NMAI059 Pravděpodobnost a statistika
Zadání cvičení a doplňkových příkladů.
22. listopadu 2017

Jak používat tuto příručku. Jde o postupně vznikající text, který bude obsahovat klíčové příklady k procvičení probírané látky. Snahou je, aby cvičení co nejlépe navazovalo na přednášku, to však vzhledem k rozvrhu a státním svátkům není úplně možné.

Zadání cvičení na jednotlivé týdny není myšleno tak, že se během hodiny proberou všechny příklady. V učebně bude počítána jen část připravených úloh, ostatní slouží k samostatné práci, k přípravě na zkoušku, k diskusi se spolužáky …

1. Týden 2.10–6.10.

Cvičení 1.1. Postupně počítejte a proveďte pokusy:

(1) Jaká je pravděpodobnost, že na šestistěnné kostce padne šestka?
(2) Hoďte šestistěnnou kostkou. Kolika z vás padla šestka? Je to očekávatelný výsledek?
(3) Hoďte kostkou desetkrát. Kolik šestek vám dohromady padlo nyní?
(4) Zopakujte totéž s rozlišením na sudá/lichá čísla.
(5) Zopakujte totéž s rozdělením na čísla dělitelná/nedělitelná třemi.
(6) Který výsledek je nejblíž očekávanému?
(7) Opakujte kolikrát chcete a přemýšlejte o výsledcích.

Cvičení 1.2. Opět házejte šestistěnnou kostkou. Nyní však zaznamenejte pořadí pokusu, ve kterém vám poprvé padl daný jev.

(1) V kolikátém pokusu vám poprvé padla šestka? Jaký je nejvyšší dosažený výsledek v učebně?
(2) Opakujte tento pokus několikrát a zaznamenávejte výsledky. Kolikrát jste hodili šestku na první pokus, kolikrát na druhý, na třetí atd.
(3) Zejména se dívejte na nejvyšší a nejnižší zaznamenané hodnoty.
(4) Jsou dosažené hodnoty v souladu s vaším očekáváním?
(5) Opakujte s čekáním na první sudé číslo, na první číslo dělitelné třemi, na první číslo větší než tři a podobně. Sledujte rozdíly v pokusech.
(6) Jaké jsou teoretické pravděpodobnosti uvažovaných jevů?

Zkuste si najít generátor náhodných čísel a pokusy provádět s tímto generátorem. Jsou výsledky v souladu s výsledky dosaženými reálnými pokusy?

Cvičení 1.3. Vymyslete vhodný generátor náhodné posloupnosti nul a jedniček pomocí šestistěnné kostky.

(1) Zkuste si vymyslet náhodnou posloupnost nul a jedniček o délce 100.
(2) Nagenerujte si náhodnou posloupnost nul a jedniček pomocí vámi vymyšleného generátoru.
(3) Použijte nějaký generátor náhodných čísel dostupný v počítači (telefonu, …).
(4) Která posloupnost vám přijde „náhodnější“ a proč?

Cvičení 1.4. Zopakujte si základní poučky o kombinacích, permutacích a výpočtech diskrétní pravděpodobnosti, které jste již probírali v předchozích přednáškách.

2. Týdny 9.10–20.10.

2.1. **Klasická pravděpodobnost.**

Cvičení 2.1. Házíme čtyřmi hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že

(1) padnou čtyři různá čísla,
(2) padnou pouze lichá čísla,
(3) součet čísel na všech kostkách dohromady bude roven 6
(4) součet čísel bude větší než 5?

Cvičení 2.2. S jakou pravděpodobností padne alespoň jedna šestka, házíme-li

(1) dvěma kostkami,
(2) n kostkami.

Cvičení 2.3. Uvažujme n různých dopisů a n různých obálek (již s nadepsanou adresou). Zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.

(1) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?
(2) S jakou pravděpodobností není žádný dopis ve správné obálce? Spočtěte limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$.

