

Přímekka A z úvodu do funkcionální analýzy - 1. termín, 25.1.2017

Příklad 1 Necht' zobrazení $F_1(f) = \int_0^1 xf(x) dx$ a $F_2(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(\frac{1}{n})$ pro $f \in X = C([0, 1], \mathbb{R})$.

Pro funkcionály $F_1, F_2, F_1 + F_2$ a $F_1 - F_2$ uka'zte,

- (a) že jde o prvky X^* ;
- (b) čemu jsou rovny jejich normy;
- (c) ve všech čtyřech případech najděte všechna $f \in B_X$, ve kterých má příslušný funkcionál hodnotu rovnou jeho normě.

(8 bodů)

Příklad 2 Zobrazení T je definováno předpisem $Tx = (\frac{x_2}{2}, \frac{-x_1}{2}, \dots, \frac{x_{2n}}{2n}, \frac{-x_{2n-1}}{2n}, \dots)$ pro každou posloupnost $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$.

- (a) Vyšetřete, zda jde o kompaktní operátor a určete jeho normu.
- (b) Vyšetřete, zda T je prosté zobrazení a zda $T(\ell_2) = \ell_2$.
- (c) Vyšetřete spektrum a bodové spektrum T .

(8 bodů)

Příklad 3

- (a) Uka'zte, že distribuce $\widehat{T_{\text{sgn}}}$ je dobře definovaná a že $\widehat{T_{\text{sgn}}}(\varphi) = 0$, pokud $\varphi \in \mathcal{S}$ je sudá funkce.
- (b) Doka'zte následující rovnosti pomocí tvrzení z přednášky nebo odvozením z definic:

$$(ix)\widehat{T_{\text{sgn}}} = \widehat{T'_{\text{sgn}}} = 2\widehat{T_{\delta_0}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}T_1.$$

- (c) Označme $T_{\frac{1}{x}}$ distribuci $T_{\frac{1}{x}}\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ z $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, o které jsme dokázali, že je rovna $T'_{\log|x|} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Uka'zte z definice $T_{\frac{1}{x}}$ a z definice násobení funkcí x , že $xT_{\frac{1}{x}} = T_1$. Dále uka'zte, že každé řešení T rovnice $xT = T_1$ je tvaru $T = T_{\frac{1}{x}} + cT_{\delta_0}$, kde $c \in \mathbb{C}$. K tomu je třeba dokázat, že distribuce U , pro kterou $xU = 0$, je tvaru cT_{δ_0} . (Bez důkazu můžete použít, že $\{x\varphi(x) : \varphi \in \mathcal{D}\} = \{\psi \in \mathcal{D} : \psi(0) = 0\}$).
- (d) Odvoďte z (b) a (c), že $\widehat{T_{\text{sgn}}} = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}}T_{\frac{1}{x}} + cT_{\delta_0}$. Pomocí (a) odvoďte, že $c = 0$.

(8 bodů)

Hodnocení

Nutnou podmínkou k dosažení hodnocení **dobře** je dosažení aspoň **12** bodů.

Nutnou podmínkou pro hodnocení **velmi dobře** je dosažení aspoň **15** bodů.

Nutnou podmínkou pro hodnocení **výborně** je dosažení aspoň **18** bodů.