Přednáška Matematika I v prvním semestru 2013-2014

Spojení na přednášejícího a konzultace

Petr Holický,
Matematicko fyzikální fakulta
Katedra matematické analýzy
Sokolovská 83, 2. patro
e-mail: `holicky@karlin.mff.cuni.cz`
telefon: 22191 3260
stránky: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~holicky` (odkazy na texty k odpřednesené látce, doporučené příklady, zápočty, zkoušky atd.)
Konzultace po domluvě.

Doporučená literatura

1. Jako doplněk k přednáškám:
V. Hájková, M. Johanis, O. John, O.F.K. Kalenda a M. Zelený: Matematika (kapitoly I – IV)
2. Sbírky příkladů:
J. Kopáček: Příklady z matematiky pro fyziky I, II
L. Zajíček: Vybrané úlohy z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník
B. P. Děmidovič: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy
3. Seminář pro doplnění středoškolské látky *Seminář matematické analýzy I*

Úvod

O čem je matematika?

Co je matematika?

- Matematika je věda o abstraktních *pojmech*, motivovaných zpravidla nějakou zkušeností z reálného života (např. reálná čísla – fyzikální veličiny, vzdálenosti objektů ap.).
- Proto umíme zformulovat řadu faktů, které tyto základní pojmy v některé partii matematiky splňují („axiomy“).
- Matematika se pak zabývá odvozováním („dokazováním“) nových faktů o těchto pojmech („matematické věty“).
- Často se hodí zavést nové pojmy pomocí již zavedených („definice“).

K čemu je matematika?

- Modelujeme-li matematickou teorií nějakou realitu na základě zkušeností (fyzika, geometrie, přírodověda, ekonomie, . . .), dostáváme výsledky, které mohou o této realitě říkat něco zajímavého.
- Učíme se a zdokonalujeme se v logickém myšlení, které se nám může hodit i jinde.
- Učíme se klást si přirozené a zajímavé otázky a hledat na ně odpovědi.

Obsah přednášky Matematika I

I. Jazyk matematiky (množiny, výroky, zobrazení).

II. Reálná čísla.

III. Posloupnosti reálných čísel.

IV. Reálné funkce jedné proměnné.

I. Jazyk matematiky (množiny, výroky, zobrazení).

I.1. Množiny a jejich prvky

Pojem množiny

Příklady, zápis $A = \{1, 3, 7\}$, $B = \{$I : I je interval reálných čísel$\}$,
$C = \{x \in \mathbb{R} : x$ je řešení kvadratické rovnice s celými koeficienty$\}$ atd.
O *množině* mluvíme, je-li dobře zadáno, co je jejím prvkem. Svými prvky je množina určena jednoznačně.
Relace mezi prvky a množinami:

- $x \in M$ ... x je prvkem M;
- $x \notin M$ ... x není prvkem M.

Množina neobsahující žádné prvky:

- $\emptyset \ldots$ prázdná množina.

Operace a relace

Operace s množinami:

- $A \cup B$ znamená $x \in A$ nebo $x \in B$ (sjednocení),
- $A \cap B$ znamená $x \in A$ a $x \in B$ (průnik),
- $A \setminus B$ znamená $x \in A$ a $x \notin B$ (rozdíl).

Relace mezi množinami:

- $A \subset B$ ... množina A je podmnožinou množiny B, pokud každý prvek A ($x \in A$) je v B ($x \in B$);
- $A = B$ ... množiny A a B se rovnají, pokud mají stejné prvky, ekvivalentně, pokud $A \subset B$ a $B \subset A$;
- $A \cap B = \emptyset$ ... množiny A a B jsou disjuntní (nemají společný prvek).

I.2. Výroky a jejich pravdivost

Pojem výrok

Výpovědi o zavedených pojmech, o níž má smysl říci, že je pravdivá či nepravdivá, říkáme *výrok*.
Operace s výroky:

- Konjunkce $V\&W$, též $V \wedge W$ či V a W;
- disjunkce $V \vee W$, též V nebo W;
- negace $\neg V$, též $\mathrm{non}\, V$;
- implikace $V \Rightarrow W$;
- ekvivalence $V \Leftrightarrow W$.

Příklady pravdivých výroků

Pro všechny výroky V, W platí (tj. následující výroky jsou pravdivé nezávisle na pravdivosti V, W):

- $V \vee \neg V$ (vyloučení třetí možnosti);
- $\neg(\neg V) \Leftrightarrow V$;
- $\neg(V\&\neg V)$, $(V\&\neg V) \Rightarrow W$ (viz důkaz sporem - např. $W : \emptyset \neq \emptyset$, neslučitelnost s negací);
- $(\neg(V\&W)) \Leftrightarrow (\neg V \vee \neg W)$ a $(\neg(V \vee W)) \Leftrightarrow (\neg V\&\neg W)$ (negace konjunkce a disjunkce);
- $(V \Rightarrow W) \Leftrightarrow (\neg W \Rightarrow \neg V)$ (viz nepřímý důkaz);
- $(V \Rightarrow W) \Leftrightarrow (\neg V \vee W)$ (přepis implikace);
- $(V \Leftrightarrow W) \Leftrightarrow ((V \Rightarrow W)\&(W \Rightarrow V))$ (přepis ekvivalence).

Výrokové formy a kvantifikátory

M množina,
výpověď $V(x)$ s proměnnou $x \in M$ je výroková forma,
pokud po dosazení prvku M za x jde o výrok.
Např. $V(n)\colon n < 2^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

- M množina, $\{x \in M : V(x)\}$ ... množina x, pro která je $V(x)$ pravdivý výrok;
- $(\forall x \in M)V(x)$ ... obecný kvantifikátor;
- $(\exists x \in M)V(x)$ ... existenční kvantifikátor;
- $(\exists! x \in M)V(x)$ ... existence jediného prvku s danou vlastností.

Příklady platných tvrzení (tj. pravdivých výroků)

Pro množiny M a $A, B \subset M$ platí:

- $(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \in A)(x \in B) \Leftrightarrow (\forall x \in M)((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$ (zápisy definice podmnožiny);
- $(\forall x \in M)(x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B))$ (zápis definice sjednocení);
- $(\forall x \in M)(x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \,\&\, x \in B))$ (zápis definice průniku);
- $\neg((\forall x \in M)V(x)) \Leftrightarrow ((\exists x \in M)\neg V(x))$ (negace výroků s kvantifikátory);
- $\neg((\exists x \in M)V(x)) \Leftrightarrow ((\forall x \in M)\neg V(x))$ (negace výroků s kvantifikátory).

Pojem zobrazení a indexované systémy prvků a množin

Zobrazení $f\colon A \to B$ přiřadí prvku $x \in A$ jednoznačně určený prvek $y = f(x) \in B$. Zápis $x \mapsto f(x)$.
Systém prvků množiny. Máme-li množiny P, I a zobrazení $i \in \mathrm{I} \mapsto x_i \in P$,
píšeme též $\{x_i\}_{i\in\mathrm{I}}$ či x_i, $i \in$ I, a mluvíme o systému prvků x_i s indexy $i \in$ I.
Systém podmnožin množiny. Máme-li množiny M, I a zobrazení $i \in \mathrm{I} \mapsto M_i \subset M$, tj. $M_i \in \mathcal{P}(M) = \{P : P \subset M\}$,
píšeme též $\{M_i\}_{i\in\mathrm{I}}$ či M_i, $i \in$ I, a mluvíme o systému množin M_i s indexy $i \in$ I.
KONEC 1. PŘEDNÁŠKY - 2.10.2013.

Operace s indexovanými systémy množin

Definujeme sjednocení, průnik a kartézský součin systému množin M_i, $i \in$ I, takto:

- $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} M_i = \{x \in M : (\exists i \in \mathrm{I}) x \in M_i\}$;
- $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} M_i = \{x \in M : (\forall i \in \mathrm{I}) x \in M_i\}$;
- $\prod_{i\in\mathrm{I}} M_i = \{\{x_i\}_{i\in\mathrm{I}} : (\forall i \in \mathrm{I}) x_i \in M_i\}$, kde $\{x_i\}_{i\in\mathrm{I}} : i \mapsto x_i$.

Speciálně pro $\mathrm{I} = \{1, \ldots, n\}$ píšeme $\bigcup_{i=1}^n M_i = M_1 \cup \cdots \cup M_n$, $\bigcap_{i=1}^n M_i = M_1 \cap \cdots \cap M_n$ a
$\prod_{i=1}^n M_i = M_1 \times \cdots \times M_n$.

Kartézské součiny a uspořádané n-tice

Prvky $\{x_i\}_{i=1}^n \in M_1 \times \cdots \times M_n$ jsou uspořádané n-tice $[x_1, \ldots, x_n]$.
Výroková forma může obsahovat i uspořádané n-tice proměnných.
Např. $V(a,b,n)\,:\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$ nebo $W(a,b,n)\,:\ a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-1-k}$ pro $[a,b,n] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Dokažte, že $V(a,b,n)$ i $W(a,b,n)$ platí pro všechny $[a,b,n] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ (jde o binomickou formuli a známý důležitý vzorec pro $a^n - b^n$). Dokažte indukcí.

De Morganova pravidla

Tvrzení 1 (de Morganova pravidla)**.** *Pro množinu $A \subset M$ a systém množin $A_i \subset M$, $i \in I$, platí rovnosti*

(a) $A \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(A \setminus A_i)$;

(b) $A \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(A \setminus A_i)$.

II. Reálná čísla

II.1. Přirozená a celá čísla.