V následujícím se objevuje pojem rozlišitelnost a nerozlišitelnost. To může vést k různým dohadům, co to znamená. Představme si dvě kuličky a dvě přihrádky, každá kulička je náhodně přiřazena do jedné přihrádky. V tom případě máme tři různé stavy: $(2, 0), (1, 1), (0, 2)$. V rozlišitelném případě jsou pravděpodobnosti těchto stavů $1/4, 1/2, 1/4$, protože druhý stav ve skutečnosti zahrnuje dva stavy—podle toho která kulička je v které přihrádce. V nerozlišitelném případě jsou všechny stavy rovnocenné a proto jejich pravděpodobnost je vždy $1/3$. Jde tedy hlavně o model náhody, který zde hraje roli. Poznamenejme, že v běžných aplikacích máme obvykle rozlišitelné kuličky.

Cvičení 2.4 (Maxwellovo-Boltzmannovo schéma)*.* Mějme r **rozlišitelných** předmětů a n přihrádek. Předměty náhodně rozmístíme do přihrádek, přičemž všechna rozmístění jsou stejně pravděpodobná. Určete

(1) pravděpodobnost, že daná přihrádka obsahuje právě k předmětů,
(Návod: Uvažujte uspořádané r-tice z čísel $1 \dots n$ zaznamenávající, v které přihrádce daný předmět je.)
(2) limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$,
(3) pravděpodobnost, že žádná přihrádka není prázdná.
(Návod: Je jednodušší spočítat pravděpodobnost jevu opačného.)

Cvičení 2.5 (Boseovo-Einsteinovo schéma)*.* Mějme r **nerozlišitelných** předmětů a n přihrádek. Předměty náhodně rozmístíme do přihrádek, přičemž všechna rozmístění jsou stejně pravděpodobná. Určete

(1) pravděpodobnost, že daná přihrádka obsahuje právě k předmětů,
(Návod: Uvažujte vhodné „grafické“ znázornění.)
(2) limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$,
(3) pravděpodobnost, že žádná přihrádka není prázdná.
(Návod: Počítejte přímo pravděpodobnost tohoto jevu a opět použijte vhodné “grafické” znázornění.)

Cvičení 2.6.
Do vlaku s 10 vagóny nastoupilo 16 cestujících, kteří si vagón zvolili náhodně. Určete pravděpodobnost, že do každého vagónu nastoupil alespoň jeden cestující.
(Návod: Hodí se jedno z výše uvedených schémat.)

2.2. **Podmiňování.**

Cvičení 2.7. Ve hře na pět kol jsou následující pravidla: První kolo vyhrajete i prohrajete se stejnou pravděpodobností (1/2). V každém dalším kole se pravděpodobnost výhry změní. Pokud jste předchozí kolo vyhráli, zvýší se oproti předchozímu kolu o $1/10$. Pokud jste předchozí kolo prohráli, sníží se oproti předchozímu kolu o $1/10$.

(1) S jakou pravděpodobností vyhrajete alespoň tři kola?
(2) S jako pravděpodobností bude pravděpodobnost výhry v pátém kole $0,7$?
(3) S jakou pravděpodobností jste vyhráli ve druhém kole, jestliže ve třetím kole je pravděpodobnost výhry $0,5$?

Cvičení 2.8. Házíme dvěma pravidelnými kostkami.

(1) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka za podmínky, že celkový součet je 8?
(2) Jsou jevy [padla šestka] a [celkový součet je 8] nezávislé?
(3) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka na 1.kostce za podmínky, že padla šestka alespoň na jedné kostce?

Cvičení 2.9. Házíme dvěma pravidelnými kostkami — modrou a zelenou. Označme jevy A=[na modré kostce padlo sudé číslo], B =[na zelené kostce padlo liché číslo], C =[součet čísel je lichý]. Jsou náhodné jevy A,B,C po dvou nezávislé? Jsou jevy A,B,C nezávislé?

Cvičení 2.10. Tenistka má v prvním podání úspěšnost 60% a v druhém podání má úspěšnost 80%.

(1) Jaká je pravděpodobnost dvojchyby?
(2) S jakou pravděpodobností udělala tenistka v prvním podání chybu, když víme, že nedošlo k dvojchybě?

Cvičení 2.11. Ve třídě je 70% chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek.

