Písemka 12. února 2018

Každý příklad na **samostatný papír**, každý odevzdávaný papír podepište.

Příklad 1 (7 bodů). Martina si hodí pravidelnou kostkou. Podle výsledku K si poté vezme určitý počet M symetrických mincí: $M = 1$ pokud $K \leq 3$, $M = 2$ pokud $K \in \{4, 5\}$ a $M = 3$ pokud $K = 6$.

(a) Martina hodila M mincemi a sleduje, kolik líců jí padlo. Pomožte jí určit rozdělení počtu líců na mincích.

(b) Martina sdělí Ondřejovi, že hodila jeden líc. Pak se zeptá Ondřeje, zda si s ní zahraje tuto hru: pokud Ondřej správně určí počet mincí, kterými Martina hodila, dostane od ní 100 Kč. Jinak musí Ondřej zaplatit 100 Kč Martině. Rozmyslela si Martina tuto hru dobře?

(c) Určete rozptyl počtu líců v této hře. Určete rozptyl součtu líců a rubů v této hře.

(d)* Po prvním hodu si Martina vezme tolik mincí, kolik jí padlo líců a opět hodí. Určete rozdělení počtu líců po druhém hodu. Nemá-li žádnou kostku, kterou by hodila, pak je počet líců nula a hra skončí. Mohla by Martina takto házet do nekonečna?

Příklad 2 (7 bodů). (a) Vyslovte větu o pravděpodobnosti sjednocení (princip inkluze a exkluze).

(b) Dokažte tuto větu.

(c) V misce je *nevyčerpatelné* množství bonbonů osmi příchutí. Každý z šestnácti zákazníků si náhodně vybere jeden bonbon. S jakou pravděpodobností je každá příchuť vybrána alespoň jedním zákazníkem?

(d)* Dá se něco říci o případě, kdy máme n příchutí, $2n$ zákazníků a $n \to \infty$?

Příklad 3 (6 bodů). Obchodník s lidsku závislostí vymyslí novou loterii. Každý, kdo si koupí los za 100 Kč může s pravděpodobností $9 \cdot 10^{-4}$ vyhrát sto tisíc korun.

(a) Koupí-li si los alespoň sto tisíc nešťastníků, s jakou pravděpodobností bude zisk obchodníka nejméně 750 000 Kč?

(b) Kolik losů by měl obchodník prodat, aby s pravděpodobností alespoň 0,8 byl jeho zisk vyšší než dva miliony korun?

Použijte přibližné metody a zdůvodněte!!! svůj postup (ověřte podmínky použitých vět a tvrzení).

Příklad 4 (5 bodů). Nezávislé náhodné veličiny X a Y udávají dobu výpočtu. Předpokládejme, že obě mají stejné rozdělení s hustotou

$$f(x) = 4x \exp(-2x) \text{ pro } x \geq 0.$$

(a) Určete rozdělení doby výpočtu $X + Y$.

(b) Spočítejte střední hodnotu $X + Y$.

(c) Spočítejte korelaci X a $X + Y$.

Příklad 5 (6 bodů). Definujte kovarianci a korelaci.

(a) Vysvětlete, proč kovariance není vhodná *míra* závislosti X a Y, zatímco korelace ano.

(b) Napište co nejvíce vlastností korelace a kovariance. Jaký je vztah korelace a nezávislosti X a Y?

(c) Nechť X a Y jsou stejně rozdělené náhodné veličiny, *ne nutně nezávislé*. Určete $\operatorname{corr}(X+Y, X-Y)$. Co z tohoto plyne?

Příklad 6 (5 bodů). Při přenosu signálu (kódování 0-1) se každý znak změní s pravděpodobností p na opačný nezávisle na ostatních znacích. Přenášíme n znaků a označme S_n počet znaků, které se přenosem změní.

(a) Buď n pevné. Odhadněte pravděpodobnost, se kterou S_n poděleno očekávaným počtem změněných znaků $\mathsf{E}S_n$ překročí $1 + \delta$ pro nějaké kladné pevné δ.

(b) Pro n jdoucí do nekonečna určete, jak rychle může δ_n konvergovat k nule, aby pravděpodobnost z předchozího bodu konvergovala k nule.

Uvědomte si, že jde v podstatě o bernoulliovské pokusy, tedy o speciální případ poissonovských pokusů.

Poznámky: K úspěšnému napsání písemky je zapotřebí získat alespoň **20 bodů** z celkových 36. Příklady s hvězdičkou jsou bonusové a přispívají ke zlepšení známky.

Vybrané hodnoty distribuční a kvantilové funkce normovaného normálního rozdělení:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$\Phi(x)$	0.5000	0.6915	0.8413	0.9332	0.9772	0.9938	0.9987
x	0.05	0.10	0.50	0.90	0.95	0.975	0.99
$\Phi^{-1}(x)$	-1.6449	-1.2816	0	1.2816	1.6449	1.96	2.3263