$\mathbb{N}$, aritmetické operace a uspořádání

Množina $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, operace $+$, $\times$ a relace uspořádání $<$, resp. $\leq$, splňují pro a, b, c z $\mathbb{N}$:

$(+_k)$ $(\forall a, b) a + b = b + a$ (komutativita sčítání);

$(+_a)$ $(\forall a, b, c)(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativita sčítání);

$(\times_k)$ $(\forall a, b) a \cdot b = b \cdot a$ (komutativita násobení);

$(\times_a)$ $(\forall a, b, c)(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asociativita násobení);

$(+\times)$ $(\forall a, b, c)\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivita);

$(<_t)$ $(\forall a, b, c)(a < b \,\&\, b < c) \Rightarrow a < c$ (tranzitivita uspořádání);

$(<_l)$ Pro každá a, b platí právě jeden ze vztahů $a = b$, $a < b$, $b < a$ (linearita uspořádání);

$(+<)$ $(a < b) \Rightarrow a + c < b + c$;

$(\times <)$ $[(a < b)\&(c > 0)] \Rightarrow (a \cdot c < b \cdot c)$.

Princip matematické indukce

Nechť $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je výroková forma, platí $V(1)$ a $(\forall n \in N)\ (V(n) \Rightarrow V(n+1))$. Pak $(\forall n \in \mathbb{N})\ V(n)$.

Příklad. Uvažujte speciálně $V(n):\ n \in A$ pro pevnou $A \subset \mathbb{N}$.

Dobré uspořádání $\mathbb{N}$.

Definice. Prvek $a \in A$ množiny A s uspořádáním $<$ je *nejmenší prvek* A (minimum A), pokud $(\forall x \in A)\ a \leq x$. V tom případě píšeme $a = \min A$. Prvek $a \in A$ množiny A s uspořádáním $<$ je *největší prvek* A (maximum A), pokud $(\forall x \in A)\ a \geq x$. V tom případě píšeme $a = \max A$.

Věta 2 (dobré uspořádání $\mathbb{N}$)**.** *Uspořádání přirozených čísel je dobré uspořádání, tj. každá neprázdná množina $A \subset \mathbb{N}$ má nejmenší prvek.*

Celá čísla, aritmetické operace a uspořádání.

Příklad. Rovnice $x + 1 = 1$ (ani $x + n = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$) nemá v $\mathbb{N}$ řešení.

Celá čísla, aritmetické operace a uspořádání.

Množina celých čísel $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$,
operace $+$, $\cdot$ a relace $<$ splňují vlastnosti vyjmenované u $\mathbb{N}$ a navíc:

- $(\exists! 0)(\forall a)\ a + 0 = a$ (existence neutrálního prvku pro $+$);
- $(\forall a)(\exists! -a)\ a + (-a) = 0$ (existence inverzního prvku pro $+$)

Důsledek 3. *Je-li $A \subset \mathbb{Z}$ neprázdná a platí-li $(\exists d \in \mathbb{Z})(\forall a \in A) d \leq a$, pak A obsahuje nejmenší prvek.Platí-li $(\exists h \in \mathbb{Z})(\forall a \in A) a \leq h$, pak A obsahuje největší prvek.*

II.2. Racionální čísla

Racionální čísla, aritmetické operace a uspořádání

Příklad. Rovnice $x(n + 1) = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$ nemá v $\mathbb{Z}$ řešení.

Racionální čísla, aritmetické operace a uspořádání

Množina racionálních čísel $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ s obvyklými operacemi sčítání a násobení a uspořádáním obsahuje $\mathbb{Z}$ a splňuje to, co $[\mathbb{Z}, +, \cdot, <]$ a navíc:

- $(\exists! 1)(\forall a)\ a \cdot 1 = a$ (existence neutrálního prvku pro $\cdot$);
- $(\forall a \neq 0)(\exists! a^{-1})\ a \cdot a^{-1} = 1$ (existence inverzního prvku pro $\cdot$, píšeme též $\frac{1}{a}$).

Říkáme, že je to „netriviální lineárně uspořádané těleso“.
KONEC 2. PŘEDNÁŠKY - 3.10.2013.

II.3. Reálná čísla

Reálná čísla a axiom infima

Příklad. Rovnice $x^2 = 2$ nemá v $\mathbb{Q}$ řešení.

Reálná čísla a axiom infima

Definice (závory a omezenost)**.** Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je *omezená zdola*, jestliže existuje číslo $d \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $d \leq x$. Takové číslo d se nazývá *dolní závorou* množiny M. Analogicky definujeme pojmy *množina omezená shora* a *horní závora*. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je *omezená*, je-li omezená shora i zdola.

Definice (infimum)**.** Budiž $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná zdola omezená množina. Číslo $a \in \mathbb{R}$ nazveme *infimum* množiny M, jestliže platí:

(a) $(\forall x \in M)\ x \geq a$,

(b) $(\forall b \in \mathbb{R}, b > a)(\exists x \in M)\ x < b$.

Značíme $a = \inf M$.

Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel s aritmetickými operacemi $+$ a $\cdot$ a s uspořádáním $<$ splňuje vlastnosti vyjmenované výše pro $\mathbb{Q}$, tj. je to „netriviální lineárně uspořádané těleso“ a navíc platí *axiom infima*:

(I) Je-li $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná a zdola omezená množina, pak M má v $\mathbb{R}$ právě jedno infimum.

Poznámky k vlastnostem $\mathbb{R}$

- Infimum množiny M je její největší dolní závora.
- Reálná čísla existují a jsou tím, že jde o netriviální lineárně uspořádané těleso a je splněn axiom infima (I) určena jednoznačně.

Některé důsledky základních vlastností operací a uspořádání $\mathbb{R}$

Tvrzení 4. *V $\mathbb{R}$ platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$:*

(a) $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,

(b) $-x = (-1) \cdot x$ *a* $x < y \Leftrightarrow -x > -y$,

(c) $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$,

(d) $x^{-n} = (x^{-1})^n$,

(e) $(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0$,

(f) pokud $x \geq 0$ *a* $y \geq 0$*, pak* $(x < y \Leftrightarrow x^n < y^n)$.

Toto tvrzení platí i v $\mathbb{Q}$ a každém „lineárně uspořádaném tělese“.

Existence přirozených odmocnin v $\mathbb{R}$

Věta 5 (o n-té odmocnině)**.** *Ke každému reálnému číslu $a \geq 0$ a ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje jediné reálné číslo $x \geq 0$ splňující $x^n = a$.*

Důkaz pro $n = 2$.
KONEC 3. PŘEDNÁŠKY - 9.10.2013
Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Značíme:

- *Otevřený interval* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$,
- *Uzavřený interval* $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$,
- *Polootevřený interval* $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$,
- *Polootevřený interval* $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$.

Bod a se nazývá *levý krajní bod intervalu*, bod b se nazývá *pravý krajní bod intervalu*. Bod, který je prvkem intervalu, ale není jeho krajním bodem, je tzv. *vnitřním bodem intervalu*.

Neomezené intervaly:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}, \quad (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\},$$

analogicky definujeme $(-\infty, a\rangle$, $\langle a, +\infty)$ a $(-\infty, +\infty)$.

Pojem suprema

Definice (supremum)**.** Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $b \in \mathbb{R}$ splňující

(a) $(\forall x \in M)\ x \leq b$,

(b) $(\forall a \in \mathbb{R}, a < b)(\exists x \in M)\ x > a$,

nazýváme *supremem* množiny M.
Supremum množiny M značíme $\sup M$.

„$b = \sup M$“ znamená, že b je nejmenší horní závora M.

Věta o supremu

Tvrzení 6 (o A a $-A$)**.** *Je-li $M \subset \mathbb{R}$, $H \subset \mathbb{R}$, $h, b \in \mathbb{R}$, pak platí:*

(a) h je horní závora M, právě když $-h$ je dolní závora množiny $-M := \{-x : x \in M\}$;

(b) $h = \min H$, právě když $-h = \max(-H)$;

(c) $b = \sup M$, právě když $-b = \inf(-M)$.

Důsledek 7 (věta o supremu)**.** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny M. Platí $\sup M = -\inf(-M)$.*

Archimédova vlastnost, celá část reálného čísla,

Lemma 8 (Archimédova vlastnost)**.** *Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.*

Důsledek 9 (existence celé části)**.** *Pro každé $r \in \mathbb{R}$ existuje celá část čísla r, tj. číslo $z \in \mathbb{Z}$ takové, že $r - 1 < z \leq r$. Celá část čísla r je určena jednoznačně a značíme ji $[r]$.*

Hustota $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$

Reálné číslo, které není číslem racionálním, nazveme číslem *iracionálním*. Množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je tedy *množinou iracionálních čísel*.

Věta 10 (o hustotě $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)**.** *Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom existuje $r \in \mathbb{Q}$ splňující $a < r < b$ a $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ splňující $a < s < b$.*

Komplexní čísla

Množinou *komplexních čísel* rozumíme množinu všech výrazů tvaru $a+bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$. Na $\mathbb{C}$ jsou definovány operace sčítání a násobení splňující stejné vlastnosti jako operace $+$ a $\cdot$ v $\mathbb{R}$ (jde o těleso) a navíc platí $i \cdot i = -1$. Platí $\mathbb{R} = \{a + 0i : a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$. Zopakujte si své znalosti o komplexních číslech.

Platí

Věta („základní věta algebry“)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Pak rovnice*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

má alespoň jedno řešení $z \in \mathbb{C}$.

KONEC 4. PŘEDNÁŠKY - 10.10.2013

III. Posloupnosti reálných čísel

III.1. Pojem posloupnosti, omezenost a monotónnie a vybrané posloupnosti

Pojem posloupnosti

Definice. Indexovaný systém $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ reálných čísel nazýváme *posloupnost reálných čísel* a píšeme též $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ či jen $\{a_n\}$.
(Jde tedy o přiřazení (zobrazení), které každému $n \in \mathbb{N}$ přiřadí $a_n \in \mathbb{R}$.)
Číslo a_n nazveme *n-tým členem* této posloupnosti.
Množinou členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozumíme množinu

$$\{x \in \mathbb{R};\ (\exists n \in \mathbb{N})\ a_n = x\} (= \{a_n : n \in \mathbb{N}\}).$$

Příklady $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$; $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$; $\{n\}_{n=1}^{\infty}$; $P_n = \frac{1}{3}(1 + (\frac{-4}{5})^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Vlastnosti posloupností - omezenost

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- *shora omezená*, jestliže množina všech členů této posloupnosti je shora omezená,
- *zdola omezená*, jestliže množina všech členů této posloupnosti je zdola omezená,
- *omezená*, jestliže množina všech členů této posloupnosti je omezená.

