Na úvod

Tento text vzniká průběžně tak, jak pokračuje přednáška Stochastická analýza. Pro jeho psaní jsem se rozhodl z několika důvodů:

- Posluchači dostanou do rukou alespoň soupis odpřednášených definic a vět, v rámci možností budu přidávat důkazy a komentáře.
- Kolegové získají představu, co bylo odpředneseno.
- Získám záznam o přednášce a jejím vývoji, což mi snad umožní ji pomalu a postupně vylepšovat, donutím se pořádně projít alespoň některé důkazy.
- Získám základ pro případná skripta.

Tím jak přednášku z roku na rok měním a některé části přidávám a jiné naopak ubírám, dochází k tomu, že ne všechna tvrzení zde uvedená opravdu na přednášce zazní (*ovšem doufám, že ta která vyslovím se zde objeví všechna*). Proto se pokusím v daném roce opravdu vyslovené definice a tvrzení označovat barevně. Výjimkou budiž tvrzení, o nichž v textu prohlašuji, že jsou součástí jiných základních kursů. U důkazů, poznámek a podobných částí textu to považuji za nadbytečné, toto nemá býti náhražkou přednášky.

Velmi uvítám jakékoliv kritické i pochvalné komentáře k textu na adrese `hlubinka@karlin.mff.cuni.cz`. Za zvláště cenné komentáře se rád odvděčím pivem či vínem v některém karlínském hostinci.

1. Procesy se spojitým časem

1.1. **Spojité procesy.**

1.1. **Značení.** V textu budeme označovat pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Dále značíme měřitelný prostor $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ a náhodnou veličinu s hodnotami v $\mathbb{E}$ značíme X. X je tedy měřitelné zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{E}, \mathcal{E})$. Rozdělení náhodné veličiny X (obraz míry P ve zobrazení X) značíme P_X. Je tedy $P_X(A) = \mathsf{P}(X^{-1}A)$ pro každou $A \in \mathcal{E}$.

1.2. **Definice.** Buď Λ neprázdná indexová množina. Soubor náhodných veličin

$$X = \{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}, \quad X_\lambda : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{E}, \mathcal{E})$$

nazveme stochastickým (náhodným) procesem s hodnotami v $\mathbb{E}$ na indexové množině Λ.

1.3. *Poznámka.* V textu budeme pracovat v podstatě pouze s dvěma případy. Je-li $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, hovoříme o (jednorozměrném) reálném náhodném procesu. V případě $\mathbb{E} = \mathbb{R}^d$ hovoříme o d-rozměrném reálném procesu. V obou případech je σ-algebrou $\mathcal{E}$ příslušná borelovská σ-algebra $\mathcal{B}$, případně $\mathcal{B}^n$. Pro mnoho tvrzení stačí, je-li prostor $\mathbb{E}$ úplný metrický separabilní, my si ale vystačíme s reálnými čísly; *od nyní je tedy $\mathbb{E}$ reálný prostor*.

Omezíme se na případ, kdy indexová množina Λ je buď intervalem $[0, T]$, případně polopřímkou $\mathbb{R}^+$. Mluvíme o procesu se spojitým časem, index λ je chápán jako čas. Díky lineárnímu uspořádání množiny Λ a nejmenšímu prvku $\lambda = 0$ mluvit o počátku a také o minulosti, současnosti a budoucnosti procesu.

Jiné možnosti jsou $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, neboli proces s dikrétním časem, případně $\Lambda = \mathbb{R}^2$ (náhodné pole) a další složitější struktury. Tyto možnosti dále neuvažujeme.

1.4. **Značení.** Označme standardně $\mathbb{E}^n$ kartézský součin a $\mathcal{B}^n$ součinovou borelovskou σ-algebru na něm, tj.

$$\mathbb{E}^n = \{(e_1, \ldots, e_n); e_i \in \mathbb{E}, i = 1, \ldots, n\},$$
$$\mathcal{B}^n = \sigma\{B_1 \times \cdots \times B_n; B_i \in \mathcal{B}, i = 1, \ldots, n\}.$$

1.5. **Lemma.** *Buď X stochastický proces s hodnotami v $\mathbb{E}$ indexovaný Λ. Nechť $t_1, \ldots, t_n \in \Lambda$. Pak $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ je náhodná veličina s hodnotami v $(\mathbb{E}^n, \mathcal{B}^n)$.*

Důkaz. Jde o důkaz měřitelnosti souboru měřitelných náhodných veličin vůči součinové σ-algebře, proto jej ponecháme jako cvičení pilnému čtenáři. □

Proč je předchozí lemma důležité? Náhodná veličina má své rozdělení (pravděpodobnostní míru na prostoru hodnot) a naším cílem je postupně se dostat k pojmu rozdělení náhodného procesu.

1.6. **Značení.** Náhodná veličina $Y = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ má rozdělení P_Y na prostoru $\mathbb{E}^n$. Toto rozdělení budeme někdy též značit $P_{(t_1,\dots,t_n)}$ a nazveme jej konečně rozměrné rozdělení procesu X v $(t_1, \dots, t_n)$.

1.7. **Definice.** Stochastický proces X s hodnotami v metrickém prostoru $\mathbb{E}$ indexovaný $[0,1]$ $(\mathbb{R}^+)$ se nazývá spojitý (zprava spojitý), pokud pro všechna $\omega \in \Omega$ jsou zobrazení $X(\omega) : t \mapsto X_t(\omega)$ spojitá.

Následující tvrzení je známé z kursů analýzy.

1.8. **Lemma.** *Na prostoru spojitých funkcí $C = C[0,1]$ je $\rho(x,y) = \sup_{0\le t\le 1} |x_t - y_t|$ metrikou. Metrický prostor $(C[0,1], \rho)$ je úplný separabilní prostor.*

Na prostoru spojitých funkcí $C = C[0,\infty)$ je $\rho_C(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 \wedge \sup_{0\le t\le n} |x_t - y_t|)$ metrikou (lokálně stejnoměrné konvergence). Metrický prostor $(C[0,\infty), \rho_C)$ je úplný separabilní prostor.

1.9. **Definice.** Stochastický proces $X = (X_t, t \ge 0)$ nazveme modifikací stochastického procesu $Y = (Y_t, t \ge 0)$ pokud

$$\forall t \ge 0 \quad \mathsf{P}(X_t = Y_t) = 1.$$

1.10. *Poznámka.* Proces X je tedy modifikací procesu Y, pokud v žádném předem zvoleném čase není možné procesy X a Y rozeznat.

Nezapomeňte, že procesy X a Y musí být definovány na stejném pravděpodobnostním prostoru.

1.11. **Lemma.** *Nechť stochastický proces X je modifikací stochastického procesu Y. Pak konečněrozměrná rozdělení X a Y jsou shodná.*

Důkaz. Jistě platí, že $\mathsf{P}(X_t \in B) = \mathsf{P}(Y_t \in B)$, protože $P(X_t = Y_t) = 1$. Důkaz je tedy očividný. □

1.12. *Poznámka.* Dva procesy mohou mít stejná konečněrozměrná rozdělení aniž jsou definovány na shodném pravděpodobnostním prostoru.

Budou-li například dva hráči házet stejnou mincí, pak stochastické procesy zaznamenávající počet líců zvlášť u každého hráče mají shodná konečněrozměrná rozdělení, ale vzniklé procesy nejsou modifikací jeden druhého.

Shoda konečněrozměrných rozdělení je tedy slabší variantou „rovnosti“procesů než je modifikace. Naopak *nerozlišitelnost* je v podstatě ekvivalencí procesů.

1.13. **Definice.** Stochastické porcesy X a Y jsou nerozlišitelné (ekvivalentní), pokud

$$\mathsf{P}(X_t = Y_t, \forall t \ge 0) = 1.$$

1.14. *Poznámka.* Opět musí být X a Y definovány na shodném pravděpodobnostním prostoru.

Nerozlišitelnost znamená, že ani při pohledu na *celou trajektorii* procesů X a Y je nejsme s pravděpodobností 1 schopni rozlišit.

1.15. **Věta.** *Nechť X a Y jsou spojité stochastické procesy a budiž X modifikací Y. Pak X a Y jsou nerozlišitelné.*

Důkaz. Uvědomme si, že

$$\mathsf{P}(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall t \ge 0 \Rightarrow \mathsf{P}(X_q = Y_q, \forall q \in \mathbb{Q}^+) = 1,$$

kde $\mathbb{Q}^+$ značí všechna nezáporná racionální čísla. Pak stačí již jen vzít v potaz spojitost X a Y a nahlédnout

$$\forall t \ge 0 : \; X_t = \lim_{q\to t+} X_q \overset{\text{s.j.}}{=} \lim_{q\to t+} Y_q = Y_t.$$

□

1.16. *Poznámka.* Jak je vidět z důkazu, místo spojitosti je možné předpokládat jen spojitost zprava procesů X a Y. Stejně tak je možné předpokládat jen spojitost zleva.

Tvrzení ale nemusí platit, bude-li proces X spojitý zleva, zatímco proces Y bude spojitý zprava (najděte si takový příklad).

Jak je však vidět z důkazu, stačilo by, aby „jen“skoro všechny trajektorie X a Y byly spojité (zprava spojité).

Je-li X spojitý proces a proces Y je s ním ekvivalentní, pak Y má skoro všechny trajektorie spojité. Je proto možné definovat jako spojitý proces ten, který má *skoro všechny* trajektorie spojité.

1.17. **Značení.** Prostor $\mathbb{E}^\Lambda$ značí prostor všech zobrazení množiny Λ do $\mathbb{E}$. Je-li $x \in \mathbb{E}^\Lambda$, pak x_t je hodnota zobrazení x v bodě $t \in \Lambda$.

1.18. **Definice.** Množiny typu

$$\{x \in \mathbb{E}^\Lambda : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in B\},\ n \in \mathbb{N},\ t_1, \dots, t_n \in \Lambda,\ B \in \mathcal{B}^n$$

nazveme cylindrické množiny, nebo konečněrozměrné válce. Cylindrickou σ-algebrou nazveme nejmenší σ-algebru obsahující všechny cylindrické množiny.

1.19. **Značení.** Cylindrickou σ-algebru na prostoru $\mathbb{X}$ budeme značit $\mathcal{C}(\mathbb{X})$. Borelovskou σ-algebru budeme značit $\mathcal{B}(\mathbb{X})$.