(1) Jaká je pravděpodobnost, že má náhodně vybraná osoba dlouhé vlasy?
(2) Vybraná osoba má dlouhé vlasy. Jaká je pravděpodobnost, že je to dívka?

Cvičení 2.12. Na stole leží náhodný počet mincí: pravděpodobnost, že je na stole právě k mincí je rovna $2/3^k$ pro $k = 1, 2, \dots$. Hodíme všemi mincemi najednou. Jestliže na všech mincích padl orel, pak dostaneme odměnu (a budeme mít radost).

(1) Je pravděpodobnější, že odměnu dostaneme nebo že odměnu nedostaneme?
(2) Jestliže jsme odměnu nedostali, jaká je pravděpodobnost, že na stole leželo právě n mincí?

Cvičení 2.13. V kuchyni je N talířů s buchtami. Na i-tém talíři je a_i buchet s tvarohovou náplní a b_i buchet s povidlovou náplní, což navenek bohužel nepoznáme. Proto náhodně vybereme jeden talíř a z něj jednu buchtu. Zjistíme, že je povidlová. S jakou pravděpodobností jsme zvolili k-tý talíř?

Významným modelem pro klasickou pravděpodonost je *Pólyovo urnové schéma.* Modeluje tahání různobarevných koulí z urny. Pravidla jsou následující:

(1) V urně je na začátku n koulí k různých barev, konkrétně n_i koulí barvy i.
(2) V každém tahu vytáhneme z urny jednu kouli. Pravděpodobnost vytažení každé koule je stejná.
(3) Po vytažení a zaznamenání barvy vracíme kouli do urny a s ní ještě d koulí stejé barvy. Důležité případy: pro $d = -1$ označujeme jako *tahání bez vracení*, pro $d = 0$ jako *tahání s vracením.*

Cvičení 2.14. V urně je 5 koulí bílých a 5 koulí černých. Určete pravděpodobnost vytažení bílé koule v k-tém tahu

(1) je-li $d = -1$
(2) je-li $d = 0$
(3) je-li $d = 1$.

Uvažte pro obecný počáteční počet bílých a černých koulí v urně.

Cvičení 2.15. Mějme tři urny po čtyřech koulích. V první urně jsou tři koule černé a jedna bílá, ve druhé urně jsou všechny koule bílé a ve třetí urně jsou opět tři koule černé a jedna bílá.

(1) Náhodně si vyberete jednu urnu. S jakou pravděpodobností vytáhnete bílou kouli?

(2) Náhodně si vyberete urnu a z ní vytažená koule je bílá. S jako pravděpodobností tato urna obsahuje jen bílé koule?
(3) Náhodně si vyberete urnu a z ní vytažená koule je bílá. Tu do urny nevracíte. Z jaké urny je vhodné vytáhnout kouli nyní, má-li být vytažení černé koule bylo co nejpravděpodobější?

Cvičení 2.16. V urně je jedna bílá a jedna černá koule. Provedeme n tahů, přičemž po každém tahu do urny kouli vrátíme a s ní ještě jednu kouli stejné barvy. Ukažte, že pravděpodobnost, že bílých koulí po n tazích je v urně i je stejná pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Cvičení 2.17. Uvažujte dvě symetrické mince. Zajímá nás výsledek, kdy padnou oba líce současně. Určete

(1) S jakou pravděpodobností hodíte dříve dva ruby, než dva líce?
(2) S jakou pravděpodobností hodíte dva líce nejpozději ve čtvrtém hodu?
(3) S jakou pravděpodobností jste hodili dva líce poprvé v k-tém hodu, jestliže podruhé jste dvou líců docílili v šestém hodu?

Cvičení 2.18. Cyril a Dana hrají jednoduchou hru. Pokud na kostce padne nejvýše 4, zaplatí Cyril Daně 1 dolar. Padne-li 5 nebo 6, zaplatí Dana dolar Cyrilovi. Na začátku má Cyril 2 dolary a Dana 1 dolar. Hra končí ve chvíli, kdy jeden z hráčů nemá nic.

(1) S jakou pravděpodobnost vyhraje Cyril?
(2) S jakou pravděpodobností vyhraje Cyril, pokud na začátku má Cyril 4 dolary a Dana 2 dolary?

