Zkoušky z MAI054, zimní semestr 2011/2012

Obecné podmínky

Zkoušku mohou skládat pouze studenti, kteří mají předmět MAI054 zapsaný v zimním semestru 2011/2012 a jsou zařazeni do paralelky Y. Studenti zařazení do paralelek X musí ke skládání zkoušky v paralelce Y získat souhlas obou přednášejících.

Nutnou podmínkou ke skládání zkoušky je získání zápočtu. Pokud student nezískal zápočet před konáním zkoušky, může jej dostat i za úspěšné napsání písemné části, pokud bude ohodnocena alespoň 35 body.

Zkouška se skládá z písemné a ústní části, písemná část předchází ústní části. Pokud student neuspěl u písemné části, neprospěl u tohoto termínu. Pokud student uspěl u písemné části, skládá ústní zkoušku. Při druhém opravném termínu (tedy třetím termínu zkoušky) postupují k ústní zkoušce všichni studenti. Neprospěje-li student u ústní zkoušky, neprospěl u tohoto termínu.

Pokud student při ústní zkoušce neuspěje a absolvoval písemnou část s méně než 40 body, opakuje při opravném termínu písemnou i ústní část zkoušky. Pokud získal za písemnou část alespoň 40 bodů, může opakovat pouze ústní část zkoušky.

Během semestru se konají dvě dobrovolné bonifikační písemky jejichž termín bude včas zveřejněn na přednášce a v tomoto souboru. Každá z nich obsahuje tři příklady a za každý lze získat maximálně 5 bodů. Součet bodů z dobře vyřešených příkladů (tedy z příkladů, za které získal student alespoň 4 body) se započítává do hodnocení písemné části zkoušky. Maximální počet bodů za písemnou část (zkoušková písemka+body z bonifikačních písemek) je 50 bodů.

Písemná část zkoušky

Písemná část zkoušky se skládá ze čtyřech příkladů, za které lze získat celkem 50 bodů. Příklady jsou vybrány z okruhů

1) Výpočet limity posloupnosti nebo limity funkce (10 bodů)

2) Vyšetření konvergence a absolutní konvergence řady (10 bodů)

3) Vypočet derivace funkce a jednostranné derivace v problémových bodech (10 bodů)

4) Průběh funkce (20 bodů)

Písemná čast trvá 120 minut. Student může používat donesenou literaturu (učebnice, poznámky, zápisky ze cvičení), nelze používat mobilní telefony, kalkulačky ani jinou výpočetní techniku. Při písemné i ústní části zkoušky se student prokáže indexem. Student uspěje u písemné části, pokud součet bodů získaných za bonifikační písemky a za písemnou část zkoušky je alespoň 30 bodů.

Pokud student získá alespoň 27 bodů, postupuje k ústní zkoušce podmínečně v takzvané šedé zóně. V tomto případě musí student na začátku ustní zkoušky nejprve spočítat nějaké příklady a teprve poté následuje ústní zkoušení, které je přísnější než u standartní zkoušky. Z ústní zkoušky je potřeba získat alespoň 31-33 bodů, aby byl součet písemné a ústní části alespoň 60 bodů.

Vzor zadání písemky

1) Spočtěte následující limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+\sqrt{n}}-\sqrt[3]{n^3-1}\right)\sqrt{3n^3+1}.$$

2) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2+1}\right)n^{\alpha}$$

a) pro $\alpha=1$ b) pro libovolné $\alpha\in\mathbf{R}$.

3) Určete definiční obor, vypočtete derivaci a jednostranné derivace pro funkci

$$g(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$$

4) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}.$$

Ústní část zkoušky

Ústní část zkoušky se koná zpravidla následující den po části písemné. Student si vylosuje sadu čtyř otázek. Po zhruba 30 minutách na přípravu začíná zkoušení. Pokud nemá student ještě nějaké otázky vypracované, tak dostane po prozkoušení již připraveného čas na jejich dokončení. K vypracování odpovědí nelze používat jiné pomůcky než psací potřeby. Odpovědi jsou zhodnoceny a obodovány zkoušejícím.
Skladba otázek a počty bodů :

1) Klíčový pojem (neboduje se)
2) Tři definice nebo znění věty (každá otázka za 5 bodů)
3) Lehká věta a důkaz (5 bodů za znění a 10 bodů za důkaz)
4) Těžká věta a důkaz (5 bodů za znění a 15 bodů za důkaz)

Seznamy klíčových pojmů, definic, lehkých a težkých vět budou k dispozici na konci semestru. Za nezbytnou součást znalosti definic respektive vět se považuje jejich porozumění a schopnost je používat.