Prostor spojitých funkcí $C(I)$ na reálném intervalu I budeme značit též $\boldsymbol{C}_I$. Prostor spojitých funkcí na $[0,1]$ označíme $\boldsymbol{C}$ a pro prostor spojitých funkcí na $\mathbb{R}^+$ použijeme značení $\boldsymbol{C}_+$.

1.20. **Lemma.** *Cylindrické množiny tvoří algebru podmnožin* $\mathbb{E}^\Lambda$.

Důkaz. Jistě platí, že $\mathbb{E}^\Lambda$ je cylindrická množina, protože $\mathbb{E}^\Lambda = \{x : x_0 \in \mathbb{E}\}$.

Je-li $C \in \Sigma$, pak $C = \{x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in B\}$. Proto $\mathbb{E}^\Lambda \setminus C = \{x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in \mathbb{E}^n \setminus B\} \in \Sigma$.

Jsou-li $C_1, C_2 \in \Sigma$ pak $C_1 = \{x : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in B_1\}$ a $C_2 = \{x : (x_{s_1}, \dots, x_{s_m}) \in B_2\}$ a platí $C_1 \cap C_2 = \{x : (x_{u_1}, \dots, x_{u_k}) \in B\}$, kde $\{u_1, \dots, u_k\} = \{t_1, \dots, t_n\} \cup \{s_1, \dots, s_m\}$ a $B \in \mathcal{B}^k$ je průnikem množiny $\{(x_{u_1}, \dots, x_{u_k}) : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in B_1\}$ s množinou $\{(x_{u_1}, \dots, x_{u_k}) : (x_{s_1}, \dots, x_{s_m}) \in B_2\}$. Jde tedy o konečněrozměrný válec. $\square$

1.21. *Úmluva.* Od teď budeme až na vyznačené případy uvažovat $\Lambda = [0, T]$, nebo $\Lambda = \mathbb{R}^+$. Ovšem v následujících několika tvrzeních se omezíme na $\Lambda = [0, 1]$.

1.22. **Věta.** $\mathcal{C}(\boldsymbol{C}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{C})$.

Důkaz. Prvně si uvědomme, že cylindrická σ-algebra $\mathcal{C}(\boldsymbol{C})$ je generována množinami typu $\{x \in \boldsymbol{C} : x_t \in B\}$ pro nějaké $t \in [0,1]$ a $B \in \mathcal{B}$.

Pro $t \in [0,1]$ označme $\pi_t : \boldsymbol{C} \to \mathbb{R}$ projekci $\pi_t(x) = x_t$. Zobrazení π_t je spojité a tedy borelovské, proto

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad \mathcal{B}(\boldsymbol{C}) \ni \pi_t^{-1}(B) = \{x \in \boldsymbol{C} : x_t \in B\}.$$

Tím jsme dokázali, že množina generátorů cylindrické σ-algebry náleží do borelovské. Musí tedy platit $\mathcal{C}(\boldsymbol{C}) \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{C})$.

Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}(\boldsymbol{C})$ je generována například uzavřenými koulemi v $\boldsymbol{C}$; ty mají tvar

$$B_\eta(y) = \{x \in \boldsymbol{C} : \sup_{0 \le t \le 1} |x_t - y_t| \le \eta\},\ \text{kde } y \in \boldsymbol{C}.$$

Snadno se však přesvědčíme, že

$$b_\eta(y) = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}_{[0,1]}} \{x : |x_q - y_q| \le \eta\} \in \mathcal{C}(\boldsymbol{C}),$$

ježto $\mathcal{C}(\boldsymbol{C})$ je σ-algebra. Platí proto $\mathcal{B}(\boldsymbol{C}) \subset \mathcal{C}(\boldsymbol{C})$. $\square$

1.23. **Věta.** *Reálný stochastický proces $X = (X_t, t \in [0,1])$ je spojitý právě tehdy, když X je (borelovská) náhodná veličina s hodnotami v $\boldsymbol{C}$.*

Důkaz. Máme se přesvědčit, že zobrazení $X : \Omega \to C[0,1]$ je borelovsky měřitelné. Systém $\mathcal{A} = \{B \in \boldsymbol{C} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ je σ-algebrou na $\boldsymbol{C}$. Ukažme, že zahrnuje cylindrické (zde tedy ekvivalentně borelovské) množiny.

Buď $D \in \mathcal{B}$ a $B = \{x \in \boldsymbol{C} : x_t \in D\}$. Pak $X^{-1}(B) = \{\omega : X_t(\omega) \, inD\} \in \mathcal{F}$. Odtud plyne, že $\mathcal{C}(\boldsymbol{C}) \in \mathcal{A}$.

Je-li X náhodná veličina s hodnotami v $C[0,1]$, jsou trajektorie $t \to X_t(\omega)$ zřejmě spojité. Měřitelnost zobrazení $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ plyne z měřitelnosti složeného zobrazení spojitého zobrazení π_t a měřitelného zobrazení X. Je totiž $X_t = \pi_t \circ X$. $\square$

Nyní zbývá vyšetřit existenci stochastického procesu se zadanými konečněrozměrnými rozděleními. K tomu potřebujeme definovat *konsistentní systém* konečněrozměrných rozdělení.

1.24. **Definice.** Buď $\mathcal{P} = \{P_{t_1,\dots,t_n}, n \in \mathbb{N}, 0 \le t_1 < \dots < t_n < \infty\}$ systém konečněrozměrných rozdělení na reálném prostoru. Tento systém nazveme konsistentním pokud

$$P_{t_1,\dots,t_{k-1},t_{k+1},\dots,t_n}(B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times B_{k+1} \times \dots \times B_n) = P_{t_1,\dots,t_n}(B_1 \times \dots \times B_{k-1} \times \mathbb{R} \times B_{k+1} \times \dots \times B_n)$$

pro všechna n, všechna $0 \le t_1 < \dots < t_n < \infty$ a všechny borelovské množiny B_i.

1.25. **Věta** (Daniellova-Kolmogorovova, Kolmogorovova konsistenční). *Je-li systém konečněrozměrných rozdělení $\mathcal{P}$ (na reálném prostoru) konsistentní, pak existuje na stochastický proces, jehož konečněrozměrná rozdělení jsou dána systémem $\mathcal{P}$.*

4.10.2011

Naším dalším cílem je najít postačující podmínku k tomu, aby existovala spojitá modifikace stochastického procesu, jehož existenci zaručuje Kolmogorovova konsistenční věta 1.25. Pravděpodobnostní míry na prostoru spojitých funkcí $\big(\boldsymbol{C}, \mathcal{B}(\boldsymbol{C})\big)$ jsou těsné (*připomeňte si tento pojem!*), vyplatí se nám proto znát kompaktní podmnožiny prostoru $\boldsymbol{C}$.

1.26. **Věta** (Arzeláova-Ascoliova). *Buď K uzavřenou podmnožinou $\boldsymbol{C}$. Pak K je kompaktní množinou tehdy a jen tehdy, platí-li*

$$\exists k : \forall x \in K \sup_{t \in [0,1]} |x_t| \le k$$
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : \forall x \in K \; |s - t| \le \delta \Rightarrow |x_s - x_t| \le \varepsilon.$$

Neboli uzavřená množina K je kompaktní právě když jsou funkce $x \in K$ stejně omezené a stejně stejnoměrně spojité.

Tuto větu zájemce najde v poznámkách z funkcionální analýzy.

1.27. **Lemma.** *Buď f reálná funkce definovaná na $[0,1]$. Nechť existují konstanta $a > 0$ a přirozené číslo n takové, že*

$$|f((i+1)2^{-m}) - f(i2^{-m})| \le 2^{-ma} \; \forall m \ge n, \forall i = 0, 1, \dots, 2^m - 1.$$

Pak pro všechna dyadická čísla $c, d \in [0,1]$ taková, že $|c - d| \le 2^{-n}$ platí

$$|f(c) - f(d)| \le N(a)|c - d|^a, \quad \textit{kde } N(a) = 2^{2a+1}(2^a - 1)^{-1}.$$

1.28. *Poznámka.* Připomeňme, že dyadická čísla v intervalu $[0,1]$ jsou taková, která se dají napsat rozvojem

$$c = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon(i) 2^{-i}, \; \varepsilon(i) \in \{0, 1\},$$

kde jen pro nejvýše konečně mnoho indexů i platí $\varepsilon(i) \neq 0$.

Důkaz. Nechť pro nějaké $k \geq n$ platí $|c-d| \leq 2^{-k}$, kde c a d jsou dyadická čísla s rozvoji

$$c = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_c(i) 2^{-i}, \quad d = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_d(i) 2^{-i}.$$

Vezměme konečné rozvoje c a d ve tvaru $c_l = \sum_{i=0}^{l} \varepsilon_c(i)2^{-i}$ a $d_l = \sum_{i=0}^{l} \varepsilon_d(i)2^{-i}$ pro $l \geq k$. Jistě platí $|c_k - d_k| \in \{0, 2^{-k}\}$ (nakreslete si obrázek a nezapomeňte, že $0 \leq c - c_k < 2^{-k}$).

Použitím „teleskopických“ součtů dostaneme

$$f(c) = f(c_k) + \sum_{l=k}^{\infty} \big(f(c_{l+1}) - f(c_l)\big), \quad f(d) = f(d_k) + \sum_{l=k}^{\infty} \big(f(d_{l+1}) - f(d_l)\big)$$

pročež platí odhad

$$|f(c) - f(d)| \leq |f(c_k) - f(d_k)| + \sum_{l=k}^{\infty} \big(|f(c_{l+1}) - f(c_l)| + |f(d_{l+1} - f(d_l)|.$$

Z vlastností dyadických čísel a jejich rozvojů plynou vztahy $|c_k - d_k| \in \{0, 2^{-k}\}$ a $|c_{l+1} - c_l|, |d_{l+1} - d_l| \in \{0, 2^{-(l+1)}\}$. Z předpokladu na funkci f dostáváme pro libovolné $k \geq n$ pro něž $|c-d| \leq 2^{-k}$ odhad

$$|f(c) - f(d)| \leq 2^{-ka} + 2\sum_{l=k}^{\infty} 2^{-(l+1)a} \leq 2\sum_{l=k}^{\infty} 2^{-la} = 2^{-ka}\frac{2^{a+1}}{2^a - 1}.$$

Zbývá nám zpřesnit odhad a nahradit 2^{-k} hodnotou $|c-d|$. Je-li $|c-d| \leq 2^{-n}$ volme k tak, že $|c-d| \leq 2^{-k} \leq 2|c-d|$ (*přesvědčte se, že takové $k \geq n$ musí existovat!*). Pak tedy $2^{-ka} \leq 2^a |c-d|^a$ a platí

$$|f(c) - f(d)| \leq |t-s|^a \frac{2^{2a+1}}{2^a - 1}.$$

□

1.29. **Lemma.** *Množiny*

$K_n(a) := \{f \in \boldsymbol{C} : |f(0)| \leq 2^n, |f(c) - f(d)| \leq N(a)|c-d|^a$ *pro všechna dyadická* $c, d \in [0,1], |c-d| \leq 2^{-n}\}$ *jsou kompaktní podmnožiny prostoru* $\boldsymbol{C}$.