Vlastnosti posloupností - monotónie

Definice (monotónní posloupnosti)**.** Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je

- *rostoucí*, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *klesající*, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *nerostoucí*, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,
- *neklesající*, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je *monotónní*, pokud splňuje některou z výše uvedených podmínek. Posloupnost $\{a_n\}$ je *ryze monotónní*, pokud je rostoucí či klesající.

Aritmetické operace s posloupnostmi

Definice (aritmetické operace)**.** Buďte $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ dvě posloupnosti reálných čísel.

- *Součtem posloupností* $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{a_n + b_n\}$.
- Analogicky definujeme *rozdíl* a *součin posloupností*.
- Nechť všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$ jsou nenulové. Pak *podílem posloupností* $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ rozumíme posloupnost $\{\frac{a_n}{b_n}\}$.
- Je-li $r \in \mathbb{R}$, pak *r-násobkem posloupnosti* $\{a_n\}$ rozumíme posloupnost $\{ra_n\}$.

Vybraná posloupnost

Definice (vybraná posloupnost)**.** Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel a $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, říkáme, že posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, kde $b_k = a_{n_k}$ pro $k \in \mathbb{N}$, je *posloupnost vybraná* z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo též, že je to *podposloupnost* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 11 (o vybrané monotónní posloupnosti)**.** *Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel, pak existuje vybraná posloupnost $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která je monotónní.*

Jinými slovy existuje rostoucí posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ přirozených čísel taková, že posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je monotónní.

III.2. Vlastní limita posloupnosti

Pojem limity v $\mathbb{R}$

Definice. Řekneme, že číslo $a \in \mathbb{R}$ je *limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje takové přirozené číslo n_0, že pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$, tj.

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)\, |a_n - a| < \varepsilon.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je *konvergentní*, nebo též, že *má vlastní limitu*, pokud existuje $a \in \mathbb{R}$, které je limitou $\{a_n\}$.

KONEC 5. PŘEDNÁŠKY - 16.10.2013

Jednoznačnost a $\lim a_n$

Věta 12 (jednoznačnost limity)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ nebo jenom $\lim a_n = a$ nebo též $a_n \to a$.

Vlastní limita a nulová limita

Poznámka (vlastní limita a nulová limita). Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $a \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim a_n = a \Leftrightarrow \lim(a_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n - a| = 0.$$

Příklad. $\lim \frac{1}{n} = 0, \lim(1 + \frac{1}{n}) = 1$.

Vlastní limita a nutné podmínky

Věta 13 (limita vybrané posloupnosti)**.** *Nechť* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Jestliže platí $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, *pak také* $\lim_{k\to\infty} b_k = a$.

Příklad. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ nemá vlastní limitu.

Věta 14. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Limity a uspořádání

Věta 15 (limity a uspořádání)**.** *Nechť* $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$.

(a) Nechť $a < b$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

(b) Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $a \geq b$.

Příklad. $a_n = \frac{1}{n} > 0$ a $\lim \frac{1}{n} \leq 0$.

Vložená posloupnost

Věta 16 („o dvou policajtech“)**.** *Buďte* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *dvě konvergentní posloupnosti a* $\{c_n\}$ *taková posloupnost, že platí:*

(a) $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) a_n \leq c_n \leq b_n$,

(b) $\lim a_n = \lim b_n = c$.

Potom existuje $\lim c_n$ *a platí* $\lim c_n = c$.

Příklad (důležité limity). $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, pokud $k \in \mathbb{N}$.

KONEC 6. PŘEDNÁŠKY - 17.10.2013

Součin „nulové“ a omezené posloupnosti

Poznámka. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, $a \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$. Jestliže platí

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)\, |a_n - a| < K\varepsilon,$$

potom $\lim a_n = a$.

Lemma 17 („omezená krát nulová“)**.** *Nechť* $\lim a_n = 0$ *a nechť posloupnost* $\{b_n\}$ *je omezená. Potom* $\lim a_n b_n = 0$.

Příklady

Příklad. $\lim \frac{\sin \log n}{n} = 0$.
Příklad (důležité limity). $\lim q^n = 0$, pokud $|q| < 1$;
$\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$, pokud $\lim a_n = a$, $a_n \geq 0$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $a > 0$.

Limita a aritmetické operace

Věta 18 (limita a aritmetické operace)**.** *Nechť* $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ *a* $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$. *Potom platí:*

(a) $\lim(a_n + b_n) = a + b$,

(b) $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

(c) je-li $b \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$, *je* $\lim(a_n/b_n) = a/b$.

Příklad. $\lim \frac{2n^5+n^3-1}{n^k+6}$ pro $k \in \mathbb{Z}$;
$\lim n(\sqrt{n^2+5} - n)$.

Zobecněné posloupnosti

Pojem limity posloupnosti nezávisí na změně konečně mnoha členů posloupnosti. Pokud a_n je definováno pro $n \in \mathbb{N} \setminus K$, kde K je konečná, říkáme, že je to *zobecněná posloupnost*. Její limitou je $a \in \mathbb{R}$, pokud platí

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)\, |a_n - a| < \varepsilon.$$

Je to totéž jako $\lim a_n$, kde $\{a_n\}$ je $\{a_n\}_{\mathbb{N}\setminus K}$ doplněná pro $n \in K$ libovolně. Pro zobecněnou posloupnost s limitou a budeme též psát $\lim a_n = a$.

Zobecněné posloupnosti

Rozmyslete si platnost předchozích vět pro zobecněně posloupnosti. Předchozí větu 18 lze navíc zesílit. Limita zobecněné posloupnosti podílů a_n/b_n je podílem limit a/b, pokud je $b \neq 0$ ($\{a_n/b_n\}$ je pak zobecněná posloupnost automaticky a $b_n \neq 0$ není k tomuto závěru potřeba).

Poznámka. Pokud $\lim a_n = a$ a $k \in \mathbb{Z}$, platí pro zobecněnou posloupnost $\{a_{n+k}\}$ rovnost $\lim a_{n+k} = a$.

Příklad (důležitá limita). $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Příklad. $\lim \frac{1}{n-5}$, $\lim \sqrt[n]{n-10}$.

KONEC 7. PŘEDNÁŠKY - 23.10.2013

Podílové kritérium pro nulovost limity

Tvrzení 19. *Nechť $\{a_n\}$ je (zobecněná) posloupnost reálných čísel.*

(a) Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n > 0$ pro $n \geq n_0$ a existuje $q \in \mathbb{R}$ tak, že $a_{n+1}/a_n \leq q < 1$ pro $n \geq n_0$, pak $\lim a_n = 0$.

(b) Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n > 0$ pro $n \geq n_0$ a $\lim a_{n+1}/a_n < 1$, pak $\lim a_n = 0$.

Příklad. $\lim(-1)^n n^3/n! = 0$; $\lim n^5/2^n = 0$; $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

Příklad (důležité limity). $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$ a $a > 1$, resp. $\lim n^k q^n = 0$ pro $k \in Z$ a $|q| < 1$.

III.3. Nevlastní limita posloupnosti

Definice. Řekneme, že (zobecněná) posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$ (*plus nekonečno*), jestliže

$$(\forall r \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)\; a_n > r.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $-\infty$ (*minus nekonečno*), jestliže

$$(\forall r \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)\; a_n < r.$$

Je-li $\lim a_n = +\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ *diverguje* k $+\infty$, podobně pro $-\infty$. Je-li $\lim a_n \in \mathbb{R}$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *vlastní* limitu, je-li $\lim a_n = +\infty$ nebo $\lim a_n = -\infty$, říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní* limitu.

Příklady $a_n = n$, $a_n = -n$.

Věta 12' (o jednoznačnosti limity). *Má-li posloupnost $\{a_n\}$ reálných čísel limity $a, b \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, platí $a = b$.*

Definujeme
množinu okolí reálného čísla $a \in \mathbb{R}$: $\mathcal{U}(a) = \{(a - \varepsilon, a + \varepsilon) : \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ a
množinu okolí $+\infty$: $\mathcal{U}(+\infty) = \{(r, +\infty) : r \in \mathbb{R}\}$ a
množinu okolí $-\infty$: $\mathcal{U}(-\infty) = \{(-\infty, r) : r \in \mathbb{R}\}$.

Přeformulace definic limity a důkaz jednoznačnosti.

Pozorování. Jsou-li a, b dva různé prvky $\mathbb{R}^*$, existují $U_a \in \mathcal{U}(a)$ a $U_b \in \mathcal{U}(b)$ taková, že $U_a \cap U_b = \emptyset$.

Nutné podmínky pro existenci limity

Věta 13' (limita vybrané posloupnosti). *Má-li posloupnost $\{a_n\}$ reálných čísel limitu $a \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, pak i každá podposloupnost $\{b_k\}$ posloupnosti $\{a_n\}$ má limitu a.*

Příklad posloupnosti $a_n = n \cdot (-1)^n$.

Nutné podmínky pro existenci limity

Věta 14 pro nevlastní limity neplatí. Platí však

Věta 14' (nevlastní limity, omezenost a neomezenost)**.**

- *Nechť* $\lim a_n = +\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není shora omezená, je však zdola omezená.*
- *Nechť* $\lim a_n = -\infty$. *Pak posloupnost* $\{a_n\}$ *není zdola omezená, je však shora omezená.*

Příklad posloupnosti $a_n = n \cdot (-1)^n$ jinak.

