

### Písemka z úvodu do funkcionální analýzy - vzor

**Příklad 1** Necht' zobrazení  $F$  je definováno pro posloupnosti reálných čísel  $x = (x_1, x_2, \dots)$  předpisem

$$F(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^k} x_k.$$

Vyšetřete:

- Dokažte, že  $F$  je spojitý lineární funkcionál na prostoru konvergentních posloupností  $c$  ( $\|x\|_c = \sup\{|x_k| : k = 1, 2, \dots\}$ ).
- Vyšetřete, čemu se rovná jeho norma.
- Vyšetřete, zda svou normu nabývá na jednotkové kouli.

**Příklad 2** Zobrazení  $S$  je definováno předpisem

$$Sf(x) = \int_1^x t^2 f(t) dt.$$

- Dokažte, že  $S$  je omezený lineární operátor prostoru  $C([1, 2])$  do prostoru  $C([1, 2])$  (nad  $\mathbb{R}$ ).
- Vyšetřete bodové spektrum  $\sigma_p(S)$ . (Návod: Použijte své znalosti o diferenciálních rovnicích.)
- Vyšetřete kompaktnost a spektrum  $S$ .

**Příklad 3**

- Dokažte z definic, že pro  $u \in C^\infty(\mathbb{R})$  a distribuci  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  platí  $(uT)' = u'T + uT'$ , a z toho též  $(uT)'' = u''T + 2u'T' + uT''$ .
- Dokažte z definic, že  $T'_{|x|} = T_{\text{sgn}}$ ,  $T'_{\text{sgn}} = 2\delta_0$  a  $xT_{\text{sgn}} = T_{|x|}$ .
- Ukažte pomocí předchozího, že platí

$$(x^2 T_{|x|})'' = 6 T_{|x|}.$$

**Příklad 4**

- Ukažte, že Fourierovy transformace  $\hat{f}$  funkce  $f = \chi_{(0,1)}$  a  $\hat{D}$  distribuce  $D = T_f$  jsou definovány.
- Spočtete Fourierovu transformaci  $\hat{f}$  funkce  $f = \chi_{(0,1)}$  a  $\hat{D}$  distribuce  $D = T_f$ .
- Porovnejte  $T_{\hat{f}}$  a  $\hat{D}$ .