Důkaz. Snadno ověříme, že □

1.30. *Úmluva.* V dalším textu se pod pojmem stochastický proces míní vždy reálný stochastický proces.

1.31. **Věta.** *Buď $X = (X_t, t \in [0,1])$ spojitý proces. Nechť $\alpha > 0$, $\beta > 0$ a $N > 0$ jsou konstanty takové, že*

$$E|X_t - X_s|^\alpha \leq N|t-s|^{1+\beta}, \quad \forall s, t \in [0,1].$$

Pak pro $0 < a < \beta\alpha^{-1}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n takové, že $P[X \in K_n(a)] \geq 1 - \varepsilon$, kde

$$K_n(a) := \{x \in \boldsymbol{C} : |x_0| \leq 2^n, |x_c - x_d| \leq N(a)|c-d|^a \text{ pro všechna dyadická } c, d \in [0,1], |c-d| \leq 2^{-n}\}$$

1.32. **Věta.** *Buďte $X^k = (X_t^k, t \in [0,1])$, $k \geq 1$ spojité procesy takové, že pro nějaké konstanty $\alpha > 0$, $\beta > 0$ a $N > 0$ platí*

$$E|X_t^k - X_s^k|^\alpha \leq N|t-s|^{1+\beta}, \quad \forall s, t \in [0,1], \forall k \geq 1$$

a dále nechť

$$\sup_{k \geq 1} P[|X_0^k| \geq k] \to 0 \quad \text{při } k \to \infty.$$

Pak posloupnost rozdělení P_{X^k} na $\boldsymbol{C}$ je relativně kompaktní.

1.33. **Věta** (Kolmogorovova-Čencovova)**.** *Buď $X = (X_t, t \in [0,1])$ takový stochastický proces, že pro nějaká $\alpha > 0$, $\beta > 0$ a $N > 0$ platí*

$$E|X_t - X_s|^\alpha \leq N|t-s|^{1+\beta}, \quad \forall s, t \in [0,1].$$

Pak existuje spojitý proces $Y = (Y_t, t \in [0,1])$ takový, že Y je modifikací X.

1.2. Wienerův proces.

1.34. **Definice.** Stochastický proces $X = (X_t, t \geq 0)$ se nazývá gaussovský, pokud všechna jeho konečněrozměrná rozdělení jsou normální.
Stochastický proces X se nazývá centrovaný, pokud $EX_t = 0$ pro všechna $t \in \Lambda$.
Kovarianční funkcí stochastického procesu $X = (X_t, t \geq 0)$ rozumíme funkci $\phi(s,t) = \operatorname{cov}(X_s, X_t)$, $s, t \geq 0$.

1.35. **Značení.** Symbolem $s \wedge t$ ($s \vee t$) budeme pro dvě reálná čísla značit jejich minimum (maximum).

1.36. **Definice.** Wienerův proces je spojitý centrovaný gaussovský proces $W = (W_t, t \geq 0)$ s kovarianční funkcí $\mathrm{E}\, W_t W_s = s \wedge t$.

1.37. **Věta.** *Stochastický proces $W = (W_t, t \geq 0)$ je Wienerův, pokud*
- (i) *má spojité trajektorie*
- (ii) $W_0 = 0$
- (iii) *má nezávislé přírůstky, tedy pro každou volbu $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$ jsou náhodné veličiny $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$, $i = 1, 2, \dots,$ nezávislé.*
- (iv) *pro každé $s, t \geq 0$ je rozdělení $W_t - W_s$ normální s nulovou střední hodnotou a rozptylem $|t - s|$.*

Důkaz. Máme ověřit čtyři vlastnosti:
- (a) spojitost trajektorií
- (b) nulovost střední hodnoty
- (c) normalitu konečněrozměrných rozdělení
- (d) kovarianční funkci

Spojitost procesu W plyne z předpokladu (i). Z předpokladů (ii) a (iv) plyne $\mathrm{E}\, W_t = \mathrm{E}\, W_0 + \mathrm{E}(W_t - W_0) = 0$.

Nezávislost přírůstků spolu s jejich normalitou zaručuje sdružené normální rozdělení přírůstků, speciálně pro $t_0 = 0$ platí

$$\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, i = 1, \dots, n\right) \sim \mathrm{N}_n\left(\mathbf{0}, \Sigma\right), \text{ kde } \Sigma = \left(\delta_{ij}|t_i - t_{i-1}|\right)_{i,j=1}^n \text{ je diagonální matice.}$$

Díky jednoduchému vztahu

$$(W_{t_1}, \dots, W_{t_n}) = \boldsymbol{A}(W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}), \text{ kde } \boldsymbol{A} = (a_{i,j}), a_{i,j} = \nVdash_{i \geq j}$$

platí, že sdružené rozdělení náhodného vektoru $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ je opět normální.

Zbývá ověřit $\operatorname{cov}(W_s, W_t) = s \wedge t$. Je-li $s \leq t$, pak $\operatorname{cov}(W_s, W_t) = \operatorname{var} W_s + \operatorname{cov}(W_S, W_t - W_s) = s$. ☐

1.38. **Věta** (Modul spojitosti)**.** *Buď $W = (W_t, t \in [0,1])$ Wienerův proces. Nechť $0 < \varepsilon < 1/2$, pak P-s.j. (pro skoro všechna ω) existuje $n \geq 0$ takové, že pro $s, t \in [0,1]$ platí*

$$|s - t| \leq 2^{-n} \Rightarrow |W_t - W_s| \leq N|t - s|^{1/2 - \varepsilon}$$

a N závisí jen na hodnotě ε.
`veta:modspoj`

1.39. *Poznámka.* Z věty 1.38 plyne, že pro skoro všechna ω existuje n tak, že $|W_t| \leq N t^{1/2-\varepsilon}$ pokud $t \leq 2^{-n}$, na druhou stranu pro každé M a každé $t > 0$ platí $\mathsf{P}(|W_t| > M) > 0$. Uvědomte si, proč tomu tak je a že nejde o žádný paradox.

1.40. **Věta** (Lévyho modul spojitosti)**.** *Buď $W = (W_t, t \in [0,1])$ Wienerův proces. Pak*

$$\mathsf{P}\left(\limsup_{\varepsilon \to 0+} \sup_{|s-t| \leq \varepsilon} |W_t - W_s|(2\varepsilon \log 1/\varepsilon)^{-1/2} = 1\right) = 1.$$

1.41. *Poznámka.* Předchozí dvě věty říkají, že trajektorie Wienerova procesu jsou skoro jistě lokálně $1/2-\varepsilon$ hölderovské pro libovolné $\varepsilon > 0$, ale nejsou $1/2$ hölderovské (ani lokálně).

6.10.2011

1.42. **Věta.** *Trajektorie Wienerova procesu nemají v žádném bodě derivaci s.j.*

Připomeňme si pojem Diniho derivací. Buď f nějaká funkce definovaná na $[0,\infty)$. Hodnoty (*uvědomte si, že jsou opravdu dobře definované*)

$$D_f^+(t) = \limsup_{h\to 0+} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}, \quad D_{+f}(t) = \liminf_{h\to 0+} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

nazveme horní a dolní praví Diniho derivace funkce f v bodě t. Funkce má v bodě t derivaci zprava, jsou-li horní a dolní pravé DIniho derivace konečné a shodné.

Důkaz. V důkazu ukážeme, že množina trajektorií, které mají na intervalu $[0,1)$ derivaci alespoň v jednom bodě je obsažena v množině míry nula.

Buď $W = \big(W_t, t\in[0,1)\big)$ Wienerův proces na $[0,1)$. Trajektorie $W(\omega)$ *může* mít v bodě t derivaci pouze tehdy, pokud $-\infty < D_{+W(\omega)}(t) \le D^+_{W(\omega)}(t) < \infty$. Trajektorie $W(\omega)$ tedy může mít v nějakém bodě derivaci pokud

$$\exists j\ge 1\ \exists k\ge 1\ \exists t\in[0,1-1/k) \text{ tak, že } \forall h\in(0,1/k) \text{ platí } |W_{t+h}(\omega)-W_t(\omega)| < jh$$

Označme proto

$$N_{j,k} = \bigcup_{t\in[0,1-1/k)} \bigcap_{h\in(0,1/k)} \{\omega : |W_{t+h}(\omega)-W_t(\omega)| < jh\}$$

(všimněte si nespočetného sjednocení v definici $N_{j,k}$) a zřejmě

$$N := \Big\{\omega : \exists t\in[0,1) : -\infty < D_{+W(\omega)}(t) \le D^+_{W(\omega)}(t) < \infty\Big\} = \bigcup_{j=1}^\infty \bigcup_{k=1}^\infty N_{j,k}.$$

Postačí tedy ukázat, že pro každou $N_{j,k}$ existuje množina $N^0_{j,k}$ míry nula taková, že $N_{j,k}\subset N^0_{j,k}$.