Definice. *Rozšířenou reálnou osou* rozumíme množinu $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ s následujícím rozšířením operací a uspořádání z $\mathbb{R}$:

- $a < +\infty$ a $-\infty < a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $-\infty < +\infty$,
- $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$,
- $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a > 0$,
- $a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, $a < 0$,
- $\frac{a}{\pm\infty} = 0$ pro $a \in \mathbb{R}$.

Limita a nerovnosti

Věta 15' (limita a uspořádání)**.** *Nechť* $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = b \in \mathbb{R}^*$.

(a) Nechť $a < b$. *Potom existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n < b_n$.

(b) Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé přirozené* $n \geq n_0$ *je* $a_n \geq b_n$. *Potom* $a \geq b$.

Pozorování. Je-li $a < b$ pro prvky $\mathbb{R}^*$ a jsou-li $U_a \in \mathcal{U}(a)$, $U_b \in \mathcal{U}(b)$ disjunktní, pak platí

$$(x \in U_a \;\&\; y \in U_b) \Rightarrow x < y.$$

Limita a nerovnosti

Věta 16 (o dvou policajtech) platí i pro $c \in \{-\infty, +\infty\}$. Dokonce platí

Věta 16' (o jednom policajtovi)**.** *Pro (zobecněné) posloupnosti* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ *platí:*

(a) Jestliže $\lim a_n = +\infty$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *platí* $c_n \geq a_n$, *pak* $\lim c_n = +\infty$.

(b) Jestliže $\lim b_n = -\infty$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ *platí* $c_n \leq b_n$, *pak* $\lim c_n = -\infty$.

Některé operace nejsou definovány. Jsou to:

- $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$,
- $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (+\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$,
- $\frac{\pm\infty}{+\infty}$, $\frac{\pm\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{a}{0}$ pro $a \in \mathbb{R}^*$.

Pomocné tvrzení

Lemma 20.

(a) Nechť $\lim a_n = +\infty$ *a* b_n *je zdola omezená. Pak* $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.

(b) Nechť $\lim a_n = +\infty$ *a* $b_n > \varepsilon$ *pro* $n \geq n_0$, *kde* $n_0 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. *Pak* $\lim(a_n \cdot b_n) = +\infty$.

Najděte všechny modifikace se změnami znaménka, resp. nerovnosti, které platí.
KONEC 8. PŘEDNÁŠKY - 24.10.2013.

Věta 18' (limita a aritmetické operace)**.** *Nechť* $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = b \in \mathbb{R}^*$. *Potom platí:*

(a) $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$, *pokud je pravá strana definována,*

(b) $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$, *pokud je pravá strana definována,*

(c) $\lim a_n/b_n = a/b$, *pokud je pravá strana definována.*

Věta 21 („o dělení nulou“)**.** *Nechť* $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$, $a > 0$, $\lim b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *platí* $b_n > 0$. *Pak* $\lim a_n/b_n = +\infty$.

Příklad $\lim_{n\to\infty} n^k$ pro $k \in \mathbb{Z}$ a příklad $\lim \frac{2n^5+n^3-1}{n^k+6}$ pro $k \in \mathbb{Z}$ podruhé.

Limity posloupností, suprema a infima

Definice. Budiž $A \subset \mathbb{R}$ neprázdná. Není-li A shora omezená, pak definujeme $\sup A = +\infty$. Není-li A zdola omezená, pak definujeme $\inf A = -\infty$.

Lemma 22. *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná množina, $s \in \mathbb{R}^*$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(a) $s = \sup M$.

(b) s je horní závorou M a existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů z M, pro kterou $\lim x_n = s$.

Zformulujte a dokažte analogické tvrzení pro infimum.

III.4. Hlubší věty o limitě posloupnosti

Monotónní posloupnosti a limity

Věta 23 (o limitě monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost má limitu. Je-li $\{a_n\}$ neklesající, pak* $\lim a_n = \sup\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. *Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí, pak* $\lim a_n = \inf\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

Bolzano-Weierstrassova věta

Věta 24 (Bolzano-Weierstrass)**.**

(a) Z každé posloupnosti lze vybrat monotónní podposloupnost, která má limitu (v $\mathbb{R}^*$).

(b) Z každé omezené posloupnosti lze vybrat podposloupnost, která má vlastní limitu.

Obvyklé znění Bolzano-Weierstrassovy věty říká speciálně, že z omezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Příklad. $\lim(1 + \frac{1}{n})^n = \lim(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \in (2, 4)$ a $\lim x_n$, kde $x_1 = 0$ a
$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2)$ pro $a \in \langle 0, 1\rangle$.

IV. Reálné funkce jedné reálné proměnné

IV.1. Pojmy zobrazení a reálné funkce jedné reálné proměnné

Nechť A a B jsou množiny. O *zobrazení f množiny A do množiny B* mluvíme, máme-li každému prvku x množiny A přiřazen jediný prvek y z množiny B. Tento prvek y značíme symbolem $f(x)$.

Symbolem $f\colon A \to B$ značíme, že f je zobrazením množiny A do množiny B.

Množinu A z definice zobrazení nazýváme *definičním oborem zobrazení f* a značíme ji symbolem D_f.

Množinu $\{y \in B : (\exists x \in A)\ f(x) = y\}$ nazýváme *množinou hodnot zobrazení f* a značíme ji symbolem H_f.

Množinu $\{[x, y] \in A \times B : y = f(x)\}$ nazýváme *grafem zobrazení f* a značíme ji symbolem G_f.

Příklady zobrazení

Mocnina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované předpisem $f(x) = x^2$, píšeme též $f : x \mapsto x^2$, pro $x \in D_f = \mathbb{R}$, $H_f = \langle 0, \infty)$ či odmocnina $g : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$ definované předpisem $g(x) = \sqrt{x}$ pro $x \in D_g = \langle 0, \infty)$, $H_g = \langle 0, \infty)$.

Aritmetické operace $+ : [x, y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto x + y \in \mathbb{R}$, podobně $\cdot : [x, y] \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy \in \mathbb{R}$ a též $[x, y] \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \mapsto x/y \in \mathbb{R}$.

Limita $L : \{x_n\} \mapsto \lim x_n$ pro $x \in D_L = \{\{x_n\} : \{x_n\}$ je konvergení posloupnost reálných čísel$\}$.
KONEC 9. PŘEDNÁŠKY - 30.10.2013.

Vlastnosti zobrazení $f : A \to B$, obraz a vzor množiny

$f : A \to B$ je *prosté*, pokud $(a, b \in A,\ a \neq b) \Rightarrow f(a) \neq f(b)$. (Ekvivalentně, pokud $(a, b \in A,\ f(a) = f(b)) \Rightarrow a = b$.)
$f : A \to B$ je *na* (je *surjektivní*), pokud $H_f = B$.
$f : A \to B$ je *bijekce*, pokud je prosté a na.

Obrazem množiny $M \subset A$ rozumíme $f(M) := \{y \in B : (\exists x \in M)\ f(x) = y\}$.

Vzorem množiny $N \subset B$ rozumíme $f_{-1}(N) := \{x \in A : f(x) \in N\}$.

Poznámka. Nechť $f\colon A \to B$, $X, Y \subset A$, $U, V \subset B$. Pak platí

- $f_{-1}(U \cup V) = f_{-1}(U) \cup f_{-1}(V)$,
- $f_{-1}(U \cap V) = f_{-1}(U) \cap f_{-1}(V)$,
- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,
- $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

Rovnost v posledním tvrzení neplatí.

Operace se zobrazeními

Restrikcí $f \restriction M : M \to B$ zobrazení $f : A \to B$ na $M \subset A$ rozumíme zobrazení $f \restriction M : M \to B$ definované předpisem $(f \restriction M)(x) = f(x)$ pro $x \in M$.

Pro zobrazení $f : A \to B$ a $g : C \to D$ definujeme *složené zobrazení* $h = g \circ f : D_h \to D$ předpisem $h(x) = g(f(x))$ pro $x \in D_h = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$, tj. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, kdykoliv to je definováno.

Je-li $f : A \to B$ bijekce, definujeme *inverzní zobrazení* $f^{-1} : B \to A$ předpisem $f^{-1}(y) = x$ pro $y \in B$, pokud $f(x) = y$.

Reálné funkce - omezenost a extrémy na množině

Zobrazení $f : A \to \mathbb{R}$ říkáme *reálná funkce*.
Je *omezená shora, resp. omezená zdola, resp. omezená na množině* $M \subset A$, pokud množina $f(M)$ je omezená shora, resp. omezená zdola, resp. omezená.
Nabývá svého maxima, resp. minima, na množině $M \subset A$ *v* $a \in M$, pokud $f(a) = \max f(M)$, resp. $f(a) = \min f(M)$.
O maximech a minimech mluvíme souhrnně jako o *extrémech* reálné funkce.
Říkáme, že jde o *ostrý extrém (ostré maximum, resp. ostré minimum)*,
pokud $f(a) > f(x)$ pro všechna $x \in M$, $x \neq a$, resp.
pokud $f(a) < f(x)$ pro všechna $x \in M$, $x \neq a$.

Reálné funkce jedné reálné proměnné - monotonie

Zobrazení $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ říkáme též *reálná funkce jedné reálné proměnné*.
Funkce $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je
neklesající na množině $M \subset D$, pokud $(x, y \in M,\ x < y) \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, resp.
nerostoucí na množině $M \subset D$, pokud $(x, y \in M,\ x < y) \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, resp.
rostoucí na množině $M \subset D$, pokud $(x, y \in M,\ x < y) \Rightarrow f(x) < f(y)$, resp.
klesající na množině $M \subset D$, pokud $(x, y \in M,\ x < y) \Rightarrow f(x) > f(y)$.
V prvních dvou případech mluvíme o *monotónní funkci*, ve druhých dvou o *ryze monotónní funkci* na M.

Polynomy a racionální funkce

Pro $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, kde $n = 0, 1, \dots$, říkáme funkci $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ *polynom*. Pokud $a_n \neq 0$, má *stupeň* n.