Cvičení 2.19. Zubařka umístila v čekárně do misky *nevyčerpatelně mnoho* čokoládových bonbonů *pěti* různých příchutí. Každý z osmi zákazníků si náhodně a nezávisle na ostatních vybere jednu příchuť (*náhodně znamená, že každou příchuť si vybere se stejnou pravděpodobností*).

(1) S jakou pravděpodobností byla každá příchuť vybrána alespoň jedním zákazníkem?
(2) Jaká je pravděpodobnost, že se všichni zákazníci shodli na stejné příchuti?
(3) S jakou pravděpodobností je každá příchuť vybrána alespoň jedním zákazníkem, je-li příchutí c a zákazníků z?
(4) Jaká je pravděpodobnost, že bylo vybráno právě k příchutí, kde $k = 1, \ldots, 5$ ($c = 5$ a $z = 8$)?

(*Ve vhodnou chvíli je šikovné použít* $P(A) = 1 - P(A^C)$.)

2.3. **Pár problémových příkladů.**

Cvičení 2.20. Nechť A a B jsou nezávislé jevy. Ukažte, že i A^C a B^C jsou nezávislé.

Zobecněte pro libovolný počet jevů ve smyslu: jsou-li $A_1, \ldots A_n$ nezávislé, pak i $B_1, \ldots, B_n$ jsou nezávislé, kde B_i je buď A_i, nebo A_i^C.

Cvičení 2.21. Buďte A a B náhodné jevy takové, že $\mathrm{P}(A) > 0, \mathrm{P}(B) > 0$. Dokažte či vyvraťte:

(1) A a B jsou nezávislé $\Rightarrow \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$.
(2) $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A) \Rightarrow A$ a B jsou nezávislé.
(3) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A$ a B jsou nezávislé.
(4) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A$ a B jsou nezávislé.
(5) A a B jsou nezávislé $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$.
(6) A a B jsou nezávislé $\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.
(7) $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A|B) \Rightarrow A$ a B jsou nezávislé.
(8) $\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A|B) \Rightarrow A$ a B nejsou nezávislé.
(9) Každý jev A je nezávislý s jevem B, platí-li $\mathrm{P}(B) = 1$.
(10) Platí-li $\mathrm{P}(A) = 0$, pak A je nezávislý s každým jevem B.

3. Týden 23.10–27.10.

3.1. **Náhodné veličiny, vektory a jejich rozdělení.**

Cvičení 3.1. V urně je umístěno b míčků bílých, m modrých a c červených, $b + c + m = \ell$. Pravděpodobnost vytažení každého míče je stejná. Vytáhneme n míčků a zaznamenáváme jejich barvu. Určete rozdělení:

(1) Počtu vytažených červených míčků, taháme-li bez vracení, $n = 10$, $c = 6$, $b = 8$, $m = 6$.
(2) Počtu vytažených červených míčků, taháme-li s vracením, $n = 10$, $c = 6$, $b = 8$, $m = 6$.
(3) Počtu vytažených bílých a červených míčků (jde tedy o náhodný vektor), taháme-li bez vracení a $n = 10$, $c = 6$, $b = 8$, $m = 6$.
(4) Počtu vytažených bílých a červených míčků, taháme-li s vracením a $n = 10$, $c = 6$, $b = 8$, $m = 6$.

Dostali jste v prvních dvou případech marginální rozdělení druhých dvou? Zkuste tento pokus provést experimentálně (s využitím generátoru náhodných čísel, nebo s losy). Jak si u generátoru náhodných čísel poradíte s tahy bez vracení?

Cvičení 3.2. Doba (v hodinách) čekání na odpověď má rozdělení s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Očekáváme $n = 5$ odpovědí, přičemž doby čekání jsou nezávislé. Určete:

(1) Jaké je rozdělení počtu odpovědí přišlých do jedné hodiny?
(2) Jeké je rozdělení počtu odpovědí přišlých do dvou hodin?
(3) S jakou pravděpodobností do půl hodiny nepřijde žádná odpověď?
(4) Jaké je rozdělení doby čekání na poslední odpověď?
(5) Lze učinit nějakou limitní úvahu v bodech (3) a (4), jestliže pro počet odpovědí platí $n \to \infty$?