Buď $\omega\in N_{j,k}$. Existuje tedy nějaké $s\in[0,1-1/k)$ takové, že $|W_{t+h}(\omega)-W_t(\omega)| < jh$ pro všechna $h<1/k$. Uvažujme dělení $\{i/n, i=0,1,\dots,n-1\}$ intervalu $[0,1)$ pro jakékoliv $n\ge 4k$. Buď i takové číslo, že $(i-1)/n < t \le i/n$ (nakreslete si obrázek).Pak jistě platí, že $(i+3)/n - t < 1/k$ a proto

$$|Z_1(\omega)| = |W_{(i+1)/n}(\omega) - W_{i/n}(\omega)| \le |W_{(i+1)/n}(\omega)-W_t(\omega)| + |W_{i/n}(\omega)-W_t(\omega)| \le \frac{3j}{n}$$
$$|Z_2(\omega)| = |W_{(i+2)/n}(\omega) - W_{(i+1)/n}(\omega)| \le |W_{(i+2)/n}(\omega)-W_t(\omega)| + |W_{(i+1)/n}(\omega)-W_t(\omega)| \le \frac{5j}{n}$$
$$|Z_3(\omega)| = |W_{(i+3)/n}(\omega) - W_{(i+2)/n}(\omega)| \le |W_{(i+3)/n}(\omega)-W_t(\omega)| + |W_{(i+2)/n}(\omega)-W_t(\omega)| \le \frac{7j}{n}$$

Využijme faktu, že Z_l jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny (mají $\mathrm{N}(0,1/n)$ rozdělení), platí $\mathrm{P}(|Z_l|\le a) \le \sqrt{n}a$ (hustota $\mathrm{N}(0,1/n)$ je shora omezená $\sqrt{n}/2$) a proto

$$\mathrm{P}(|Z_l| \le (2l+1)j/n,\ l=1,2,3) = \prod_{l=1}^3 \mathrm{P}(|Z_l|\le(2l+1)j/n) \le n^{3/2}\frac{105j^3}{n^3}$$

Označíme-li pro $n\ge 4k$ (měřitelnou!) množinu $M_{i,n} = \{\omega : |W_{(i+l)/n}(\omega) - W_{(i+l-1)/n}(\omega)| \le (2l+1)j/n,\ l=1,2,3\}$, pak

$$N_{j,k} \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} M_{i,n}\ \forall n\ge 4k \ \Rightarrow\ N_{j,k}\subset N^0_{j,k} = \bigcap_{n=4k}^\infty \bigcup_{i=0}^{n-1} M_{i,n}$$

Protože však $\mathrm{P}(\bigcup_{i=0}^{n-1} M_{i,n}) \le \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{P}(M_{i,n}) \le n\frac{105j^3}{n^{3/2}} = 105j^3 n^{-1/2}$ platí

$$\mathrm{P}(N_{j,k}^0) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=4k}^{\infty}\bigcup_{i=0}^{n-1} M_{i,n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} M_{i,n}\right) = 0$$

□

1.43. **Značení.** Pro interval $[0,t]$ označíme $\Delta_t = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_d = t\}$ nějaké dělení tohoto intervalu a $\|\Delta_t\| = \max|t_i - t_{i-1}|$ jeho normu.

Pro stochastický proces $X = (X_t, t \in [0,T])$, čas $t \le T$ a dělení Δ_t označme

$$V_{\Delta_t}^p(X) = \sum_{i=1}^{d} |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}|^p.$$

1.44. **Definice.** Buď $X = (X_t, t \ge 0)$ stochastický proces. Kvadratickou variací procesu X nazveme stochastický proces $\langle X\rangle = (\langle X\rangle_t, t \ge 0)$. takový, že pro každé $t \ge 0$ a pro libovolnou posloupnost dělení $\{\Delta_t^n\}$ intervalu $[0,t]$ splňující $\|\Delta_t^n\| \to 0$ platí

$$p\text{-}\lim V_{\Delta_t^n}^2(X) = \langle X\rangle_t, \quad \text{neboli} \quad \mathsf{P}[|V_{\Delta_t^n}^2(X) - \langle X\rangle_t| > \varepsilon] \to 0 \;\forall \varepsilon > 0.$$

Součástí definice je očividně existence požadované limity v pravděpodobnosti.

1.45. **Věta.** *Buď W Wienerův proces. Pak $\langle W\rangle_t = t$ skoro jistě.*

Důkaz. Buď Δ_t^n libovolná posloupnost dělení intervalu $[0,t]$, jehož norma jde k nule. Z normality a nezávislosti přírůstků Wienerova procesu plyne

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\sum_{t_i\in\Delta_t^n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - t\right)^2 &= \mathrm{var} \sum_{t_i\in\Delta_t^n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = \sum_{t_i\in\Delta_t^n} \mathrm{var}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \\ &= 2\sum_{t_i\in\Delta_t^n} (t_i - t_{i-1})^2 \le 2t\|\Delta_t^n\|. \end{aligned}$$

Rovnost ve druhém řádku plyne z faktu, že rozptyl náhodné veličiny s χ_1^2 rozdělením je roven 2. Jelikož $\|\Delta_t^n\| \to 0$ plyne odtud konvergence v kvadratickém středu ($\mathcal{L}_2$ normě) a tedy i v pravděpodobnosti. □

1.46. *Poznámka.* U spojitých funkcí se jednotlivé variace určitým způsobem vylučují. Má-li funkce konečnou a nenulovou kvadratickou variaci, pak úplná variace musí být nekonečná. Z toho plyne, že skoro všechny trajektorie Wienerova procesu jsou spojité funkce s nekonečnou úplnou variací na libovolně malém intervalu $[s,t]$ pro $0 \le s < t$.

To má jeden neblahý důsledek. Pokud bychom uvažovali nějakou posloupnost náhodných veličin $\{X_i\}$ a posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $\{Z_i\}$, kde Z_i mají vesměs normované normální rozdělení, pak lze snadno definovat nový proces

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i Z_i.$$

Posloupnost náhodných veličin $\{Y_n\}$ proto splňuje $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}Z_{n+1}$ a může být interpretována jako vývoj systému v čase, kde X je nějaký vstupní proces a Z jsou náhodné vlivy.

Uvažujme nyní zjemňující se časový krok. Nechť $t_i^n = i2^{-n}$ a nechť Z_i^n jsou nezávislé náhodné veličiny s rozdělením $N(0, 2^{-n})$. Vzhledem k tomu, že $Z_{t_i^n}$ reprezentují přírůstky Wienerova procesu na intevalu $[t_i^n, t_{i+1}^n]$, asi bychom očekávali, že limitou

$$\sum_{i=1}^{k2^n} X_{t_i^n} Z_{t_i^n} = \sum_{i=1}^{k2^n} X_{t_i^n}(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})$$

bude „nějaký integrál“ typu $\int_0^k X\,\mathrm{d}W$.

Potíž ovšem je, že výraz $\mathrm{d}W$ vzhledem k vlastnostem trajektorií Wienerova procesu postrádá obvyklý smysl. Cesta k tomuto typu integrálu bude ještě dlouhá.

1.47. *Poznámka.* Má-li proces X konečnou nenulovou kvadratickou variaci $\langle X\rangle$, je proces $(\langle X\rangle_t, t \geq 0)$ neklesající proces, tedy proces s konečnou úplnou variací. Jako takový proto definuje *náhodnou* míru $\mu_{\langle X\rangle}[s,t] = \langle X\rangle_t - \langle X\rangle_s$. V případě Wienerova procesu tedy jde o obvyklou *Lebesgueovu míru* na kladné poloose.

Uvažujme nějakou jednoduchou funkci (po částech konstantní, zleva spojitou) $f(t)$ definovanou na nezáporných hodnotách, řekněme $f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(s)$, kde $0 = t_0 < t_1 < \dots$. Můžeme psát

$$\int_0^t f(s)dW_s(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(W_{t_{i+1}}(\omega) - W_{t_i}(\omega)) + f_n(W_t(\omega) - W_{t_n}(\omega)), \text{ kde } t_n \leq t < t_{n+1}.$$

Výraz vlevo je v tuto chvíli jen symbol, který takto můžeme definovat pro každé $t \geq 0$ a každé ω. Vpravo máme funkci ω, která je náhodnou veličinou se známým rozdělením—normálním. Jde totiž o lineární kombinaci normálně rozdělených (dokonce nezávislých) náhodných veličin. Snadno se ověří, že

$$\mathrm{E}\int_0^t f(s)dW_s = 0, \quad \mathrm{var}\int_0^t f(s)dW_s = \int_0^t f^2(s)ds = \int_0^t f^2(s)d\langle W\rangle_s.$$

Tato poslední rovnost bude hrát v dalším výkladu významnou roli.

11.10.2011

1.3. **Dynamika jevového pole a měřitelnost procesů.**

1.48. **Definice.** Buď $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ pravděpodobnostní prostor. Filtrací na tomto prostoru rozumíme systém σ-algeber $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ takový, že

(i) $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pro všechna $t \geq 0$.
(ii) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pro všechna $0 \leq s < t$.

Dále označíme $F_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$.

1.49. **Definice.** Stochastický proces $X = (X_t, t \geq 0)$ se nazývá

(i) měřitelný, pokud zobrazení $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ je $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}[0,\infty)$ měřitelné.
(ii) $\mathcal{F}_t$-adaptovaný, pokud pro filtraci $\{\mathcal{F}_t\}$ platí, že X_t je $\mathcal{F}_t$ měřitelná náhodná veličina pro každé $t \geq 0$.
(iii) $\mathcal{F}_t$-progresivně měřitelný, pokud pro filtraci $\{\mathcal{F}_t\}$ platí, že pro každé $t \geq 0$ je zobrazení $X : \Omega \times [0,t] \to \mathbb{R}$ měřitelné vůči $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}_t$, kde $\mathcal{B}_t$ je boralovská σ-algebra na intervalu $[0,t]$.

1.50. *Poznámka.* Všimněme si, že je-li proces X $\mathcal{F}_t$-adaptovaný, pak

$$\mathsf{E}[X_t|\mathcal{F}_t] = X_t \text{ s.j. } \forall t \geq 0, \quad \mathsf{E}[X_s|\mathcal{F}_t] = X_s \text{ s.j. } \forall 0 \leq s \leq t.$$

Filtrace $\mathcal{F}_t$ tedy nese historii procesu X, jinými slovy σ-algebra $\mathcal{F}_t$ obsahuje veškerou informaci o tom, co se procesu X „přihodilo“ do času t včetně.

1.51. **Definice.** Buď $X = (X_t, t \geq 0)$ stochastický proces. Definujme pro každé $t \geq 0$ σ-algebru $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$. Systém $\{\mathcal{F}_t^X\}$ se nazývá kanonickou filtrací procesu X.

1.52. **Lemma.** *$\{\mathcal{F}_t^X\}$ jue filtrace, X je $\mathcal{F}_t^X$ adaptovaný. Ve skutečnosti jde o nejmenší filtraci vůči níž je proces X adaptovaný.*

Důkaz. Jde o snadné cvičení. □

1.53. *Poznámka.* Adaptovaný proces nemusí být měřitelný. Měřitelný proces nemusí být adaptovaný. Progresivně měřitelný proces je měřitelný i adaptovaný.

