathcal{D}_K(G)$ prostoru $\mathcal{D}(G)$ pro $K \subset G$ kompaktní.

Příklad. Funkce $\frac{1}{n}\varphi_{\{0\},n}$ konvergují k nule v každé $\|\ \|_N$, ale ne v $\mathcal{D}(G)$.

Tvrzení 6 (úplnost $\mathcal{D}_K$)**.**
(a) Pro $N \in \mathbb{N}_0$ *je* $\|\ \|_N$ *norma na* $\mathcal{D}(G)$*.*
(b) ρ *je translačně invariantní metrika na* $\mathcal{D}(G)$*. Konvergence* $\varphi_k \xrightarrow{\rho} \varphi$ *v* $(\mathcal{D}_K(G), \rho)$ *je ekvivalentní konvergenci ve všech normách* $\|\ \|_N$*,* $N \in \mathbb{N}_0$*. To je též ekvivalentní se stejnoměrnou konvergencí* $D^\alpha\varphi_k$ *k* $D^\alpha\varphi$ *pro všechna* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$*.*
(c) Pro $K \subset G$ *kompaktní je* $\mathcal{D}_K(G)$ *vektorový prostor a metrický prsotor* $(\mathcal{D}_K(G), \rho)$ *je úplný. Konvergence* $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ *a* $\varphi_k \xrightarrow{\rho} \varphi$ *na* $\mathcal{D}_K(G)$ *splývají.*

Poznámky - cvičení.

- $(\mathcal{D}_K(G), \|\ \|_N)$ je uzavřený podprostor $(\mathcal{D}(G), \|\ \|_N)$ a není úplný.
- Konvergence $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ není konvergencí v žádné metrice na $\mathcal{D}(G)$.
- Konvergence v $(\mathcal{D}_K(G), \rho)$ není konvergencí v žádné normě, pokud $K \subset G$ je kompaktní množina s neprázdným vnitřkem.

4.3. **Pojem distribuce.**

Definice distribuce na otevřené $G \subset \mathbb{R}^d$. Značení $\mathcal{D}'(G)$.

Poznámka. $\mathcal{D}'(G)$ je vektorový prostor. Existuje topologie τ na $\mathcal{D}(G)$ taková, že prvky $\mathcal{D}'(G)$ jsou právě všechny spojité lineární funkcionály na $(\mathcal{D}(G), \tau)$.

Tvrzení 7 (charakterizace distribucí)**.** *Následující výroky jsou ekvivalentní:*
(a) $T \in \mathcal{D}'(G)$*.*

(b) Pro každé $K \subset G$ kompaktní je restrikce $T\restriction_{\mathcal{D}_K(G)}$ spojitá vzhledem k ρ.
(c) Pro každé $K \subset G$ kompaktní existuje $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že $T\restriction_{\mathcal{D}_K(G)}$ je spojité vzhledem k $\| \ \|_N$.

Konec 21. přednášky
Příklady distribucí.
Pojem *řád distribuce* a pojem *nosič distribuce.*

Tvrzení 8 ("regulární distribuce")**.**

(a) *Zobrazení $f \mapsto T_f$ je prosté a lineární zobrazení prostoru $L^1_{\text{loc}}(G)$ (s rovností ve smyslu rovnosti skoro všude) do prostoru distribucí řádu nula.*
(b) *Zobrazení $\mu \mapsto T_\mu$ je prosté a lineární zobrazení prostoru $M(G)$ do prostoru distribucí řádu nula.*

Pojem *regulární distribuce.*
Příklad distribucí řádů $n \in \mathbb{N}$ a distribuce, která nemá konečný řád.
Příklad "regularizace"funkce $1/x$.
Poznámka o násobení distribucí a definice násobení distribuce a funkce z $C^\infty(G)$.

