Písemka C z úvodu do funkcionální analýzy - 3. termín, 8.2.2017

Příklad 1 Definujme zobrazení $T_p(x) = \Big(\alpha_n x_{2n-1}\Big)_{n=1}^{\infty}$ pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$, kde $p \in [1,\infty]$ a $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $|\alpha_n| = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$.

(a) Vyšetřete, pro která $p \in [1,\infty]$ je $T_p \in L(\ell_p)$ a čemu se rovná $\|T\|_{L(\ell_p)}$.

(b) Vyšetřete bodové spektrum operátorů T_p v závislosti na $p \in [1,\infty]$.

(c) Lze z předchozího vyvodit, čemu je rovno spektrum operátorů T_p, $p \in [1,\infty]$ a zda je některý z operátorů kompaktní?

(8 bodů)

Příklad 2 Zobrazení F_q je definováno předpisem

$$F_q(f) = \int_{\mathbb{R}^2} \exp\big(-\frac{|x_1|^2 + |x_2|^2}{2}\big) f(x_1,x_2)\ dx_1\ dx_2,$$

kde $D(F_0) = X_0 := C_0(\mathbb{R}^2)$ a $D(F_p) = X_p := L_p(\mathbb{R}^2)$ ($p \in [1,\infty]$). Vyšetřete pro všechna $q \in \{0\} \cup [1,\infty]$:

(a) zda $F_q \in X_q^*$;

(b) čemu je rovna norma $\|F_q\|_{X_q^*}$ funkcionálu F_q;

(c) zda F_q nabývá hodnotu $\|F_q\|_{X_q^*}$ v některém prvku uzavřené jednotkové koule prostoru X_q.

(8 bodů)

Příklad 3 Uvažujme rovnici

$$(R) \quad x^2 T = T_f$$

pro $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, kde $f(x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zformulujte podrobně, co rovnost (R) znamená a dokažte, že $-T''_{\log|x|}$ je řešením (R).

(b) Ověřte, že rovnost $x^2T = 0$ je ekvivalentní rovnosti $T(\psi) = 0$ pro všechna ψ z vektorového prostoru $\mathcal{D}_0 = \{\psi : \psi = x^2\varphi,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

(c) Bez důkazu můžete užít rovnost $\mathcal{D}_0 = \{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \psi(0) = \psi'(0) = 0\}$. Vyšetřete kodimenzi prostoru $\mathcal{D}_0$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, a tedy maximální počet nezávislých funkcionálů nulových na $\mathcal{D}_0$.

(d) Najděte všechna řešení rovnice $x^2T = 0$ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (užijte předchozí dva body).

(e) Najděte všechna řešení rovnice (R) v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Jsou to zároveň prvky $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$?

(8 bodů)

Hodnocení

Nutnou podmínkou k dosažení hodnocení **dobře** je dosažení aspoň **12** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **velmi dobře** je dosažení aspoň **15** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **výborně** je dosažení aspoň **18** bodů.