Spojitost znamená měřitelnost i pro procesy.

1.54. **Věta.** *Buď X zprava (nebo zleva) spojitý stochastický proces. Pak X je měřitelný.*

`veta:spojmer`

Důkaz. Buď X zprava spojitý. Naším úkolem je tedy dokázat, že

$$\{(\omega, s) : X_s(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B} \quad \text{pro všechna } a \in \mathbb{R}.$$

Definujme po částech konstantní proces

$$X_t^n(\omega) = \begin{cases} X_{(k+1)2^{-n}}(\omega) & \text{jestliže } t \in (k2^{-n}, (k+1)2^{-n}] \\ X_0(\omega) & \text{jestliže } t = 0. \end{cases}$$

Díky spojitosti zprava platí $X_t^n \to X_t$ pro všechna $t \geq 0$. Snadno ověříme, že

$$\begin{aligned} \{(\omega, s) : X_s^n(\omega) \leq a\} &= \bigcup_{k=0}^{\infty} \{\{\omega : X_{(k+1)2^{-n}}(\omega) \leq a\} \times (k2^{-n}, (k+1)2^{-n}] \cup \{\omega : X_0(\omega) \leq a\} \times \{0\}\} \\ &\in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Procesy X^n jsou měřitelné a X jako jejich limita též. □

Mírnou obměnou předchozího důkazu s předpokladem adaptovanosti procesu X dostaneme ještě lepší výsledek.

1.55. **Věta.** *Buď X zprava (nebo zleva) spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný stochastický proces. Pak X je $\mathcal{F}_t$ progresivně měřitelný.*

Důkaz. Buď $T \geq 0$ libovolné pevné. V důkazu věty 1.54 změňme definici procesů X^n tak, že

$$X_t^n(\omega) = \begin{cases} X_{(k+1)2^{-n}}(\omega) & \text{jestliže } t \in (kT2^{-n}, (k+1)T2^{-n}], k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1 \\ X_0(\omega) & \text{jestliže } t = 0, \text{ nebo } t > T. \end{cases}$$

Díky spojitosti zprava $X_t^n \to X_t$ pro každé $t \in [0, T]$ a platí

$$\begin{aligned} \{(\omega, s) : X_s^n(\omega) \leq a\} &= \bigcup_{k=0}^{2^n-1} \{\{\omega : X_{(k+1)T2^{-n}}(\omega) \leq a\} \times (kT2^{-n}, (k+1)T2^{-n}] \cup \{\omega : X_0(\omega) \leq a\} \times \{0\}\} \\ &\in \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}([0, T]). \end{aligned}$$

□

Platí ještě trochu více.

1.56. **Věta.** *Buď X měřitelný $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces. Pak existuje jeho $\mathcal{F}_t$ progresivně měřitelná modifikace.*

Pro Wienerův proces W si pamatujeme, že jeho přírůstky jsou nezávislé. Je tedy také nezávislá náhodná veličina $W_t - W_s$ a náhodná veličina W_u pro libovolnou volbu $u \leq s \leq t$, což má za důsledek nezávislost σ-algeber $\sigma(W_t - W_s)$ a $\mathcal{F}_s^W$. Při definici Wienerova procesu jsme nepotřebovali pojem filtrace. Teď zavedeme Wienerův proces vázaný na filtraci.

1.57. **Definice.** Buď $\{\mathcal{F}_t\}$ nějaká filtrace. Stochastický proces $W = (W_t, t \geq 0)$ nazveme $\mathcal{F}_t$ Wienerův proces, pokud

(i) W je Wienerův proces
(ii) W je $\mathcal{F}_t$ adaptovaný
(iii) pro každé $0 \leq s \leq t$ jsou $\mathcal{F}_s$ a $\sigma(W_t - W_s)$ nezávislé σ-algebry.

1.58. **Lemma.** *Buď W Wienerův proces. Pak je W $\mathcal{F}_t^W$-Wienerův proces.*

1.59. **Věta.** *Buď $W = (W_t, t \geq 0)$ $\mathcal{F}_t$-Wienerův proces. Pak pro každé $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ a libovolná $0 \leq h_1 < h_2 < \cdots < h_n$ platí:*

(i) *Náhodný vektor $(W_{t+h_1} - W_t, W_{t+h_2} - W_t, \ldots, W_{t+h_n} - W_t)$ je nezávislý na σ-algebře $\mathcal{F}_t$.*

(ii) *Proces $\widetilde{W} = (W_{t+s} - W_t, s \geq 0)$ je $\mathcal{F}_{t+s}$-Wienerův.*

`veta:Wmarkov`

1.60. **Definice.** Buď $\tau : \Omega \to [0, \infty]$. Řekneme, že τ je markovský čas vzhledem k filtraci $\{\mathcal{F}_t\}$ (neboli $\mathcal{F}_t$-markovský čas), pokud platí

$$[\tau \leq t] = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0.$$

1.61. **Lemma.** *Nechť $a < 0 < b$ a nechť W je $\mathcal{F}_t$-Wienerův proces. Náhodný čas $\tau = \inf\{t \geq 0 : W_t \notin (a, b)\}$ je $\mathcal{F}_t$-markovský čas.*

1.62. **Značení.** Buď X stochastický proces a τ náhodný čas. Označíme

$$X_\tau = \begin{cases} X_{\tau(\omega)}(\omega) & \text{je-li } \tau(\omega) < \infty, \\ 0 & \text{je-li } \tau(\omega) = \infty. \end{cases}$$

1.63. *Poznámka.* Uvědomme si, že pro libovolný $\mathcal{F}_t$-markovský čas τ a libovolné $t \geq 0$ je $\tau \wedge t = \min\{\tau(\omega), t\}$ také $\mathcal{F}_t$-markovský čas

1.64. **Věta.** *Buď W $\mathcal{F}_t$-Wienerův proces a τ skoro jistě konečný $\mathcal{F}_t$-markovský čas (tedy $\mathsf{P}[\tau < \infty] = 1$). Pak procesy*

$$W^\tau = (W_{\tau \wedge t}, t \geq 0) \quad a \quad B = (W_{\tau+t} - W_\tau, t \geq 0)$$

jsou nezávislé a navíc proces B je Wienerův proces.

1.65. *Poznámka.* Vlastnost popsaná v předchozí větě se nazývá silná markovská vlastnost Wienerova procesu (na rozdíl od markovské vlastnosti popsané ve větě 1.59

1.66. **Věta.** *Buď W $\mathcal{F}_t$-Wienerův proces a buď τ $\mathcal{F}_t$-markovský čas takový, že $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$. Označme*

$$\mathcal{F}^W_{\leq\tau}\sigma\left(\{\omega : W_{s\wedge\tau}(\omega) \in B\}, s \geq 0, B \in \mathcal{B}\right), \quad \mathcal{F}^W_{\geq\tau}\sigma\left(\{\omega : W_{\tau+s}(\omega) - W_\tau(\omega) \in B\}, s \geq 0, B \in \mathcal{B}\right).$$

Pak σ-algebry $\mathcal{F}^W_{\leq\tau}$ a $\mathcal{F}^W_{\geq\tau}$ jsou nezávislé.

1.67. **Věta.** *Buď W Wienerův proces. Označme $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t \geq a\}$.*

(i) *Nechť $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \infty$ jsou libovolné konstanty, $n \in \mathbb{N}$. Náhodné veličiny $\tau_{a_1}, \tau_{a_2} - \tau_{a_1}, \ldots, \tau_{a_n} - \tau_{a_{n-1}}$ jsou nezávislé.*

(ii) *Pro libovolné $0 < a < b < \infty$ je rozdělení náhodné veličiny $\tau_b - \tau_a$ shodné z rozdělením náhodné veličiny τ_{b-a}.*

(iii) *Markovský čas τ_a má rozdělení s hustotou*

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{s^{3/2}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2s}\right\}, \quad s > 0.$$

1.68. *Poznámka.* V důkazu předchozí věty je pro markovský čas τ_a využita rovnost

$$\mathsf{P}[\tau_a \leq t, W_t - W_{\tau_a} \geq 0] = \mathsf{P}[\tau_a \leq t, W_t - W_{\tau_a} \leq 0].$$

Tato rovnost není zcela zřejmá, je důsledkem principu reflexe. Buď τ $\mathcal{F}_t$-markovský čas a W buď $\mathcal{F}_t$-Wienerův proces. Definujme proces

$$\widetilde{W_t}(\omega) = \begin{cases} W_t(\omega) & \text{pokud } t \leq \tau(\omega) \\ W_\tau(\omega) + \big(W_\tau(\omega) - W_t(\omega)\big) & \text{pro } t > \tau(\omega). \end{cases}$$

Proces $\widetilde{W}$ je opět $\mathcal{F}_t$-Wienerův.

Nakreslete si obrázek ať vidíte, proč se mluví o principu reflexe. Uvědomte si, že libovolné pevné T je také markovský čas a tvrzení tedy platí i pro T na místě τ.

2. Adaptované procesy, martingaly a markovské časy

2.1. **Definice.** Buď $\{\mathcal{F}_t\}$ nějaká filtrace a $M = (M_t, t \geq 0)$ stochastický proces. Proces M nazveme $\mathcal{F}_t$-martingal (supermatingal, submartingal), pokud je

(i) $\mathcal{F}_t$-adaptovaný
(ii) $\mathsf{E}|M_t| < \infty$ pro všechna $t \geq 0$
(iii) $\mathsf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ ($\mathsf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s$, $\mathsf{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s$) skoro jistě pro všechna $s \leq t$.

2.2. *Poznámka.* Martingal můžeme definovat i bez odkazu na filtraci s využitím kanonické filtrace procesu.