4.4. **Derivace distribucí a konvergence posloupnosti distribucí.**
Definice $D^\alpha T$.
Příklad $T'_{\text{sgn}} = 2T_{\delta_0} = 2\delta_0$. Slabá derivace $2\delta_0$, resp. $T_{2\delta_0}$, je "derivace sgn ve smyslu distribucí".
Poznámka. $T_{f'} = (T_f)'$, pokud f je lokálně absolutně spojitá na otevřeném intervalu v $\mathbb{R}$, tj. klasická derivace splývá s derivací ve smyslu distribucí.
Příklad Cantorovy funkce f a derivace $(T_f)' = T_\mu$, kde μ je definována pomocí f jako výše.
Příklad - cvičení. Derivace $\log|x|$ "ve smyslu distribucí"je regularizace $1/x$ jako výše.

Tvrzení 9 (existence a jednoznačnost primitivní distribuce)**.** *Nechť $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Pak existuje $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ takové, že $S' = T$ ("primitivní distribuce"k T). Řešení S je určeno jednoznačně až na konstantu v tom smyslu, že $S + T_f$, kde $f(x) = c$ na $\mathbb{R}$ pro nějaké $c \in \mathbb{C}$, jsou všechna řešení.*

Poznámka - cvičení. Je-li $\frac{\partial}{\partial x_i} S = 0$ pro $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d$ a všechna $i = 1, \dots, d$, pak je $S = T_c$ pro nějakou konstantní funkci c. Návod.
Pro distribuce T_k a T v $\mathcal{D}'(G)$ píšeme $T_k \to T$, jestliže jde o *bodovou konvergenci* na $\mathcal{D}(\Omega)$.

Věta 10. *Jestliže $T_k \in \mathcal{D}'(G)$ a $T_k(\varphi) \to T(\varphi)$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, pak*

(b) *$T \in \mathcal{D}'(G)$ a*
(b) *$D^\alpha T_k \to D^\alpha T$ pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.*

Poznámky - cvičení.
Dokažte, že $\lim_{h_k \to 0} \frac{T(\varphi(\cdot - h_k) - T\varphi(\cdot)}{h_k} = T'$ pro $h_k \to 0$, $h_k \neq 0$.
Platí: Každá distribuce $T \in \mathcal{D}'(G)$ je (lokálně konečnou) sumou derivací spojitých funkcí, tj. $T = \sum_\alpha D^\alpha f_\alpha$, kde sčítáme přes všechny multiindexy α a jen konečně mnoho nosičů funkcí f_α má neprázdný průnik s pevně zvolenou kompaktní podmnožinou G.

5. Fourierova transformace

Motivace. Fourierovy řady pro popis periodických lokálně integrovatelných funkcí. "Fourierův integrál"pro popis integrovatelných funkcí. Fourierova transformace definuje analogii ke koeficientům Fourierovy řady.

5.1. **Fourierova transformace integrovatelných funkcí a Schwartzův prostor.**

Definice Fourierovy transformace $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ pro funkce z $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Věta 1. *$\mathcal{F}$ je spojitý lineární operátor $L^1(\mathbb{R}^n)$ do $C_0(\mathbb{R}^n)$.*

Cvičení. Z pozdějších výsledků spočtete normu $\mathcal{F}$.
Konec 22. přednášky.

Lemma 2 (hustota $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ v $L_1(\mathbb{R}^d)$)**.** *Množina $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je hustá v prostor $L_1(\mathbb{R}^d)$.*

Poznámka. Platí i pro $L_p(\mathbb{R}^d)$, kde $p \geq 1$ s podobným důkazem.

Pojem Schwartzova prostoru $\mathcal{S} \subset L_1(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{F}$ na $\mathcal{S}$.
Definice Schwartzova prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ rychle ubývajících funkcí.
Poznámka. Ekvivalentní charakterizace pomocí polynomů. Vztah k základnímu prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Příklad $\exp(-\|x\|^2)$.

Tvrzení 3 ($\mathcal{S}$ a operace násobení, derivování a $\mathcal{F}$)**.**
(a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{p\in[0,\infty]} L_p(\mathbb{R}^d)$ *(spec. $\mathcal{S} \subset L_1$).*
(b) Nechť $f, g \in \mathcal{S}$, p je polynom na $\mathbb{R}^d$ a $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^d$. Pak $pf \in \mathcal{S}$, $fg \in \mathcal{S}$ a $D^\alpha f \in \mathcal{S}$.
(c) Pro $f \in \mathcal{S}$ a $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^d$ platí:
 (c$_1$) $\mathcal{F}(x^\alpha f) = i^{|\alpha|} D^\alpha(\mathcal{F}f)$ *a*
 (c$_2$) $\mathcal{F}(D^\alpha f) = i^{|\alpha|} y^\alpha(\mathcal{F}f)$.
(d) $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$.

