Písemka 28. ledna 2019

Každý příklad na **samostatný papír**, každý odevzdávaný papír podepište.

Příklad 1 (7 bodů)**.** Jaromír opakovaně zkouší porazit počítač v šachu. Pokud Jaromír zvítězí, získá 10 bodů, jinak ztrácí 2 body. Jaromír zvítězí s pravděpodobností 1/4.

(a) Kolik her bude Jaromír v průměru čekat na svou první výhru?

(b) Jestliže má Jaromír na začátku 6 bodů, s jakou pravděpodobností bude nejpozději po pěti kolech na nule?

(c) Jaké je rozdělení Jaromírova počtu bodů po pěti hrách, začíná-li na nule? (Záporné body jsou přípustné)

(Pro část (a) použijte faktu, že pro $p \in (0,1)$ platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \sum_{k=0}^{\infty} p^k.$$

Příklad 2 (5 bodů)**.** (a) Definujte sdruženou distribuční funkci náhodného vektoru (X, Y).

(b) Napište, jak určíme distribuční funkci složky X náhodného vektoru (X, Y).

(c) Jak z distribuční funkce poznáme nezávislost X a Y? Uveďte další kritéria nezávislosti náhodných veličin.

Příklad 3 (7 bodů)**.** Náhodná veličina X určuje počet úspěchů ve dvaceti nezávislých pokusech s neznámou pravděpodobností úspěchu p v každém pokusu.

(a) Odhadněte p na základě *jediné realizace* náhodné veličiny X. (Uvědomte si, co náhodná veličina X ve skutečnosti reprezentuje).

(b) Navrhněte alespoň dva odhady rozptylu X.

(c) Jestliže bylo úspěchů 9, spočítejte tyto odhady (jde-li to).

Příklad 4 (6 bodů)**.** Lze předpokládat, že doba mezi dvěma událostmi má exponenciální rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Jaký je bodový odhad střední doby mezi událostmi?

(b) Odvoďte asymptotický intervalový odhad pro střední dobu mezi událostmi s hladinou spolehlivosti $0,95$.

(c) Spočítejte tento intervalový odhad, pokud při 100 měřeních dostanete průměrnou dobu mezi událostmi 12.

(Použijte vhodné odhady a přibližné metody založené na limitních větách. Hodnoty distribuční funkce normálního rozdělení použijte případně z tabulek. Můžete také použít vzorec $\int_0^\infty x^k \exp(-x)\mathrm{d}x = k!$ pro k přirozené.)

Příklad 5 (6 bodů)**.** Definujte konvergenci v pravděpodobnosti.

(a) Zformulujte zákon velkých čísel a vysvětlete, co říká.

(b) Předpokládejte, že máte k dispozici nezávislý náhodný výběr $X_1, X_2, \ldots, X_n$ z rozdělení se střední hodnotou $\mathsf{E}X$ a s konečným rozptylem. Za jaké postačující podmínky je $f(\bar{X}_n)$ konzistentním odhadem $f(\mathsf{E}X)$?

Příklad 6 (5 bodů)**.** Hoďte dvoukorunou a korunou. Pokud padne líc, počítejte s hodnotou mince. V případě rubu započítejte minci jako nulu. Označte (X, Y) náhodný vektor, kde X je součet výsledku na mincích a Y je rozdíl mezi výsledkem na dvoukoruně a koruně.

(a) Určete sdružené a marginální rozdělení (X, Y). Jsou X a Y nezávislé?

(b) Určete korelaci X a Y.

Vybrané hodnoty distribuční a kvantilové funkce normovaného normálního rozdělení:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$\Phi(x)$	0.5000	0.6915	0.8413	0.9332	0.9772	0.9938	0.9987
x	0.01	0.05	0.10	0.50	0.90	0.95	0.99
$\Phi^{-1}(x)$	-2.3263	-1.6449	-1.2816	0	1.2816	1.6449	2.3263

Poznámky: Za každý nehvězdičkovaný příklad lze získat určený počet bodů, celkem 36. K úspěšnému napsání písemky je zapotřebí získat alespoň **20 bodů**. Příklady s hvězdičkou jsou bonusové a přispívají ke zlepšení známky.

Ne vždy musí být výsledek jednoduše vyjádřitelný, pokud dostanete například řadu, s níž si nedokážete poradit, nemusí jít o chybu, ale o správný výsledek.