2.3. **Lemma.** *Buď W $\mathcal{F}_t$-Wienerův proces. Pak*

(i) *W je $\mathcal{F}_t$ martingal*
(ii) *$(W_t^2, t \geq 0)$ a $(\exp(W_t), t \geq 0)$ jsou $\mathcal{F}_t$-submartingaly*
(iii) *$(W_t^2 - t, t \geq 0)$ a $(\exp(W_t - t/2), t \geq 0)$ jsou $\mathcal{F}_t$-martingaly.*

13.10.2011

2.4. **Lemma.** (i) *Buď M $\mathcal{F}_t$-martingal a $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexní funkce taková, že $\mathsf{E}|\phi(M_t)| < \infty$ pro všechna $t \geq 0$. Pak $(\phi(M_t), t \geq 0)$ je $\mathcal{F}_t$-submartingal.*
(ii) *Je-li M $\mathcal{F}_t$-submartingal a $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neklesající konvexní funkce taková, že $\mathsf{E}|\phi(M_t)| < \infty$ pro všechna $t \geq 0$, pak $(\phi(M_t), t \geq 0)$ je $\mathcal{F}_t$-submartingal.*

2.5. **Věta.** *Buď M $\mathcal{F}_t$-martingal a buď N $\mathcal{G}_t$-martingal. Pak*

(i) *M je $\mathcal{H}_t$-martingal pro každou filtraci $\{\mathcal{H}_t\}$ takovou, že pro každé $t \geq 0$ je $\mathcal{F}_t^M \subset \mathcal{H}_t \subset \mathcal{F}_t$.*
(ii) *Jsou-li pro každé $t \geq 0$ $\mathcal{F}_t$ a $\mathcal{G}_t$ nezávislé, pak M, N i MN jsou $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{G}_t)$ martingaly.*

29.10.2010

2.6. **Lemma.** *Buď M supermartingal takový, že $\mathsf{E}M_t = c$ pro všechna $t \geq 0$. Pak M je martingal.*

2.7. **Věta.** *Buď M zprava spojitý martingal (nezáporný submartingal).*

(i) *Je-li $p \geq 1$ a $M_t \in \mathcal{L}_p$ pro všechna $t \geq 0$, pak*

$$\mathsf{P}[\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s| \geq a] \leq a^{-p}\mathsf{E}|M_t|^p.$$

(ii) *Je-li $p > 1$ a $M_t \in \mathcal{L}_p$ pro všechna $t \geq 0$, pak*

$$\mathsf{E} \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|^p \leq \left(\frac{p}{1-p}\right)^p \mathsf{E}|M_t|^p.$$

2.1. Markovské časy a filtrace.

2.8. **Definice.** Filtrace $\{\mathcal{F}_t\}$ se nazývá úplná, pokud obsahuje všechny P nulové množiny σ-algebry $\mathcal{F}$, tedy pokud platí

$$N \subset \Omega,\ \exists G \in \mathcal{F} \text{ tak, že } N \subset G, \mathsf{P}(G) = 0 \to N \in \mathcal{F}_t \forall t \geq 0.$$

Filrace $\{\mathcal{F}_t\}$ se nazývá zprava spojitá, pokud

$$\forall t \geq 0\ \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{h>0} \mathcal{F}_{t+h}$$

Filtrace slpňuje obvyklé podmínky (UC), je-li úplná a zprava spojitá.

2.9. **Lemma.** *Buď $\{\mathcal{F}_t\}$ zprava spojitá filtrace, τ náhodný čas, a nechť pro všechna $t > 0$ platí $[\tau < t] \in \mathcal{F}_t$. Pak τ je $\mathcal{F}_{t+}$-markovský čas.*

2.10. **Věta.** *Nechť X je zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces a nechť G je otevřená množina. Pak τ_G, čas prvního vstupu do množiny G splňuje $\tau < t] \in \mathcal{F}_t$ pro všechna $t \geq 0$.*

2.11. **Důsledek.** *Je-li filtrace $\{\mathcal{F}_t\}$ zprava spojitá, X zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces a G otevřená množina, pak τ_G je $\mathcal{F}_t$-markovský čas.*

2.12. *Poznámka.* V předchozím důsledku není potřeba, aby proces X byl reálný, tato věta platí pro libovolné zprava spojité procesy.

Pokud nepředpokládáme zprava spojitost filtrace, dostaneme pouze vlastnost $[\tau < t] \in \mathcal{F}_t$ pro všechna $t \geq 0$. Takovéto náhodné časy se nazývají $\mathcal{F}_t$-volitelné (optional).

2.13. **Věta.** *Nechť X je spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces a nechť F je uzavřená množina. Pak τ_F je $\mathcal{F}_t$-markovský čas.*

1.11.2010

2.14. **Věta.** *Buď $\{\mathcal{F}_t\}$ filtrace.*

(i) *Každé $s \in \mathbb{R}$ je $\mathcal{F}_t$-markovský čas.*
(ii) *Jsou-li τ a σ dva $\mathcal{F}_t$-markovské časy, pak také $\tau \wedge \sigma$, $\tau \vee \sigma$ a $\tau + \sigma$ jsou $\mathcal{F}_t$-markovské časy.*
(iii) *Jsou-li $\tau_1, \tau_2, \dots$ $\mathcal{F}_t$-markovské časy, pak také $\sup_{n\geq 1} \tau_n$ je $\mathcal{F}_t$-markovský čas.*
(iv) *Jsou-li $\tau_1, \tau_2, \dots$ $\mathcal{F}_t$-markovské časy a je-li filtrace $\{\mathcal{F}_t\}$ zprava spojitá, pak také $\inf_{n\geq 1} \tau_n$, $\liminf_{n\geq 1} \tau_n$ a $\limsup_{n\geq 1} \tau_n$ jsou $\mathcal{F}_t$-markovské časy.*

2.15. **Definice.** Buď τ $\mathcal{F}_t$-markovský čas. Definujme σ-algebru událostí do času τ

$$\mathcal{F}_\tau := \{F \in \mathcal{F}_\infty : F \cap [\tau \leq t] \in \mathcal{F}_t \forall t \geq 0\}.$$

2.16. **Lemma.** *$\mathcal{F}_\tau$ je σ-algebra a $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\infty$.*

2.17. **Lemma.** *Buď τ $\mathcal{F}_t$-markovský čas. Pak existuje posloupnost (τ_n) $\mathcal{F}_t$-markovských časů taková, že $\tau_n \searrow \tau$ a τ_n nabývají jen spočetně mnoha hodnot.*

2.18. **Značení.** Buď τ náhodný čas a X stochastický proces. Označme X^τ proces X zastavený v čase τ, tedy $X^\tau = (X_{\tau\wedge t}, t \geq 0)$.

2.19. **Věta.** *Buď τ $\mathcal{F}_t$-markovský čas a buď X spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný stochastický proces. Pak je X^τ spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný stochastický proces.*

2.20. **Věta.** *Buď τ $\mathcal{F}_t$-markovský čas a buď X spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný stochastický proces. Pak X_τ je $\mathcal{F}_\tau$ měřitelná náhodná veličina*

2.21. **Věta.** *Buďte σ a τ dva $\mathcal{F}_t$-markovské časy. Pro $A \in \mathcal{F}_\sigma$ platí $A \cap [\sigma \leq \tau] \in \mathcal{F}_\tau$.*

Speciálně, je-li $\sigma \leq \tau$, pak $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.

2.22. **Věta.** *Buďte σ a τ dva $\mathcal{F}_t$-markovské časy. Pak*

(i) *$\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.*
(ii) *Jevy $[\tau < \sigma]$, $[\tau \leq \sigma]$, $[\tau = \sigma]$ jsou v σ-algebře $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.*

5.11.2010

2.23. **Věta.** *Buď $Z \in \mathcal{L}_1(\mathsf{P})$ náhodná veličina a nechť σ a τ jsou dva $\mathcal{F}_t$-markovské časy. Pak P-s.j. platí*

$$\sigma \leq \tau \Rightarrow \mathsf{E}(Z|\mathcal{F}_\sigma) = \mathsf{E}(Z|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau})$$

neboli platí

$$\mathsf{E}(Z|\mathcal{F}_\sigma)(\omega) = \mathsf{E}(Z|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau})(\omega) \quad \text{pro s.v.} \quad \omega \in \{\omega : \sigma(\omega) \leq \tau(\omega)\}.$$

2.24. **Důsledek.** *Buď $Z \in \mathcal{L}_1(\mathsf{P})$ náhodná veličina a nechť σ a τ jsou dva $\mathcal{F}_t$-markovské časy. Pak*

$$\mathsf{E}\big(\mathsf{E}(Z|\mathcal{F}_\tau)|\mathcal{F}_\sigma\big) = \mathsf{E}(Z|\mathcal{F}_{\tau\wedge\sigma}) \quad \mathsf{P}\text{-}s.j.$$

2.25. *Poznámka.* V následující větě budeme potřebovat pojem stejné stejnoměrné integrovatelnosti. Připomeňme, že pro martingal (submartingal) $M = (M_t, 0 \le t)$ platí, že pro libovolné konečné pevné T platí, že systém náhodných veličin M_t, $0 \le t \le T$, je stejně stejnoměrně integrovatelný. Odtud plyne i potřeba omezenosti markvských časů v následující větě.

2.26. **Věta** (Optional sampling)**.** *Buď M spojitý $\mathcal{F}_t$ martingal (submartingal) a buďte $\nu \le \tau$ dva omezené $\mathcal{F}_t$ markovské časy. Pak*

$$M_\tau, M_\nu \in \mathcal{L}_1(\mathsf{P}) \quad a \quad \mathsf{E}(M_\tau|\mathcal{F}_\nu) = M_\nu,\ \mathsf{P}\text{-}s.j.\ (\ge \text{ jde-li o submartingal}).$$

8.11.2010

2.27. **Věta.** *Buď M spojitý $\mathcal{F}_t$ martingal (submartingal) a buď τ $\mathcal{F}_t$ markovský čas. Pak M^τ je spojitý $\mathcal{F}_t$ martingal (submartingal).*

2.28. **Věta.** *Buď M spojitý $\mathcal{F}_t$ martingal (submartingal) a buďte $\nu \le \tau$ dva $\mathcal{F}_t$ markovské časy. Pak*

$$\mathsf{E}(M_t^\tau|\mathcal{F}_\nu) = M_t^\nu \quad \forall t \ge 0,\ \mathsf{P}\text{-}s.j.\ (\ge \text{ jde-li o submartingal}).$$

3. Prostory spojitých procesů a Itôův integrál

3.1. **Definice.** Buď $\mathcal{F}_t$ filtrave. Náhodný proces $X = (X_t, t \ge 0)$ se nazývá $\mathcal{F}_t$ progresivně měřitelný, pokud je pro každé $t \ge 0$ zobrazení

$$(s,\omega) \mapsto X_s(\omega), \quad s \in [0,t], \omega \in \Omega \quad \text{měřitelné vůči } \mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t,$$

neboli

$$\{(s,\omega) : 0 \le s \le t, \omega \in \Omega, X_s(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{F}_t, \quad \forall t \ge 0, \forall B \in \mathcal{B}.$$

3.2. *Poznámka.* Každý progresivně měřitelný proces je adaptovaný i měřitelný. Opačná implikace obecně neplatí. Postačující podmínkou pro obrácení implikace je například spojitost zprava trajektorií.