V (c) jde v jistém smyslu o záměny operací $\mathcal{F}$ a D^α, resp. x^α.
Konec 23. přednášky.

Příklad - cvičení.
(1) Pro $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ a $h \in \mathbb{R}^d$ platí $\mathcal{F}(e^{i\langle x,h\rangle} f(x))(y) = \widehat{f}(y-h)$.
(2) Pro $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $\varepsilon > 0$ a $g(x) = f(\varepsilon x)$ platí $\widehat{g}(y) = \frac{1}{\varepsilon^d}\widehat{f}(\frac{y}{\varepsilon})$.

Lemma 4 (pevný bod $\mathcal{F}$)**.** *Funkce $\gamma(x) = \exp(-\|x\|^2/2)$ je prvkem $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $\widehat{\gamma} = \gamma$.*

Lemma 5 ($\mathcal{F}^2$ na $\mathcal{S}$)**.**
(1) Pro $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ platí $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y) g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x)\, dx$.
(2) Je-li $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, pak $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = f(-x)$.

Věta 6 (inverzní formule na $\mathcal{S}$ a na L_1)**.**
(a) $\mathcal{F} \restriction \mathcal{S} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *je bijekce a*

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{i\langle x,y\rangle}\, dy.$$

(b) $\mathcal{F} \restriction \mathcal{S}$ *je L_2-izometrie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tj. $\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle = \langle f, g\rangle$ pro $f, g \in \mathcal{S}$.*

(c) *Je-li $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak*

$$f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(y) e^{i\langle x,y\rangle}\, dy$$

je jediná funkce v $C_0(\mathbb{R}^d)$ taková, že $f_0 = f$ skoro všude.

Věta 7 (Plancherelova transformace)**.** *Operátor $\mathcal{F} \restriction \mathcal{S} : \mathcal{S} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ má jediné rozšíření $\mathcal{P}$ na izometrii $L^2(\mathbb{R}^n)$ na $L^2(\mathbb{R}^n)$. Navíc platí, že $\mathcal{F}f = \mathcal{P}f$ pro $f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$.*

5.2. **Temperované distribuce na $\mathbb{R}^d$ a jejich Fourierova transformace.**

Značení $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, ...

Definice norem $\| \|_N^{\mathcal{S}}$. Definice *konvergence posloupností v $\mathcal{S}$* pomocí konvergence vzhledem k normám $\| \|_N^{\mathcal{S}}$, $N \in \mathbb{N}_0$.

Metrizovatelnost úplnou metrikou $\rho_{\mathcal{S}}$. (Nejde o normovaný prostor. Speciálně, normy $\| \|_N^{\mathcal{S}}$ nejsou ekvivalentní.)

Poznámka - cvičení. Zobrazení $x^\alpha\varphi$, $D^\alpha\varphi$, $\mathcal{F}\varphi$ jsou spojitá zobrazení prostoru $(\mathcal{S}, \rho_{\mathcal{S}})$ do sebe (dodatek k Tvrzení 3).

Tvrzení 8 (konvergence v $\mathcal{D}$ a v $\mathcal{S}$)**.**
(a) Pokud $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathcal{D}$, pak $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathcal{S}$.
(b) Množina $\mathcal{D}$ je hustá v prostoru $(\mathcal{S}, \rho_{\mathcal{S}})$.
(c) Každý spojitý lineární funkcionál na $(\mathcal{S}, \rho_{\mathcal{S}})$ je jednoznačně zadán svou restrikcí na $\mathcal{D}$.
(d) Každý spojitý lineární funkcionál na $(\mathcal{D}, \rho_{\mathcal{S}})$ je distribuce, která je restrikcí nějakého $S \in \mathcal{S}'$.