Cvičení 3.3. Nechť X je náhodná veličina s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(1, 6)$. Určete:

(1) Rozdělení plochy kruhu o průměru X.
(2) Rozdělení plochy čtverce o straně X.
(3) Rozdělení plochy rovnostranného trojúhelníku o straně X.
(4) Rozdělení objemu krychle o hraně X.

Zkuste uvažovat také diskrétní rovnoměrné rozdělení na množině $\{1, 2, \ldots, 6\}$. Toto můžete empiricky modelovat pomocí šestistěnné kostky. Jak se můžete lépe přiblížit pomocí kostky/kostek k rozdělení spočítanému v bodech (1)–(4)?

Cvičení 3.4. Házejte opakovaně šestistěnnou kostkou. Sestrojte empirickou distribuční funkci a porovnejte ji s teoretickou. Zdá se vám vaše kotska vyhovující, nebo nikoliv? Mění se shoda/neshoda empirické distribuční funkce a teoretické s rostoucím počtem hodů?

Cvičení 3.5. Uvažujte hod dvěma šestistěnnými kostkami a zapište výsledek K_1, K_2. Určete:

(1) Rozdělení součtu $K_1 + K_2$.
(2) Rozdělení absolutního rozdílu $|K_1 - K_2|$.
(3) Sdružené rozdělení $(K_1 + K_2, |K_1 - K_2|)$. Jsou tyto náhodné veličiny nezávislé?
(4) Proveďte experiment a sledujte, jak vypadají empirické distribuční funkce.

Cvičení 3.6. Hoďte jednou šestistěnnou kostkou a zapište si výsledek S. Poté hoďte n hracími kostkami a výsledky sečtěte do náhodné veličiny V, přičemž: $n = 1$, pokud $S \in \{1, 2, 3\}$, $n = 2$, pokud $S \in \{4, 5\}$ a $n = 3$, pokud $S = 6$. Určete:

(1) Rozdělení V součtu výsledků na kostkách (bez výsledku S, pochopitelně).
(2) Sdružené rozdělení V a S. Jsou tyto náhodné veličiny nezávislé?
(3) Pomocí experimentu pozorujte shodu/neshodu empirické distribuční funkce pro V s teoretickou. Dokážete podobně porovnat empirickou a teoreticko distribuční funkci pro dvojici (V, S)?

4. Týden 30.10–3.11.

4.1. **Sdružená a marginální rozdělení.**

Cvičení 4.1. Mějte dvě náhodné veličiny X a Y se stejným diskrétním rozdělením. Hledejte možná sdružená rozdělení:

(1) jestliže $\mathrm{P}[X = 0] = \mathrm{P}[X = 1] = 1/2$.
(2) jestliže $\mathrm{P}[X = 0] = 1 - \mathrm{P}[X = 1] = p$
(3) jestliže $\mathrm{P}[X = 0] = p_0$, $\mathrm{P}[X = 1] = p_1$, $\mathrm{P}[X = 2] = 1 - p_1 - p_2$.

Cvičení 4.2. Mějte dvě náhodné veličiny X a Y se stejným spojitým rozdělením. Hledejte možná sdružená rozdělení:

(1) jestliže X a Y mají rovnoměrné rozdělení na $[0, 1]$.
(2) jestliže X a Y mají hustotu $f(x) = 2x$ pro x na $[0, 1]$ a 0 jinde.

Kolik takových rozdělení je podle vás možné najít?

