

Písemka z úvodu do funkcionální analýzy - pro cvičení z 1. části

Příklad 1 Necht' zobrazení f je definováno předpisem $f(x) = \int_0^2 (1+t^3)x(t) dt$.

- (a) Dokažte, že f je spojité lineární funkcionál na prostoru $(X, \|\cdot\|)$, kde $X = C([0, 2])$ a $\|x\| = \int_0^2 |x(t)| dt$.
- (b) Vyšetřete, čemu se rovná jeho norma.
- (c) Vyšetřete, zda svou normu nabývá na jednotkové kouli.

(6 bodů)

Příklad 2 Zobrazení S je definováno předpisem

$$S : (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2^{\mathbb{C}} \mapsto \left(\frac{e^{-i}x_1}{1}, \frac{e^{-2i}x_3}{2}, \dots, \frac{e^{-ni}x_{2n-1}}{n}, \dots \right).$$

- (a) Dokažte, že $S \in L(X)(=L(X, X))$, kde $X = \ell_2^{\mathbb{C}}$.
- (b) Vyšetřete jeho normu a existenci $x \in B_X$, pro který $\|Sx\| = \|S\|$.
- (c) Vyšetřete, zda jde o projekci.

(6 bodů)

Příklad 3 Necht' $L = \{f \in C([-1, 1]) : f \text{ je lichá funkce}\}$ a $S = \{f \in C([-1, 1]) : f \text{ je sudá funkce}\}$.

- (a) Dokažte, že platí $L \oplus_t S = C([-1, 1])$.
- (b) Ukažte, že existuje projekce $C([-1, 1])$ na L s normou 1 a jádrem S .
- (c) Ukažte, že $f \in S \mapsto f + L$ definuje lineární izometrii S na C/L .

(6 bodů)

Písemka z úvodu do funkcionální analýzy - pro cvičení z 1. části

Příklad 1 Necht' zobrazení f je definováno předpisem $f(x) = \int_0^2 (1+t^3)x(t) dt$.

- (a) Dokažte, že f je spojité lineární funkcionál na prostoru $(X, \|\cdot\|)$, kde $X = C([0, 2])$ a $\|x\| = \int_0^2 |x(t)| dt$.
- (b) Vyšetřete, čemu se rovná jeho norma.
- (c) Vyšetřete, zda svou normu nabývá na jednotkové kouli.

(6 bodů)

Příklad 2 Zobrazení S je definováno předpisem

$$S : (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2^{\mathbb{C}} \mapsto \left(\frac{e^{-i}x_1}{1}, \frac{e^{-2i}x_3}{2}, \dots, \frac{e^{-ni}x_{2n-1}}{n}, \dots \right).$$

- (a) Dokažte, že $S \in L(X)(=L(X, X))$, kde $X = \ell_2^{\mathbb{C}}$.
- (b) Vyšetřete jeho normu a existenci $x \in B_X$, pro který $\|Sx\| = \|S\|$.
- (c) Vyšetřete, zda jde o projekci.

(6 bodů)

Příklad 3 Necht' $L = \{f \in C([-1, 1]) : f \text{ je lichá funkce}\}$ a $S = \{f \in C([-1, 1]) : f \text{ je sudá funkce}\}$.

- (a) Dokažte, že platí $L \oplus_t S = C([-1, 1])$.
- (b) Ukažte, že existuje projekce $C([-1, 1])$ na L s normou 1 a jádrem S .
- (c) Ukažte, že $f \in S \mapsto f + L$ definuje lineární izometrii S na C/L .

(6 bodů)