Příklad posloupnosti prvků $\mathcal{D}$, která konverguje k nulové funkci v $\mathcal{S}$, ale ne v $\mathcal{D}$. Např. $\varphi_n = \frac{1}{n}\varphi_{\{0\},1}(x/n)$.

Definice *temperované distribuce*. Značení $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) = \mathcal{S}'$.

Příklady temperovaných distribucí. $T_f \in \mathcal{S}'$, pokud $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ je měřitelná a existuje polynom p na $\mathbb{R}^d$ takový, že $|f| \le |p|$ na $\mathbb{R}^d$.

Příklad regulární distribuce, která není temperovaná. Např. $T_{\exp(|x|)}$.

Tvrzení 9 (operace na $\mathcal{S}'$)**.** *Je-li $S \in \mathcal{S}'$ a $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^d$, jsou $D^\alpha S$ a $x^\alpha S$ temperované distribuce.*

Konvergence temperovaných distribucí jako bodová konvergence na celém $\mathcal{S}$.

Věta 10 (spojitost a $\mathcal{S}'$)**.**
(1) Pokud $S_n\varphi \to S\varphi$ pro všechna $\varphi \in \mathcal{S}$ a $S_n \in \mathcal{S}'$, pak $S \in \mathcal{S}'$.
(2) Pokud $S_n \to S$ v $\mathcal{S}'$ a $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^d$, pak i $x^\alpha S_n \to x^\alpha S$ a $D^\alpha S_n \to D^\alpha S$.

Definice *Fourierovy transformace $\mathcal{F}S = \widehat{S}$ pro $S \in \mathcal{S}'$.*

Věta 11 (o Fourierově transformaci distribucí)**.**
(a) $\mathcal{F}$ je lineární operátor $\mathcal{S}'$ do $\mathcal{S}'$.
(b) Pokud $S_n \to S$ v $\mathcal{S}'$, pak $\mathcal{F}S_n \to \mathcal{F}S$ v $\mathcal{S}'$ ("$\mathcal{F}$ je spojitý na $\mathcal{S}'$").
(c) $\mathcal{F}$ je lineární bijekce $\mathcal{S}'$ na $\mathcal{S}'$ a $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$.
(d) Je-li $S \in \mathcal{S}'$ a $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^d$, pak

$$\mathcal{F}(D^\alpha S)(\varphi) = i^{|\alpha|}(x^\alpha \widehat{S})\varphi \text{ a}$$
$$\mathcal{F}(x^\alpha S)\varphi = i^{|\alpha|}(D^\alpha \widehat{S})\varphi.$$

Příklady - cvičení.
Fourierova tranformace T_f pro konstantní funkce f a T_{δ_0} pro Diracovu míru δ_0.
Najděte všechna řešení diferenciální rovnice $S'' + S = \delta_0$ v $\mathcal{S}'$.

5.3. **O konvoluci integrovatelných funkcí.**
$L_p(\mathbb{R}^d) = L_p$, $C^\infty(\mathbb{R}^d) = C^\infty$.

Tvrzení 12 (o konvoluci funkce, hladkých aproximacích a Fourierově transformaci)**.**

(a) Pro $f \in L_p$, $p \in [1, \infty)$ a $g \in L_1$ je konvoluce $f * g$ definovaná předpisem $(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(y - x)\,dx$. Je prvkem L_p a platí $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$.
(Speciálně pro $f \in L_1$ platí $f * g \in L_1$ a $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Konvoluce je komutativní a asociativní na L_1.)

(b) Je-li $f \in L^1_{\mathrm{lok}}$ a $\varphi \in \mathcal{D}$, platí $f * \varphi \in C^\infty$ a $D^\alpha(f * \varphi) = f * (D^\alpha \varphi)$.

(c) Je-li $f \in L_p$, $p \in [1, \infty)$, pak $f * h_n \to f$ v L_p, kde $h_n = \psi^d_{1/n}$ a $\psi^d_r \in \mathcal{D}$ jsou funkce definované ve 4. části důkazu Věty 3.

(d) Jsou-li $f, g \in L_1$, je $\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f}\,\widehat{g}$.