Cvičení 4.3. Uvažujte dvourozměrný diskrétní náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X, Y)$ s hustotou danou předpisem:

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6}, \boldsymbol{x} \in \{(0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}.$$

(1) Určete marginální rozdělení k tomuto sdruženému rozdělení.
(2) Ovlivní hodnota X chování Y?
(3) Změní se odpovědi na předchozí dvě otázky, je-li sdružené rozdělení dáno tabulkou

Y\X	0	1	2
0	1/36	1/18	1/12
1	1/18	1/9	1/6
2	1/12	1/6	1/4

Cvičení 4.4. Uvažujte dvourozměrný spojitý náhodný vektor $\boldsymbol{X} = (X, Y)$ s hustotou danou předpisem:

$$p(\boldsymbol{x}) = 2, \boldsymbol{x} \in \{[0, 1]^2, x + y > 1\}.$$

(1) Určete distribuční funkci k tomuto rozdělení.
(2) Určete marginální rozdělení k tomuto sdruženému rozdělení (hustotu i distribuční funkci).
(3) Ovlivní hodnota X chování Y?
(4) Změní se odpovědi na předchozí dvě otázky, pokud bude hustota dána předpisem

$$f(\boldsymbol{x}) = 4xy,\ \text{pokud}\ (x, y) \in [0, 1]^2, \quad f(\boldsymbol{x}) = 0,\ \text{jinde?}$$

5. Týden 6.11–10.11.

5.1. **Varianční matice, doplňková cvičení.**

Cvičení 5.1. Nechť $\boldsymbol{X} = (X, Y)$ má rovnoměrné rozdělení na množině A, tedy hustota je dána konstantou na množině A a nulou jinde. Určete vždy varianční matici a rozhodněte, zde X a Y jsou nezávislé.

(1) $A = \{0,1\}^2$
(2) $A = [0,1]^2$
(3) $A = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 : |x| + |y| \leq 2\}$
(4) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 2\}$
(5) $A = \{(x,y) \in \mathbb{N}_0^2 : |x| + |y| \leq 2\}$
(6) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : |x| + |y| \leq 2\}$

Cvičení 5.2. Spočítejte varianční matici obecného dvourozměrného normálního rozdělení. Určete korelaci.

Cvičení 5.3. Nechť $\boldsymbol{X} = (X, Y)$ má konečnou varianční matici.

(1) Ukažte, že náhodné veličiny $X + Y$ a $X - Y$ jsou nekorelované, nemusí však být nezávislé.
(2) Ukažte, že $X + Y$ a $X - Y$ jsou nezávislé, má-li $\boldsymbol{X}$ sdružené normální rozdělení.

Cvičení 5.4. Uvažujte náhodný vektor X s rozdělením se spojitou distribuční funkcí F.

(1) Ukažte, že náhodná veličina $Y = F(X)$ má rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0,1]$.
(2) Ukažte, že je-li F monotónní (vně množiny $\{x : F(x) = 0, \text{ nebo } F(x) = 1\}$), pak náhodná veličina $X = F^{-1}(Y)$ má rozdělení s distribuční funkcí F, má-li Y rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,1)$.
(3) Je možné dostat libovolné rozdělení (i bez předpokladu spojitosti či monotonie distribuční funkce) z rovnoměrného rozdělení?
(4) Je potřeba spojitost F k tomu, aby $F(X)$ měla rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0,1]$?

6. Týdny 13.11–24.11.

6.1. **Různé formy závislosti a kovariance.**

Cvičení 6.1. Uvažujte náhodný vektor (X, Y) s rovnoměrným rozdělením na množině M. Určete vždy korelaci $\operatorname{corr}(X, Y)$ a porovnávejte jednotlivé výsledky. Množinu M si vždy znázorněte.

(1) $M = [0, 1]^2$.
(2) $M = \{(x, y) : 0 < x < 1, -x < y < x\}$
(3) $M = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < x\}$
(4) $M = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 5x\}$
(5) $M = \{(x, y) : 0 < x < 1, x - 1 < y < x\}$
(6) $M = \{(x, y) : 0 < x < 1, 5x - 5 < y < 5x\}$
(7) $M = \{(x, y) : 0 < x < 1, x - 1 < y < 5x\}$
(8) $M = \{(x, y) : 0 < x < 1, x - 0,1 < y < x + 0,1\}$
(9) $M = \{(x, y) : 0 < x < 1, x - k < y < x + k\}$, kde $k > 0$ je nějaké dané číslo.
(10) $M = \{(x, y) : 0 < x < 1, x < y < 2x\}$
(11) $M = \{(x, y) : 0 < x < 1, x < y < 1,1x\}$
(12) $M = \{(x, y) : 0 < x < 1, x < y < (1 + k)x\}$, kde $k > 0$ je nějaké dané číslo.