Funkce r je *racionální*, pokud $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, kde p a q jsou polynomy, přičemž q není identicky roven nule, tj. má stupeň. Přesněji r je definována uvedeným předpisem na množině $D_r = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$.

Pod reálnou funkcí f definovanou předpisem $x \mapsto f(x)$ budeme rozumět funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$, kde D_f je množina všech $x \in \mathbb{R}$, pro která definuje předpis jednoznačně reálné číslo. (Např. $D_f = (1, \infty)$, pokud $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.)

IV.2. Spojitost, limita a derivace funkce v bodě

IV.2.1. Definice pojmů

Definice (spojitost funkce v bodě)**.** Reálná funkce reálné proměnné f je *spojitá v bodě* $a \in \mathbb{R}$, pokud

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \delta)\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ekvivalentně

$$(\forall W \in \mathcal{U}(f(a)))(\exists U \in \mathcal{U}(a))\ f(U) \subset W.$$

KONEC 10. PŘEDNÁŠKY - 31.10.2013.

Prstencová okolí a limita funkce v bodě

$P \subset \mathbb{R}$ je *prstencové (redukované) okolí* $a \in \mathbb{R}$, pokud $P = U \setminus \{a\}$ pro nějaké $U \in \mathcal{U}(a)$.
$P \subset \mathbb{R}$ je *prstencové (redukované) okolí* $a \in \{+\infty, -\infty\}$, pokud $P = U$ pro nějaké $U \in \mathcal{U}(a)$.
$\mathcal{P}(a)$ značí množinu všech prstencových okolí $a \in \mathbb{R}^*$.

Definice. Reálná funkce reálné proměnné f *má v bodě* $a \in \mathbb{R}^*$ *limitu* $b \in \mathbb{R}^*$, pokud

$$(\forall U \in \mathcal{U}(b))(\exists P \in \mathcal{P}(a))\ f(P) \subset U.$$

Pro $a, b \in \mathbb{R}$ je to ekvivalentní s

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - a| < \delta)\ |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Poznámky

Má-li $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitu v $a \in \mathbb{R}^*$, musí existovat prstencové okolí $P \in \mathcal{P}(a)$ takové, že $P \subset D$ (nemusí platit $a \in D$).

Pak restrikce $f \restriction Q$ má v a limitu b pro každé prstencové okolí $Q \in \mathcal{P}(a)$, $Q \subset P$.

Je-li $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá v $a \in \mathbb{R}$, musí existovat okolí $U \in \mathcal{U}(a)$, $U \subset D$ (nutně platí $a \in D$).

Věta 25 (jednoznačnost limity funkce)**.** *Nechť* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a* $a \in \mathbb{R}^*$. *Pak* f *má nejvýš jednu limitu* $b \in \mathbb{R}^*$ *v* a.

Značení $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Pozorování. Pro reálnou funkci $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $a, b \in \mathbb{R}$ jsou ekvivalentní výroky: $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a}(f(x) - b) = 0$ a $\lim_{x\to a} |f(x) - b| = 0$.

Pozorování. Reálná funkce $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v $a \in D$, právě když $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Derivace funkce v bodě a tečna ke grafu funkce

Speciální limita se zvláštním významem:

Definice. Nechť $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $a \in D$. Pak *derivací funkce* f *v bodě* a budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pokud příslušná limita existuje v $\mathbb{R}^*$.

Je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$, říkáme, že f má vlastní derivaci v bodě a.

Tečna a spojitost funkce s vlastní derivací v bodě

Definice. Má-li f vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak *tečnou ke grafu funkce* f *v bodě* $[a, f(a)]$ nazveme přímku

$$T_a = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ y = f(a) + f'(a)(x - a)\right\}.$$

Věta 26. *Nechť funkce* f *má v bodě* $a \in \mathbb{R}$ *vlastní derivaci. Potom je funkce* f *v bodě* a *spojitá.*

Příklad funkce $\operatorname{sgn} x$ v nule.

IV.2.2. Limita funkce, nerovnosti a operace s funkcemi

Věta 27 (limita funkce a nerovnosti)**.** *Nechť* $a, p, q \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a} f(x) = p$ *a* $\lim_{x\to a} g(x) = q$.

(a) Pokud $p < q$, *pak existuje* $P \in \mathcal{P}(a)$ *tak, že* $f(x) < g(x)$ *pro všechna* $x \in P$.

(b) Pokud existuje $P \in \mathcal{P}(a)$ *takové, že* $f(x) \leq g(x)$ *pro všechna* $x \in P$, *pak* $p \leq q$.

(c) Pokud $p = q$ *a existuje* $P \in \mathcal{P}(a)$ *takové, že* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ *pro všechna* $x \in P$, *pak* $\lim_{x\to a} h(x) = p$. *(Platí i verze s jedním policajtem pro nevlastní limity.)*

Limita funkce a omezenost na okolí

Věta 28 (limita funkce a omezenost)**.** *(a) Nechť funkce* f *má vlastní limitu v* $a \in \mathbb{R}^*$. *Pak existuje* $P \in \mathcal{P}(a)$ *takové, že* f *je na* P *omezená.*

(b) Nechť funkce f *má limitu* $+\infty$ *v* $a \in \mathbb{R}^*$. *Pak existuje* $P \in \mathcal{P}(a)$ *takové, že* f *je na* P *omezená zdola. Funkce* f *není omezená shora na žádném prstencovém okolí bodu* a.

(c) Nechť funkce f *má limitu* $-\infty$ *v* $a \in \mathbb{R}^*$. *Pak existuje* $P \in \mathcal{P}(a)$ *takové, že* f *je na* P *omezená shora. Funkce* f *není omezená zdola na žádném prstencovém okolí bodu* a.

KONEC 11. PŘEDNÁŠKY - 6.11.2013.

Limita funkce a operace skládání

Věta 29 (limita složené funkce)**.** *Nechť* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a} g(x) = b$, $\lim_{y\to b} f(y) = c$ *a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(P) $(\exists P \in \mathcal{P}(a))(\forall x \in P)\ g(x) \neq b$,

(S) funkce f *je spojitá v bodě* b.

Potom

$$\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = c.$$

Důsledek. *Nechť funkce* g *je spojitá v bodě* $a \in \mathbb{R}$ *a funkce* f *je spojitá v bodě* $g(a)$. *Potom je funkce* $f \circ g$ *spojitá v bodě* a.

Věta 30 (skládání funkce s posloupností)**.** *Nechť* $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$ *a pro funkci* f *platí* $\lim_{x\to a} f(x) = b$. *Jestliže posloupnost* $\{x_n\}$ *splňuje* $x_n \in D_f$, $x_n \neq a$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, *pak platí* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Příklad. Platí $\sin'(0) = 1$. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} n \sin(1/n) = 1$.
Příklad. Ukažte, že $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje.

Limita funkce a aritmetické operace

Lemma 31. *Nechť* f, g *jsou reálné funkce jedné reálné proměnné.*

(a) Existuje-li $P \in \mathcal{P}(a)$ *takové, že* f *je zdola omezená na* P *a je-li* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, *je* $\lim(f(x) + g(x)) = +\infty$.

(b) Existuje-li $P \in \mathcal{P}(a)$ *takové, že* $f(P)$ *má kladnou dolní závoru a je-li* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, *je* $\lim(f(x)g(x)) = +\infty$.

(c) Existuje-li $P \in \mathcal{P}(a)$ *takové, že* $f(P)$ *je omezená a je-li* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, *je* $\lim(f(x)g(x)) = 0$.

Věta 32 (limita funkce a aritmetické operace)**.** *Nechť* $a, p, q \in \mathbb{R}^*$. *Nechť* $\lim_{x\to a} f(x) = p$ *a* $\lim_{x\to a} g(x) = q$. *Potom platí:*

(a) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = p + q$, *pokud je výraz* $p + q$ *definován,*

(b) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = pq$, *pokud je výraz* pq *definován,*

(c) $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = p/q$, *pokud je výraz* p/q *definován.*

Důsledek. *Nechť funkce* f *a* g *jsou spojité v bodě* $a \in \mathbb{R}$. *Pak také funkce* $f + g$ *a* fg *jsou spojité v bodě* a. *Pokud navíc* $g(a) \neq 0$, *pak také funkce* f/g *je spojitá v bodě* a.

KONEC 12. PŘEDNÁŠKY - 7.11.2013.

O dělení funkcí s nulovou limitou

Věta 33. *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \mathbb{R}^*$ a $b > 0$. Jestliže existuje $P \in \mathcal{P}(a)$ takové, že funkce g je kladná na P, pak $\lim_{x\to a}\big(f(x)/g(x)\big) = +\infty$.*

IV.2.3. Jednostranné limity, spojitost a derivace funkce v bodě

Definice (jednostranná okolí bodu)**.**

- Pro $a < +\infty$, $a \in \mathbb{R}^*$ definujeme $\mathcal{U}^+(a) = \{U^+ : (\exists U \in \mathcal{U}(a))U^+ = U \cap \langle a, +\infty)\}$, množinu *pravých okolí bodu a* a $\mathcal{P}^+(a) = \{P^+ : (\exists U \in \mathcal{U}(a))P^+ = U \cap (a, +\infty)\}$, množinu *pravých prstencových okolí bodu a*.

- Pro $a > -\infty$, $a \in \mathbb{R}^*$ definujeme $\mathcal{U}^-(a) = \{U^- : (\exists U \in \mathcal{U}(a))U^- = U \cap (-\infty, a\rangle\}$, množinu *levých okolí bodu a* a $\mathcal{P}^-(a) = \{P^- : (\exists U \in \mathcal{U}(a))P^- = U \cap (-\infty, a)\}$, množinu *levých prstencových okolí bodu a*.