3.3. **Věta.** *Zprava spojitý $\mathcal{F}_t$ adaptovaný proces X je $\mathcal{F}_t$ progresivně měřitelný.*

3.4. *Poznámka.* Pochopitelným a triviálním důsledkem předešlé věty je fakt, že každý zprava (zleva) spojitý proces je měřitelný. Což se ale dá dokázat i jinými prostředky.

3.5. **Věta.** *Buď X měřitelný a $\mathcal{F}_t$ adaptovaný proces. Pak existuje modifikace procesu X, která je $\mathcal{F}_t$ progresivně měřitelná.*

3.6. **Věta.** *Buď X $\mathcal{F}_t$ progresivně měřitelný proces a τ buď $\mathcal{F}_t$ markovský čas. Pak X_τ je $\mathcal{F}_\tau$ měřitelná náhodná veličina a zastavený proces X^τ je $\mathcal{F}_t$ progresivně měřitelný.*

12.11.2010

3.7. **Značení.** Označme $\mathbb{M}_2(\mathcal{F}_t)$ prostor spojitých $\mathcal{F}_t$ martingalů $M = (M_t, t \ge 0)$ s konečným druhým momentem.

3.8. **Definice.** Na $\mathbb{M}_2$ definujme

$$m(M,N) = \sum_{k=1} 2^{-k} \big[1 \wedge \mathrm{E}(M_k - N_k)^2\big]^{1/2}.$$

Uvažujeme-li martingaly pouze na omezeném časovém intervalu $[0,T]$, $T < \infty$, (označme $\mathbb{M}_2(\mathcal{F}_t, [0,T])$, tedy $M = (M_t, t \in [0,T]$, pak definujme

$$m_T(M,N) = \big[\mathrm{E}(M_T - N_T)^2\big]^{1/2}.$$

3.9. **Značení.** Bude-li zřejmé, že uvažujeme martingaly na omezeném intervalu, budeme vynechávat T ve značení m i $\mathbb{M}_2$. Bude-li zřejmá filtrace, případně bude-li filtrace u všech uvažovaných martingalů stejná, nebudeme ji ve značení uvádět.

3.10. **Lemma.** *Na prostoru* $\mathbb{M}_2$ *je* m *metrikou. Na prostoru* $\mathbb{M}_2([0,T])$ *je* m_T *metrikou.*

3.11. *Poznámka.* Buď $(M^n) \subset \mathbb{M}_2$ a buď $M \in \mathbb{M}_2$. Platí

$$m(M^n, M) \to 0 \Leftrightarrow \mathrm{E}(M^n_k - M_k)^2 \to 0 \; \forall k \in \mathbb{N}.$$

Díky Doobově nerovnosti tak dostáváme, že

$$\mathrm{E} \sup_{0 \le t \le k} (M^n_t - M_t)^2 \to 0 \; \forall k \in \mathbb{N},$$

protože $M^n - M \in \mathbb{M}_2$ (ověřte!).

3.12. **Věta.** *Nechť* $(\mathcal{F}_t)$ *je úplná filtrace. Pak* $\mathbb{M}_2(\mathcal{F}_t)$ *s metrikou* m *je úplný metrický prostor.*

3.13. *Poznámka.* Úplnost filtrace $(\mathcal{F}_t)$ zaručuje, že každá modifikace $\mathcal{F}_t$ adaptovaného procesu je také $\mathcal{F}_t$ adaptovaná.

3.14. **Definice.** Proces $A = (A_t, t \ge 0)$ nazveme rostoucím procesem, pokud je adaptovaný, jeho trajektorie jsou konečné, zprava spojité a rostoucí pro s.v. ω. Tento prostor označíme $\mathbb{A}^+(\mathcal{F}_t)$.

Proces $A = (A_t, t \ge 0)$ nazveme procesem s konečnou variací, pokud je adaptovaný, jeho trajektorie jsou konečné, zprava spojité a mají konečnou variaci pro s.v. ω. Prostor $\mathcal{F}_t$ adaptovaných procesů s konečnou variací označíme $\mathbb{A}(\mathcal{F}_t)$.

3.15. **Věta.** *Buď* $M = (M_t, t \ge 0)$ *spojitý martingal. Pak* $M \in \mathbb{A}$, *právě když* M *je konstantní s.j.*

15.11.2010

3.16. **Věta.** *Buď* $M = (M_t, t \ge 0)$ *omezený spojitý* $\mathcal{F}_t$ *martingal. Pak existuje jeho kvadratická variace* $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t, t \ge 0)$ *což je spojitý rostoucí proces a platí pro něj*

$$\langle M \rangle_t = P \lim \sum_{t_i \in \Delta_n} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2$$

pro libovolnou posloupnost dělení $\Delta_n = \{0 = t_0 \le \cdots \le t_{k_n} = t\}$ *takovou, že* $\|\Delta_n\| = \max_i\{t_{i+1} - t_i\} \to 0$ *při* $n \to \infty$.

Platí, že proces $M^2 - \langle M \rangle$ *je spojitý martingal.*

Proces $\langle M \rangle$ *je jediný v tom smyslu, že pro libovolný jiný spojitý rostoucí proces* A, $A_0 = 0$ *platí* $A_t = \langle M \rangle_t$ *s.j.*

3.17. **Definice.** Buďte X a Y procesy s konečnou kvadratickou variací. Proces s konečnou variací

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}\big(\langle X + Y \rangle - \langle X - Y \rangle\big)$$

nazveme kovariací procesů X a Y.

3.18. *Poznámka.* Všimněme si, že kovariace je symetrická bilineární forma na prostoru procesů s konečnou kvadratickou variací.

3.19. **Věta.** *Buďte* M *a* N *spojité omezené* $\mathcal{F}_t$ *martingaly. Pak proces* $\langle X, Y \rangle$ *je jediným procesem (až na modifikaci) s konečnou variací a startující v nule takový, že proces* $XY - \langle X, Y \rangle$ *je spojitým* $\mathcal{F}_t$ *martingalem.*

3.20. **Věta.** *Buď* M *spojitý omezený* $\mathcal{F}_t$ *martingal a* τ *buď* $\mathcal{F}_t$ *markovský čas. Pak*

$$\langle M^\tau \rangle = \langle M \rangle^\tau = (\langle M \rangle_{\tau \wedge t}, t \ge 0).$$

19.11.2010

3.21. **Definice.** Buď $\mathcal{F}_t$ filtrace a $\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ dělení intervalu $[0,T]$ (nezávislé na ω). Buď $(\xi_j, j = 0, 1, \ldots, n-1)$ posloupnost náhodných veličin takových, že ξ_j je $\mathcal{F}_{t_j}$ měřitelná náhodná veličina pro všechna j. Stochastický proces $G = (G_t, t \in [0,T])$ nazveme $\mathcal{F}_t$ jednoduchým stochastickým procesem (na intervalu $[0,T]$), pokud

$$G_t = \xi_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \mathbf{1}_{(t_j.t_{j+1}]}(t).$$

Přímou analogií je i definice jednoduchého procesu na intervalu $[0,\infty)$. Musí platit, že zúžení takového jednoduchého procesu na libovolný konečný interval je opět jednoduchý proces na tomto konečném intervalu.

3.22. **Značení.** Množinu $\mathcal{F}_t$ jednoduchých procesů na intervalu $[0,T]$ označíme $\mathbb{J}(\mathcal{F}_t, [0,T])$. V případě, že nebude moci dojít k omylu, vynecháme argumenty a píšeme jednoduše $\mathbb{J}$.

3.23. **Definice.** Buď $W = (W_t, t \in [0,T])$ $\mathcal{F}_t$ Wienerův proces. Buď $G \in \mathbb{J}(\mathcal{F}_t, [0,T])$. Označme pro $t \in [0,T]$, $t_k \le t < t_{k+1}$

$$\int_0^t G \,\mathrm{d}W = \sum_{j=0}^{k-1} \xi_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}) + \xi_k (W_t - W_{t_k})$$

a tento proces nazveme Itôovým stochastickým integrálem jednoduchého procesu G (na intervalu $[0,T]$).

3.24. *Poznámka.* Proces $\int G \,\mathrm{d}W = \left(\int_0^t G \,\mathrm{d}W, t \in [0,T]\right)$ je zřejmě spojitý $\mathcal{F}_t$ adaptovaný proces začínající v nule. Zobrazení $G \mapsto \int G \,\mathrm{d}W$ je lineární zobrazení na prostoru jednoduchých procesů.

3.25. *Poznámka.* Rozšíření předchozí definice na nekonečný interval $[0,\infty)$ je snadné pomocí jednoduchých procesů na intervalu $[0,\infty)$.

3.26. **Věta.** *Je-li $G \in \mathbb{J}$ a $|\xi_j| \le c_j < \infty$ pro všechna j, pak $\int G \, dW \in \mathbb{M}_2$.*

3.27. *Poznámka.* Výsledkem Itôova integrálu je martingal. Je-li G deterministický proces, není těžké ověřit, že $\int G \,\mathrm{d}W$ je gaussovský proces a jeho momenty jsou určeny následující větou.

3.28. **Věta.** *Buď W $\mathcal{F}_t$ Wienerův proces a $G \in \mathbb{J}(\mathcal{F}_t)$ a $\mathrm{E}\xi_j^2 < \infty$ pro všechna j. Pak $\int G \, dW \in \mathbb{M}_2(\mathcal{F}_t)$ a platí*

$$\mathrm{E} \int_0^t G \, dW = 0, \quad \mathrm{E} \left(\int_0^t G \, dW \right)^2 = \mathrm{E} \int_0^t G_s^2 \, ds$$

3.29. *Poznámka.* V předešlé větě jsme narazili na důležitý vztah. Máme-li dva jednoduché procesy $G, H \in \mathbb{J}_2(\mathcal{F}_t)$, pak

$$\left\| \int_0^t G \,\mathrm{d}W - \int_0^t H \,\mathrm{d}W \right\|^2_{\mathcal{L}_2(P)} = \mathrm{E} \left(\int_0^t G \,\mathrm{d}W - \int_0^t H \,\mathrm{d}W \right)^2 = \mathrm{E} \int_0^t (G-H)^2 \,\mathrm{d}s = \|G - H\|^2_{\mathcal{L}_2(P \otimes \lambda)} .$$

Tento vztah, Itôova isometrie pro jednoduché procesy, představuje základní kámen pro konstrukci Itôova stochastického integrálu.

