**Písemka B z úvodu do funkcionální analýzy - 2. termín, 30.1.2017**

**Příklad 1** Definujme zobrazení $Tx = \left(x_n + \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ a $Sx = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{\infty} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ pro $x \in \ell_1$.

(a) Dokažte, že $S$ a $T$ jsou prvky $L(\ell_1, \ell_{3/2})$.

(b) Vyšetřete kompaktnost operátorů $S$ a $T$.

(c) Vyjádřete $T'$ pomocí reprezentací funkcionálů z $\ell_{3/2}^*$ a z $\ell_1^*$ prvky příslušných $\ell_p$-prostorů. (Nezapomeňte ověřit předpoklady vět, které používáte.)

(d) Vyšetřete, čemu se rovná $\|S\|$. (Návod. Může se hodit uvažovat hodnoty operátoru v bodech $e_n = (\delta_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ pro velká $n$.)

(8 bodů)

**Příklad 2** Zobrazení $F$ je definováno předpisem $(Ff)(x) = \int_0^1 (e^x t + e^t x) f(t)\, dt$ pro funkce $f \in X := L_\infty(0,1)$ a $x \in (0,1)$.

(a) Vyšetřete, zda jde o operátor z $L(X)$.

(b) Najděte bázi nějakého konečně rozměrného prostoru, který obsahuje obraz $F$. Je $F$ kompaktní?

(c) Vyšetřete spektrum a bodové spektrum $F$ (lze užít (b) pro vyšetřování existence některých nenulových vlastních vektorů ve vhodném tvaru).

(8 bodů)

**Příklad 3** Uvažujme lineární diferenciální rovnici (L) $T' + T = \delta_0$ a homogenní rovnici (H) $T' + T = 0$ pro $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(a) Najděte všechny dvojice řešení $f_1$ a $f_2$ rovnice $f' + f = 0$ na $I_1 = (-\infty, 0)$ a $I_2 = (0, \infty)$. Vyšetřete, které distribuce $T_{f_1\chi_{I_1} + f_2\chi_{I_2}}$ řeší (L) na $\mathbb{R}$.

(b) Najděte nenulovou regulární distribuci, která je řešením (H) na celém $\mathbb{R}$.

(c) Dokažte, že prostor všech řešení (H) v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je lineární prostor dimenze 1. (Návod. Ukažte, že jde o distribuce, které jsou nulové na prostoru $\mathcal{D}_0 = \{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y}\psi(y)\, dy = 0\}$. Pro vyjádření řešení lineární diferenciální rovnice s pravou stranou $\psi$ můžete užít metodu variace konstant.)

(d) Popište množiny všech řešení (L) v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Najděte mezi nimi řešení, které patří do $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(8 bodů)

**Hodnocení**

Nutnou podmínkou k dosažení hodnocení **dobře** je dosažení aspoň **12** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **velmi dobře** je dosažení aspoň **15** bodů.
Nutnou podmínkou pro hodnocení **výborně** je dosažení aspoň **18** bodů.