Definice. Nechť $b \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Řekneme, že funkce f má v bodě a *limitu zprava* rovnou b (značíme $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = b$), jestliže

$$(\forall U \in \mathcal{U}(b))(\exists P \in \mathcal{P}^+(a))f(P) \subset U.$$

Analogicky definujeme pojem *limity zleva* v bodě $a \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Pro limitu zleva funkce f v bodě a užíváme symbol $\lim\limits_{x\to a_-} f(x)$.

Tvrzení 34. *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$. Pak platí*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to a_+} f(x) = b \;\;\&\;\; \lim_{x\to a_-} f(x) = b\right).$$

Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě a *spojitá zprava* (resp. *zleva*), jestliže $\lim_{x\to a_+} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim_{x\to a_-} f(x) = f(a)$).

Funkce f je spojitá v $a \in \mathbb{R}$, pokud je v bodě a spojitá zleva i zprava. Příklady $f(x) = [x]$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Definice. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $f'_+(a)$ (resp. $f'_-(a)$) je *derivace zprava* (resp. *zleva*) funkce f v bodě a , jestliže $f'_+(a) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
(resp. $f'_-(a) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$).

Příklad $f(x) = |x|$.

Jednostranné limity a operace

Pro jednostranné limity funkcí platí obdobné věty jako pro limity funkcí se zřejmými modifikacemi v důkazech. Pro větu o limitě složené funkce je třeba být opatrnější. Uveďme jednu variantu, zvažte další sami.

Věta 35 (jednostranné limity složené funkce)**.** *Nechť $\lim_{x\to a_+} g(x) = b$.*

Pokud je f spojitá v b zleva a existuje $P \in \mathcal{P}^+(a)$ tak, že $g(x) \le b$ pro všechna $x \in P$, platí rovnost $f(b) = \lim_{x\to a_+}(f \circ g)(x)$.

Pokud $\lim_{x\to b_-} f(y)$ existuje a existuje $P \in \mathcal{P}^+(a)$ tak, že $g(x) < b$ pro všechna $x \in P$, platí rovnost $\lim_{y\to b_-} f(y) = \lim_{x\to a_+}(f \circ g)(x)$.

Věta 36 (limita monotónní funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Budiž funkce f monotónní na intervalu (a, b). Potom existují $\lim_{x\to a_+} f(x)$ a $\lim_{x\to b_-} f(x)$, přičemž platí:*

- *Je-li f na (a, b) neklesající, pak $\lim_{x\to a_+} f(x) = \inf f\big((a, b)\big)$ a $\lim_{x\to b_-} f(x) = \sup f\big((a, b)\big)$.*

- *Je-li f na (a, b) nerostoucí, pak $\lim_{x\to a_+} f(x) = \sup f\big((a, b)\big)$ a $\lim_{x\to b_-} f(x) = \inf f\big((a, b)\big)$.*

IV.3. Funkce na intervalu

IV.3.1. Pojem spojitosti na intervalu.

Definice. Nechť I $\subset \mathbb{R}$ je interval s krajními body $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Funkce $f\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ je *spojitá na intervalu I*, jestliže platí:

- f je spojitá v každém vnitřním bodě I, tj. v bodech (a, b);
- f je spojitá zprava v levém krajním bodě a intervalu I, pokud tento bod patří do I;
- f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu I, pokud tento bod patří do I.

Formulace pomocí limit.

Věta 37 (spojitost složené funkce na intervalu)**.** *Nechť I a J jsou intervaly, $g\colon I \to J$, $f\colon J \to \mathbb{R}$, g je spojitá na I a f je spojitá na J. Potom funkce $f \circ g$ je spojitá na I.*

Věta 38 (spojitost na intervalu a posloupnosti)**.** *Nechť funkce f je spojitá na intervalu I a $a \in I$. Potom pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů intervalu I splňující $\lim x_n = a$ platí $\lim f(x_n) = f(a)$.*

KONEC 13. PŘEDNÁŠKY - 13.11.2013.

Spojitost a derivace

Víme, že existence vlastní derivace (vlastní derivace zprava, resp. vlastní derivace zleva) reálné funkce f v bodě x impikuje spojitost (zprava, resp. zleva) funkce f v bodě x.

Pokud existuje $f'(x)$ vlastní pro $x \in (a, b)$, je $f'\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ reálná funkce na (a, b) a f je spojitá na (a, b).

Totéž lze říci na intervalu I, pokud víme navíc, že

(a) f má v levém krajním bodě intervalu I vlastní derivaci zprava, pokud tento je prvkem I a

(b) f má v pravém krajním bodě intervalu I vlastní derivaci zleva, pokud tento je prvkem I.

IV.3.2. Funkce logaritmus a goniometrické funkce.

Věta 39 (zavedení logaritmu)**.** *Existuje jediná funkce (značíme ji* $\log$ *a nazýváme ji přirozeným logaritmem), která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D_{\log} = (0, +\infty)$,

(L2) funkce $\log$ *je na* $(0, +\infty)$ *rostoucí,*

(L3) $\forall x, y \in (0, +\infty)\colon \log xy = \log x + \log y$,

(L4) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$.

Vlastnosti funkce logaritmus

- $\log 1 = 0$ a $\log' 1 = 1$,
- $\forall x \in (0, +\infty)\colon \log(1/x) = -\log x$,
- $\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in (0, +\infty)\colon \log x^n = n \log x$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \log x = -\infty$,
- $\log' x = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$,
- funkce $\log$ je spojitá na $(0, +\infty)$.

Goniometrické funkce sinus a cosinus

Věta 40 (zavedení funkce sinus a čísla π)**.** *Existuje jediné kladné reálné číslo (budeme ho značit π) a jediná funkce sinus (budeme ji značit* $\sin$*) tak, že:*

(S1) $D_{\sin} = \mathbb{R}$,

(S2) $\sin$ *je rostoucí na* $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$,

(S3) $\sin 0 = 0$,

(S4) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon \sin(x + y) = \sin x \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - y) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \sin y$,

(S5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Definice. Funkcí *kosinus* rozumíme funkci $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Periodické, liché a sudé funkce

Definice. (a) Funkce $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *periodická s periodou* $p > 0$ *(p-periodická)*, pokud pro $x \in D$ je $f(x-p) = f(x) = f(x+p)$.

(b) Funkce $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *lichá*, pokud pro $x \in D$ je $f(-x) = -f(x)$.

(c) Funkce $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *sudá*, pokud pro $x \in D$ je $f(-x) = f(x)$.

Vlastnosti funkcí sinus a kosinus

(a) Funkce cos je klesající na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

KONEC 14. PŘEDNÁŠKY - 14.11.2013.

(b) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = \cos 0 = 1$, $\sin \pi = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin \frac{-\pi}{2} = \cos \pi = -1$.

(c) Funkce cos je sudá, funkce sin je lichá.

(d) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin(x+\pi) = -\sin x$.

(e) Funkce sin a cos jsou 2π-periodické.

(f) Funkce sin je rovna nule právě v bodech množiny $\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, funkce cos je rovna nule právě v bodech množiny $\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

(g) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(h) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$

(i) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ \sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

(j) Funkce sin a cos jsou spojité na $\mathbb{R}$.

(k) $\sin' x = \cos x$ a $\cos' x = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,

IV.3.3. Spojité funkce na intervalu - obraz intervalu a inverzní funkce

Věta 41 (Bolzanova věta o nabývání mezihodnot)**.** *Budiž funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ a předpokládejme, že $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $x \in (a, b)$ takové, že platí $f(x) = y$, tj. $(f(a), f(b)) \subset f((a, b))$.*

Lemma 42. *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ obsahuje alespoň dva prvky a nechť dále pro každá $y, z \in J$, pro která $y < z$, platí $\langle y, z \rangle \subset J$. Pak J je interval.*

Pozorování. Jsou-li I, I' intervaly, $\mathrm{I}' \subset \mathrm{I}$ a $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ je spojitá, je i $f \restriction \mathrm{I}' : \mathrm{I}' \to \mathbb{R}$ spojitá.

Věta 43 (zobrazení intervalu spojitou funkcí)**.** *Nechť I je interval a funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá na I. Potom je $f(I)$ interval nebo jednoprvková množina.*

Věta 44 (spojitost inverzní funkce)**.** *Budiž f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu I. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(I)$.*

KONEC 15. PŘEDNÁŠKY - 20.11.2013.

Věta 45 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotónní a má v bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí rovnost*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

IV.3.4. Přirozené odmocniny, exponenciální funkce, cyklometrické funkce

Víme, co je x^n pro $n \in \mathbb{N}$. Definujeme též $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ pro $x \neq 0$ a $x^0 = 1$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Pro kladná $x \in \mathbb{R}$ můžeme definovat x^r pro $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, jako $x^r = \sqrt[q]{x^p}$, protože to nezávisí na volbě p, q.

Příklad. $\sqrt[3]{-1} = -1$, ale $\sqrt[6]{(-1)^2} = 1$.

Uvažujme funkci $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $f_n(x) = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak platí:

Věta 46 (celé mocniny a odmocniny)**.** *(a) f_n je sudá, pokud n je sudé, a lichá, pokud je liché.*

(b) f_n je rostoucí, pokud n je liché a f_n je rostoucí na $\langle 0, +\infty)$, pokud n je sudé.

(c) $(f_n)'(x) = nx^{n-1}$, píšeme též $(x^n)' = nx^{n-1}$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$.

(d) f_n je spojitá pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $H_{f_n} = \mathbb{R}$ pro n liché a $H_{f_n} = \langle 0, +\infty)$ pro n sudé.

(e) Funkce f_n pro n liché ($n > 1$) má spojitou rostoucí inverzní funkci $(f_n)^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ s $D_{f_n^{-1}} = \mathbb{R}$, $H_{f_n^{-1}} = \mathbb{R}$ a derivací $(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{n}|y|^{\frac{1}{n}-1}$ pro $y \neq 0$.

(f) Funkce $f_n \restriction \langle 0, +\infty)$ pro n sudé má spojitou rostoucí inverzní funkci $(f_n)^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ s $D_{f_n^{-1}} = \langle 0, +\infty)$, $H_{f_n^{-1}} = \langle 0, +\infty)$ a derivací $(\sqrt[n]{y})' = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$ pro $y > 0$.