Cvičení 6.2. V předchozím příkladu zkuste také spočítat korelace mezi náhodnými veličinami X^α a Y^β. Jsou tyto korelace stejné jako předtím? Věnujte se především $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$.

Cvičení 6.3. Zkuste zformulovat nějaké postačující podmínky na sdružené rozdělení náhodného vektoru (X, Y) k tomu, aby korelace $\operatorname{corr}(X, Y)$ byla nulová.

6.2. **Normální rozdělení a korelace.**

Cvičení 6.4. Uvažujte náhodný vektor (X, Y) s obecným dvourozměrným normálním rozdělením.

(1) Naučte se počítat varianční matici tohoto rozdělení.
(2) Určete transformaci (X, Y) tak, aby (X, Y) byly nekorelované. Je tato transformace jednoznačná? Jsou X a Y nezávislé?

Cvičení 6.5. Uvažujte náhodnou veličinu X s obecným normálním rozdělením.

(1) Určete korelaci X a X^2. Závisí tato korelace na střední hodnotě $\mathrm{E}X$?
(2) Uvažujte $\mathrm{E}X = 0$ Určete korelaci X^k a X^j pro celočíselné j a k. Znamená nulovost této korelace pro určité volby j a k nezávislost X^k a X^j?

7. Týden 27.11–1.12.

7.1. **Odhady momentovou metodou.**

Cvičení 7.1. Navrhněte odhad parametru momentovou metodou pro tato jednoparametrická rozdělení. Předpokládejte, že máte k dispozici náhodný výběr o rozsahu n.

(1) Bernoulliho s parametrem p.
(2) Binomické s parametry k (známé) a p (neznámé).
(3) Exponenciální s parametrem λ (pozor na dvě varianty parametrizace).
(4) Geometrické s parametrem p.
(5) Negativně binomické s parametry k (známé) a p (neznámé).
(6) Hypergeometrické s parametry m (celkový počet jedinců, známý), k (počet vybraných jedinců, známý), j (počet jedinců prvního druhu, neznámý), kde ℓ je pozorovaná hodnota počtu jedinců prvního druhu mezi k vybranými.

Jsuo navržené odhady nestranné? Uěli byste spočítat jejich rozptyl?

Cvičení 7.2. Zkuste si experiment ve skupinách. Připravte si osudí (stačí nějaký počet papírků rozdělený do několika skupin pomocí čísel). Nyní tahejte po jednom papírku (s vracením, bez vracení, jen nesmí být vytaženy všechny papírky) a odhadujte četnosti jednotlivých skupin, znáte-li celkový počet papírků v osudí. Dokázali byste také odhadnout počet různých skupin v osudí, znáte-li celkkový počet papírků a můžete-li tahat libovolně dlouho s vracením?

Cvičení 7.3. Máte odhadnout pravděpodobnost úspěchu p v Bernoulliových pokusech.

(1) Kolik musíte provést pokusů (n), aby rozptyl vašeho odhadu byl menší než předepsaná hodnota r?
(2) Lze odhadnou potřebný počet pokusů n, je-li r závislé na neznámém p? Například $r = 0,1p$, nebo $r = 0,1p^2$, nebo $r = 0,1\sqrt{p}$?
(3) Ověřte si experimentálně, zda vaše počty n pokusů jsou dostačující (musíte provést opakovaně n pokusů, provést odhad $\widehat{p}$ a z výběru zjistit výběrový rozptyl $\widehat{p}$). K experimentu můžete použít vhodné Pólyovo urnové schéma.

Cvičení 7.4. Uvažujte náhodnou veličinu X s Poissonovým rozdělením s parametrem λ. K dispozici máte náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z tohoto rozdělení.

(1) Najděte odhad λ momentovou metodou.
(2) Navrhněte odhad pravděpodobnosti $\mathrm{P}[X > 1]$. Najděte nejméně dva takové odhady.
(3) Jsou vaše navržené odhady nestranné? Dokázali byste případně vychýlený odhad opravit na nestranný?
(4) Je některý z odhadů vhodnější (a proč)?