3.30. **Značení.** Označme

$$\mathbb{L}_2(\mathcal{F}_t) = \{X = (X_t, t \ge 0) : X \text{ je } \mathcal{F}_t \text{ progr. měřit. }, \mathrm{E} \int_0^t X^2 \,\mathrm{d}s < \infty \forall t \ge 0\}.$$

Budeme-li uvažovat pouze konečný interval $[0,T]$ použijeme někdy značení $\mathbb{L}_2(\mathcal{F}_t, [0,T])$, pokud by mohlo dojít k záměně.

Prostor jednoduchých procesů s uvedenou vlastností označíme $\mathbb{J}_2$. Není těžké si uvědomit, že se jedná o ty jednoduché procesy, pro něž $\mathrm{E}\xi_j^2 < \infty$ pro všechna j.

Samozřejmě platí $\mathbb{J}_2 \subset \mathbb{L}_2$.

3.31. **Definice.** Na prostoru $\mathbb{L}_2$ definujme metriku

$$l(X,Y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \left[1 \wedge \mathrm{E} \int_0^k (X-Y)^2 \, \mathrm{d}s \right]^{1/2}$$

a podobně na prostoru $\mathbb{L}_2([0,T])$ definujme

$$l_T = \mathrm{E} \int_0^T (X-Y)^2 \, \mathrm{d}s.$$

Podobně jako u metriky m na prostoru $\mathbb{M}_2$ i zde vynecháme index T, bude-li jasné, o jaký případ se jedná.

3.32. *Poznámka.* Ve světle předchozího vidíme, že pro jednoduché procesy $G, H \in \mathbb{J}_2$ a jejich integrály $\int G \, \mathrm{d}W, \int H \, \mathrm{d}W \in \mathbb{M}_2$ platí Itôova isometrie

$$l(G,H) = m\left(\int G \, \mathrm{d}W, \int H \, \mathrm{d}W \right).$$

Tuto isometrii přeneseme na prostor $\mathbb{L}_2$ a zkonstruujeme Itôův stochastický integrál.
Podstatná je následující věta.

3.33. **Věta.** *Prostor $\mathbb{J}_2(\mathcal{F}_t)$ je v metrice l hustým podprostorem prostoru $\mathbb{L}_2(\mathcal{F}_t)$.*

22.11.2010

3.34. **Definice.** Itôovým stochastickým integrálem $\int X \, \mathrm{d}W$ procesu $X \in \mathbb{L}_2$ rozumíme $\mathcal{L}_2$ limitu posloupnosti $\int G^n \, \mathrm{d}W$, kde $(G^n, n \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{J}_2$ je posloupnost jednoduchých procesů taková, že $l(G^n, X) \to 0$ při $n \to \infty$.

3.35. *Poznámka.* V předchozí definici nezáleží na volbě posloupnosti (G^n). Uvědomme si, že posloupnost martingalů $\left(\int G^n \, \mathrm{d}W\right)$ je cauchyovská v metrice m v prostoru $\mathbb{M}_2$ a existence limity (označované $\int X \, \mathrm{d}W$, ačkoliv musíme mít na paměti, že jednoznačnost této limity je dána až na modifikace) plyne z úplnosti prostoru $(\mathbb{M}_2, m)$.

3.36. **Věta** (Itôova isometrie v $\mathbb{L}_2$)**.** *Buď $X \in \mathbb{L}_2$. Pak platí Itôova isometrie*

$$\mathrm{E}\left(\int_0^t X \, dW \right)^2 = \mathrm{E} \int_0^t X^2 \, ds$$

pro všechna t, a podmíněná Itôova isometrie

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_s^t X \, dW \right)^2 | \mathcal{F}_s \right] = \mathrm{E}\left[\int_s^t X^2 \, ds | \mathcal{F}_s \right]$$

pro všechna $s \leq t$. Zde $\int_s^t X \, dW = \int_0^t X \, dW - \int_0^s X \, dW$.

3.37. **Věta** (Základní vlastnosti Itôova integrálu)**.** *Buďte $X, Y \in \mathbb{L}_2(\mathcal{F}_t)$ a W buď $\mathcal{F}_t$ Wienerův proces. Pak*

$$\mathrm{E} \int_0^t X \, dW = 0, \qquad \mathrm{E}\left(\int_0^t X \, dW \right)^2 = \mathrm{E} \int_0^t X^2 \, ds,$$
$$\mathrm{E}\left(\int_0^t X \, dW \int_0^t Y \, dW \right) = \mathrm{E} \int_0^t XY \, ds,$$
$$\int_0^t aX + bY \, dW = a \int_0^t X \, dW + b \int_0^t Y \, dW, \ \ s.j.$$

3.38. **Věta.** *Buď $X \in \mathbb{L}_2$. Pak proces $\left(\left(\int_0^t X \, dW \right)^2 - \int_0^t X^2 \, ds, t \geq 0 \right)$ je martingal.*

3.39. *Poznámka.* Po vyslovení obecnější Doobovy-Meyerovy věty vyjde najevo, že pro kvadratickou variaci Itôova integrálu platí
$$\langle \int X \,\mathrm{d}W \rangle_t = \int_0^t X^2 \,\mathrm{d}s.$$

29.11.2010

3.40. **Věta.** *Buď $F \in \mathbb{L}_2(\mathcal{F}_t)$ omezený proces a buď ν $\mathcal{F}_t$ markovský čas takový, že $F_s(\omega) = 0$ pro $s \le \nu(\omega)$ P-s.j. Pak*
$$X_t(\omega) = \int_0^t F_s \, dW_s(\omega) = 0 \text{ pro s.v. } \{\omega : t \le \nu(\omega)\}.$$

3.41. **Důsledek.** *Nechť $F, G \in \mathbb{L}_2(\mathcal{F}_t)$ jsou omezené a nechť ν je $\mathcal{F}_t$ markovský čas takový, že $F_s(\omega) = G_s(\omega)$ pro $s \le \nu(\omega)$ P-s.j. Pak*
$$\int_0^t F_s \, dW_s(\omega) = \int_0^t G_s \, dW_s(\omega) pro \text{ s.v. } \{\omega : t \le \nu(omega)\}.$$

3.42. **Cvičení.** Buď W Wienerův proces. Pak
$$\int_0^t W_s \,\mathrm{d}W_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t) \text{ s.j.}$$

3.12.2010

---

4. Itôův integrál a lokální martingaly

4.1. **Definice** ($\mathbb{L}_2$ lokalizace)**.** Rostoucí posloupnost $\mathcal{F}_t$ markovských časů (ν_n), $\nu_n \le T$ se nazývá $\mathbb{L}_2(\mathcal{F}_t, [0, T])$ lokalizace procesu X, pokud $X\mathbf{1}_{[t \le \nu_n]} \in \mathbb{L}_2(\mathcal{F}_t)$ a pokud $P[\bigcup(\nu_n = T)] = 1$.

Rostoucí posloupnost $\mathcal{F}_t$ markovských časů (ν_n) se nazývá $\mathbb{L}_2(\mathcal{F}_t)$ lokalizace procesu X, pokud $X\mathbf{1}_{[t \le \nu_n]} \in \mathbb{L}_2(\mathcal{F}_t)$ a pokud $P[\nu_n \to \infty] = 1$.

4.2. **Značení.** Stejně jako dříve i nyní budeme vynechávat symbol filtrace, případně časového intervalu, bude-li zřejmé, o jaký typ lokalizace se jedná.

4.3. **Značení.** Označme
$$\mathbb{P}_2(\mathcal{F}_t, [0, T)) = \Big\{X : X \ \mathcal{F}_t \text{ progresivně měřitelný}, \int_0^t X^2 \,\mathrm{d}s < \infty \text{ s.j. pro } s \in [0, T]\Big\}.$$

Podobně lze zavést $\mathbb{P}_2(\mathcal{F}_t, [0, \infty))$. Značení $\mathbb{P}_2$ se řídí stejnými úmluvami jako značení $\mathbb{L}_2$.

4.4. **Lemma.** *Pro $X \in \mathbb{P}_2(\mathcal{F}_t, [0, T])$ definujme*
$$\tau_n = \inf\{s : \int_0^s X_u^2 \, du \ge n \text{ nebo } s \ge T\}.$$
Pak (τ_n) je $\mathbb{L}_2$ lokalizací procesu X.

4.5. **Lemma.** *Buď $X \in \mathbb{P}_2$ a buď (ν_n) $\mathbb{L}_2$ lokalizační posloupnost tohoto procesu. Je-li*
$$M_t^n = \int_0^t X_u \mathbf{1}_{[u \le \nu_n]} \, dW_u$$
stochastickým integrálem ($\mathbb{L}_2$) procesu $X_u \mathbf{1}_{[u \le \nu_n]}$, pak pro každé t a $n \ge m$ platí
$$M_t^n = M_t^m \text{ pro s.v. } \omega \in \{\omega : t \le \nu_n(\omega)\}.$$

4.6. **Lemma.** *Existuje spojitý proces $Z = (Z_t, t \in [0, T])$ takový, že*
$$P[Z_t = \lim_{n \to \infty} M_t^n] = 1 \text{ pro všechna } t \in [0, T],$$
kde $M_t^n = \int_0^t X_u \mathbf{1}_{[u \le \nu_n]} \, dW_u$.

4.7. **Lemma.** *Nechť* (ν_n) *a* (τ_n) *jsou* $\mathbb{L}_2$ *lokalizační posloupnosti pro* $X \in \mathbb{P}_2$.*Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t X_u \mathbf{1}_{[u\le\nu_n]}\, dW_u = \lim_{n\to\infty} \int_0^t X_u \mathbf{1}_{[u\le\tau_n]}\, dW_u$$

s pravděpodobností 1 pro všechna $t \in [0, T]$.

6.12.2010