Poznámka. Dokázali jsme existenci $\sqrt[k]{x} \geq 0$ pro přirozená k a nezáporná $x \in \mathbb{R}$. Toto tvrzení bylo dokázáno též ve Větě 5.

Věta 47 (přirozený logaritmus a exponenciála)**.**

(a) $H_{\log} = \mathbb{R}$ a funkce $exp = \log^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá rostoucí a $H_{\log^{-1}} = (0, +\infty)$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$,

(c) $\exp'(y) = \exp(y)$ pro $y \in \mathbb{R}$.

(d) $\exp 0 = 1$,

(e) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$,

(f) $(\forall y \in \mathbb{R})\ \exp(-y) = 1/\exp y$,

(g) $(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{R})\ \exp(ny) = (\exp y)^n$,

(h) $\forall r \in \mathbb{Q}\colon\ \exp r = e^r$, kde $e = \exp(1)$.

Číslo e je jediné řešení rovnice $\log x = 1$. Píšeme též e^x místo $\exp(x)$.

Spec. $\lim_{x\to0} \frac{\exp(x)-1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = e^0 = 1$.

Příklady $\lim_{x\to0_+} \frac{\exp(\sqrt{x}-1)}{x}$, $\lim_{x\to1} \frac{\exp(\sqrt{x}-1)-1}{x-1}$.

Definice. Funkci inverzní k restrikci funkce sinus na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ značíme $\arcsin$ (*arkussinus*), funkci inverzní k restrikci funkce kosinus na interval $\langle 0, \pi \rangle$ značíme $\arccos$ (*arkuskosinus*).

Věta 48 (cyklometrické funkce $arcsin$ a $arccos$)**.**

(a) $D_{\arcsin} = \langle -1, 1 \rangle$, funkce $\arcsin$ je rostoucí spojitá a $H_{\arcsin} = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

(b) $D_{\arccos} = \langle -1, 1 \rangle$, funkce $\arccos$ je klesající spojitá a $H_{\arccos} = \langle 0, \pi \rangle$.

(c) Funkce $\arcsin$ je lichá.

(d) $\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ pro $y \in (-1, 1)$.

KONEC 16. PŘEDNÁŠKY - 21.11.2013.

(e) $\arccos' y = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$ pro $y \in (-1, 1)$.

(f) $\forall y \in \langle -1, 1 \rangle\colon\ \arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2}$

IV.3.5. Derivace a aritmetické operace s funkcemi

Věta 49 (derivace a aritmetické operace)**.** *Předpokládejme, že funkce f a g mají v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace a $r \in \mathbb{R}$. Potom platí*

(a) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;

(b) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, *spec.* $(rf)'(a) = r \cdot f'(a)$;

(c) je-li $g(a) \neq 0$, *pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

IV.3.6. Funkce tangens, kotangens, arkustangens a arkuskotangens

Definice. Funkci *tangens* značíme tg a definujeme předpisem $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pro každé reálné x, pro něž má zlomek smysl, tj. $D_{\operatorname{tg}} = \{x \in \mathbb{R} : (\forall k \in \mathbb{Z})\ x \neq \pi/2 + k\pi\}$.

Symbolem cotg budeme značit funkci *kotangens*, která je definována na množině $D_{\operatorname{cotg}} = \{x \in \mathbb{R} : (\forall k \in \mathbb{Z})\ x \neq k\pi\}$ předpisem $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Tvrzení 50 (vl. funkcí tangens a kotangens)**.**

(a) Funkce tg *i* cotg *jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.*

(b) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ *pro* $x \in D_{\operatorname{tg}}$.

(c) $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ *pro* $x \in D_{\operatorname{cotg}}$.

(d) Funkce tg *i* cotg *jsou liché.*

(e) Funkce tg *i* cotg *jsou* π*-periodické.*

(f) Funkce tg *je rostoucí na* $(-\pi/2, \pi/2)$, *funkce* cotg *je klesající na* $(0, \pi)$.

(g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty$.

(h) $H_{\operatorname{tg}} = H_{\operatorname{cotg}} = \mathbb{R}$.

Definice.

- Funkcí *arkustangens* (značíme arctg) rozumíme funkci inverzní k funkci $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$.
- Funkcí *arkuskotangens* (značíme $\operatorname{arccotg}$) rozumíme funkci inverzní k funkci $\operatorname{cotg}|_{(0,\pi)}$.

Tvrzení 51 (vl. funkcí arkustangens a arkuskotangens)**.**

(a) arctg *je rostoucí spojitá,* $D_{\operatorname{arctg}} = \mathbb{R}$, $H_{\operatorname{arctg}} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(b) $\operatorname{arccotg}$ *je klesající spojitá,* $D_{\operatorname{arccotg}} = \mathbb{R}$, $H_{\operatorname{arccotg}} = (0, \pi)$.

(c) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ *pro* $x \in \mathbb{R}$.

(d) $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ *pro* $x \in \mathbb{R}$.

(e) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$.

Důležité limity: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cotg} x}{x-\frac{\pi}{2}} = -1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arccotg} x}{x} = -1$.

IV.3.7. Derivace složené funkce

Věta 52 (derivace složené funkce)**.** *Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě $b \in \mathbb{R}$, funkce g má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$ a $b = g(a)$. Pak*

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a).$$

KONEC 17. PŘEDNÁŠKY - 27.11.2013.

IV.3.8. Obecná mocnina a logaritmus, funkce $x \mapsto x^a$ a $x \mapsto a^x$

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Obecnou mocninu* a^b definujeme jako $a^b = \exp(b \log a)$.
Nechť $a, b \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. *Obecný logaritmus* $\log_a b$ definujeme jako $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$.

Poznámka (korektnost). a^b souhlasí s dřívější definicí pro $b \in \mathbb{Z}$ a $a > 0$.
Poznámka. Funkce $\sqrt[3]{x}$ je definována na $\mathbb{R}$, funkce $x^{\frac{1}{3}}$ na $(0, +\infty)$. Ukážeme, že se na $(0, +\infty)$ rovnají:

Vlastnosti obecné mocniny, logaritmu a funkcí $x \mapsto a^x$, $x \mapsto x^a$, $x \mapsto \log_a x$

Tvrzení 53. *Pro $a > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$ platí:*

(a) $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$,

(b) $\log a^x = x \log a$,

(c) $a^{x+y} = a^x a^y$,

(d) $a^{xy} = (a^x)^y$*; v následujícím jde o derivace dle "x":*

(e) $(x^a)' = a x^{a-1}$ *pro* $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,

(f) $(a^x)' = a^x \log a$ *pro* $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,

(g) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$ *pro* $x, a > 0$, $a \neq 1$.

Příklady $\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)}$ a $\lim_{x \to a} \exp(h(x))$; $(1 + \frac{x}{n})^n$.

Přehled derivací elementárních funkcí

- $(\text{konst.})' = 0$,
- $(x^n)' = n x^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$,
- $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} |x|^{\frac{1}{n} - 1}$ pro $x \neq 0$ z definičního oboru.
- $(\log x)' = \frac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$,
- $(\exp x)' = \exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^a)' = a x^{a-1}$ pro $x \in (0, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$,
- $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$,
- $(\sin x)' = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{tg}}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ pro $x \in D_{\operatorname{cotg}}$,
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(\arccos x)'$ pro $x \in (-1, 1)$,
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = -(\operatorname{arccotg} x)'$ pro $x \in \mathbb{R}$.

IV.4. Průběh funkce a derivace

IV.4.1. Lokální extrémy a nutná podmínka

Připomenutí pojmů maximum či ostré maximum reálné funkce na množině. Podobně pro minimum. Pojmy extrémy a ostré extrémy.

Věta 54 (nutná podmínka pro extrém)**.** *Pokud $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ má v $x \in (a, b)$ extrém (maximum nebo minimum) a pokud existuje $f'(x)$, pak platí, že $f'(x) = 0$.*

Problém*. $x - \sin x$ v nule nemá extrém, ale má nulovou derivaci. $|x|$ v nule má extrém, ale má nenulové jednostranné derivace.
Cvičení*. Může mít funkce f v nule extrém, pokud má kladnou (zápornou) derivaci v nule?

Definice. Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$

- *lokální maximum*, jestliže existuje $P \in \mathcal{P}(a)$ takové, že $(\forall x \in P) f(x) \leq f(a)$,
- *lokální minimum*, jestliže existuje $P \in \mathcal{P}(a)$ takové, že $(\forall x \in P) f(x) \geq f(a)$,
- *ostré lokální maximum*, jestliže existuje $P \in \mathcal{P}(a)$ takové, že $(\forall x \in P) f(x) < f(a)$,
- *ostré lokální minimum*, jestliže existuje $P \in \mathcal{P}(a)$ takové, že $(\forall x \in P) f(x) > f(a)$.

Bodem *lokálního extrému* rozumíme bod lokálního maxima či lokálního minima. Podobně pro *ostrý lokální extrém*.

Poznámka. Má-li funkce lokální extrém v a, je definovaná na okolí a.
V definicích neostrých lokálních extrémů lze nahradit $P \in \mathcal{P}(a)$ existencí okolí $U \in \mathcal{U}(a)$.

Důsledek 55. *(a) Má-li reálná funkce extrém ve vnitřním bodě intervalu, jde o odpovídající lokální extrém.*

(b) Pokud reálná funkce f má v a lokální extrém a pokud existuje $f'(a)$, pak platí, že $f'(a) = 0$.

IV.4.2. Nabývání extrémů pro spojitou funkci

Věta 56 (o nabývání extrémů)**.** *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce f nabývá na $\langle a, b\rangle$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).*

KONEC 18. PŘEDNÁŠKY - 28.11.2013.

Důsledek 57 (omezenost spojité funkce)**.** *Budiž f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom je f na $\langle a, b\rangle$ omezená.*

Vyšetřování extrémů a oboru hodnot spojité funkce na intervalu (řešitelnost rovnice $f(x) = y$).
Příklad. Vyšetřete extrémy a obor hodnot funkce $f(x) = x(1 - x)$ na $\langle 0, 1\rangle$.

IV.4.3. Věta o střední hodnotě

Lemma 58 (Rolleova věta)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a*

(a) f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,

(b) $f'(x) \in \mathbb{R}^*$ pro všechna $x \in (a, b)$,

(c) $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ splňující $f'(c) = 0$.

Věta 59 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má derivaci (vlastní či nevlastní) v každém bodě intervalu (a, b). Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že platí*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

IV.4.4. Monotonie funkce a její derivace

Cvičení. Pokud má neklesající funkce $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ derivaci (derivaci zprava či derivaci zleva) v nějakém bodě $a \in \mathrm{I}$, pak $f'(a) \geq 0$.
Příklad rostoucí funkce x^3 ($f'(0) \geq 0$, ale ne větší než nula).
Značení. I^0 je množina vnitřních bodů intervalu I.

Věta 60 (vztah znaménka derivace a monotonie funkce)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, f je spojitá na I a v každém vnitřním bodě I má derivaci.*

(a) Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in I^0$, pak f je rostoucí na I.

(b) Je-li $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in I^0$, pak f je klesající na I.

(c) Je-li $f'(x) \geq 0$ pro všechna $x \in I^0$, pak f je neklesající na I.

(d) Je-li $f'(x) \leq 0$ pro všechna $x \in I^0$, pak f je nerostoucí na I.

Důsledek 61. *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, f je spojitá na I a v každém vnitřním bodě I má nulovou derivaci. Pak f je konstantní.*

Poznámka. Funkce $\log$ je určena jednoznačně vlastnostmi (L1), (L3) a (L4) z věty 39

IV.4.5. Jednostranné derivace a limity podílu pomocí limit derivací

Věta 62 (výpočet jednostranné derivace)**.** *Nechť f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim\limits_{x \to a+} f'(x)$. Potom existuje $f'_+(a)$ a platí rovnost*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

Analogicky pro derivaci zleva.

KONEC 19. PŘEDNÁŠKY - 4.12.2013.
Příklad. Spočtěte derivace (ev. jednostranné derivace) funkce $f(x) = \arcsin(\frac{2x}{x^2+1})$.

Věta 63 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť funkce f a g mají na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ vlastní derivace a existuje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Nechť platí jedna z následujících podmínek:*

(a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$*,*

(b) $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = +\infty$.

Potom existuje i $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analogicky pro jednostranné derivace.

Vyšší derivace a opakované použití L'Hospitalova pravidla

Definice. Nechť funkce f má na jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci. *Druhou derivací* funkce f v bodě a budeme rozumět $(f')'(a)$, tj. $f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$, pokud limita existuje.

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a funkce f má v jistém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ vlastní n-tou derivaci (značíme ji symbolem $f^{(n)}$). Pak $(n+1)$*-ní derivací* funkce f v bodě a budeme rozumět $f^{(n+1)}(a) = (f^{(n)})'(a)$, pokud existuje.

Důležité limity.
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$ pro $a, b > 0$ z $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n}$ pro $n \in \mathbb{N}$.
Z toho $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log x)^b}{x^a} = 0$ pro $a, b > 0$ složením s $x = \exp(y)$,
$\lim_{x \to 0_+} x^a |log x|^b = 0$ pro $a, b > 0$ složením s $x = \frac{1}{y}$.
Příklad. $\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{arccotg} x = 1$.
Příklad. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$.
KONEC 20. PŘEDNÁŠKY - 5.12.2013.

IV.4.6. Konvexita funkce na intervalu a její derivace

Definice. Řekneme, že funkce f je na intervalu I

- *konvexní*, jestliže pro každá $x_1 < x_2$ z I a $\lambda \in (0,1)$ platí $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$,
- *konkávní*, jestliže pro každá $x_1 < x_2$ z I a $\lambda \in (0,1)$ platí $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$,
- *ryze konvexní*, jestliže pro každá $x_1 < x_2$ z I a $\lambda \in (0,1)$ platí $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$,
- *ryze konkávní*, jestliže pro každá $x_1 < x_2$ z I a $\lambda \in (0,1)$ platí $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.

Poznámka. V prvních dvou případech lze ekvivalentně uvažovat všechna $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$.

Lemma 64 (konvexita a směrnice sečen)**.** *Pro funkci f na intervalu I jsou ekvivalentní výroky:*

(a) Funkce f je konvexní.

(b) Pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_3 < x_2$, platí

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}.$$

(c) Pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_3 < x_2$, platí

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

(d) Pro každé tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_3 < x_2$, platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}.$$

Analogicky pro konkávnost, ryzí konvexitu a ryzí konkávnost.

Věta 65 (konvexita a první derivace)**.** *Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervalu I a existuje $f'(x)$ pro všechna $x \in I^0$. Pak f je na I konvexní, právě když f' je na I^0 neklesající.*

Analogicky pro konkávní (nerostoucí), ryze konvexní (rostoucí) a ryze konkávní (klesající).

Důsledek 66 (druhá derivace a konvexita)**.** *Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá v krajních bodech intervalu I a f'' je vlastní na I^0. Pak platí:*

(a) Funkce f je konvexní (konkávní) na I, právě když $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) pro každé $x \in I^0$.

(b) Funkce f je ryze konvexní (ryze konkávní) na I, pokud $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) pro každé $x \in I^0$.

Příklad funkce x^4 (je ryze konvexní, ale $f''(0) = 0$).
KONEC 21. PŘEDNÁŠKY - 11.12.2013.

Lemma 67 (konvexita a konečné konvexní kombinace)**.** *Funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je na intervalu I konvexní, právě když pro každá $\lambda_k \in \langle 0, 1)$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, $x_k \in I$ pro $k = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost*

$$f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

("konvexní kombinace"čísel x_k, resp. $f(x_k)$).

Analogicky pro konkávnost, ryzí konvexitu a ryzí konkávnost.

Příklad. Funkce $\log$ je ryze konkávní a $\exp$ je ryze konvexní. Důkaz AG nerovnosti.

Poloha grafu a tečny

Definice. Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$ a T_a označuje tečnu ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$. Řekneme, že bod $[x, f(x)]$ *leží pod tečnou* T_a, jestliže

$$f(x) < f(a) + f'(a) \cdot (x - a).$$

Platí-li opačná nerovnost, řekneme, že bod $[x, f(x)]$ *leží nad tečnou* T_a.

Inflexní bod

Definice. Nechť $f'(a) \in \mathbb{R}$. Řekneme, že a je *inflexním bodem* funkce f, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ takové, že platí

(a) $(\forall x \in (a - \varepsilon, a))$ $[x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a,

(b) $(\forall x \in (a, a + \varepsilon))$ $[x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

nebo

(a) $(\forall x \in (a - \varepsilon, a))$ $[x, f(x)]$ leží nad tečnou T_a,

(b) $(\forall x \in (a, a + \varepsilon))$ $[x, f(x)]$ leží pod tečnou T_a.

Inflexní bod a derivace

Lemma 68 (první derivace a poloha grafu a tečny)**.** *Existuje=li $\varepsilon > 0$ takové, že $-\infty < f'(a) < f'(x) < +\infty$ pro všechna $x \in (a, a + \varepsilon)$, pak $[x, f(x)]$ leží nad T_a pro všechna $x \in (a, a + \varepsilon)$. (Analogicky s opačnými nerovnostmi či pro interval $(a - \varepsilon, a)$.)*

Věta 69 (inflexe a druhá derivace)**.**

(a) Je-li f' spojitá na $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $f'' > 0$ na $(a, a + \varepsilon)$ a $f'' < 0$ na $(a - \varepsilon, a)$ pro nějaké $\varepsilon > 0$, pak má f v bodě a inflexní bod. (Analogicky pro opačné nerovnosti.)

(b) Má-li f v bodě a inflexní bod a existuje-li $f''(a)$, pak je $f''(a) = 0$.

IV.4.7. Asymptoty a přehled vyšetřovaných vlastností o průběhu funkce

Definice. Přímku, která je grafem funkce $x \mapsto sx + t$, $s, t \in \mathbb{R}$, nazveme *asymptotou funkce* f v $+\infty$ (v $-\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - sx - t) = 0, \quad (\lim_{x\to-\infty}(f(x) - sx - t) = 0).$$

Tvrzení 70. *Funkce f má asymptotu v $+\infty$ popsanou afinní funkcí $x \mapsto sx + t$, právě tehdy, když*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = s \in \mathbb{R} \quad a \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - sx) = t \in \mathbb{R}.$$

Dodatek k přehledu derivací elementárních funkcí.
Pro $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ a $x \neq 0$ z definičního oboru v (a) a (b) derivovaných funkcí platí:

(a) $(\sqrt[q]{x^p})' = \frac{p}{q}\sqrt[q]{x^p} \cdot x^{-1}$;

(b) $((\sqrt[q]{x})^p)' = \frac{p}{q}(\sqrt[q]{x})^p \cdot x^{-1} = \frac{p}{q}(\sqrt[q]{x})^{p-q}$.

Vyšetření průběhu funkce

- Definiční obor, případně lichost, sudost, periodičnost.
- Limity v krajních bodech maximálních intervalů definičního oboru.
- Spojitost (alespoň tam, kde to neplyne z vlastní derivace).
- První derivace, intervaly monotonie, lokální a globální extrémy. Obor hodnot.
- Jednostranné derivace.
- Asymptoty funkce.
- Druhá derivace a intervaly, kde je funkce f (ryze) konvexní nebo (ryze) konkávní. Určíme inflexní body.
- Načrtneme graf funkce.

KONEC 22. PŘEDNÁŠKY - 12.12.2013.