Vzor zadání otázek

1) Spojitost funkce v bodě zleva (0 bodů)
2) Limita posloupnosti, supremum množiny, věta o aritmetice pro limity posloupností (15 bodů)
3) Lagrangeova věta (15 bodů)
4) Zavedení exponenciální funkce (20 bodů)

Celkové hodnocení zkoušky

1) Nezbytnou podmínkou ke složení zkoušky je znalost klíčového pojmu.
2) Student složí zkoušku, pokud získá alespoň 30 bodů z písemné zkoušky, alespoň 30 bodů z ústní zkoušky a prokáže znalost klíčového pojmu.
3) K celkovému hodnocení známkou výborně je potřeba získat alespoň 90 bodů, z toho alespoň 30 bodů za písemnou a alespoň 30 bodů za ústní část.
4) K celkovému hodnocení známkou velmi dobře je potřeba získat alespoň 75 bodů, z toho alespoň 30 bodů za písemnou a alespoň 30 bodů za ústní část.

Seznam klíčových pojmů

- supremum, infimum
- limita posloupnosti (vlastní i nevlastní)
- konvergentní (divergentní) řada
- okolí včetně nevlastních bodů, jednostranná a prstencová okolí
- limita funkce včetně jednostranných ve vlastním i nevlastním bodě
- spojitost funkce v bodě (i jednostranná)
- extrémy funkce (všechny typy)
- derivace funkce v bodě
- inflexní bod
- funkce konvexní a konkávní

Definice

- zdola omezená, shora omezená nebo omezená množina
- posloupnost reálných čísel
- zdola omezená, shora omezená nebo omezená posloupnost
- neklesající, nerostoucí, rostoucí, klesající posloupnost
- vybraná posloupnost
- rozšířená reálná osa
- Bolzano-Cauchyho podmínka
- funkce jedné reálné proměnné
- neklesající, nerostoucí, rostoucí, klesající funkce
- sudá, lichá, periodická funkce
- spojitost funkce na intervalu
- prostá funkce, inverzní funkce
- obecná mocnina a^b
- n-tá derivace funkce v bodě
- ryze konvexní a ryze konkávní funkce
- asymptota funkce
- Taylorův polynom
- absolutně konvergentní řada
- částečný součet řady

Lehké věty

- o existenci infima
- Archimédova vlastnost
- hustota $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$
- jednoznačnost vlastní limity posloupnosti
- limita posloupnosti a omezenost posloupnosti
- o limitě vybrané posloupnosti
- limita a uspořádání pro posloupnosti
- o dvou strážnících
- o limitě součinu omezené a mizející posloupnosti (bez důkazu)
- limita typu $A/0$
- o limitě monotónní posloupnosti
- nutná podmínka konvergence řady
- srovnávací kritérium konvergence řad
- limitní srovnávací kritérium konvergence řad
- Cauchyovo odmocninové kritérium
- d'Alambertovo podílové kritérium (bez důkazu)
- Bolzano-Cauchyho podmínka konvergence řad
- vztah konvergence a absolutní konvergence

- o jednoznačnosti limity funkce
- limita funkce a omezenost
- aritmetika limit pro funkce
- limita funkce a uspořádání
- limita monotónní funkce (bez důkazu)
- zobrazení intervalu spojitou funkcí
- spojitost funkce a omezenost
- spojitost sinu a cosinu
- vztah derivace a spojitosti
- derivace inverzní funkce
- Fermatova věta
- Rolleova věta
- Lagrangeova věta o střední hodnotě
- derivace a limita derivace
- o vztahu derivace a monotonie
- konvexita a spojitost
- tvar asymptoty

Těžké věty

- o n-té odmocnině
- aritmetika limit pro posloupnosti
- Bolzano-Weierstrass
- Bolzano-Cauchyho podmínka pro posloupnost
- konvergence řady $1/n^\alpha$ (bez důkazu)
- Leibnitzovo kritérium
- o přerovnání absolutně konvergentní řady (bez důkazu)
- Riemann (bez důkazu)
- Heineho věta
- limita složené funkce
- Darbouxova věta
- spojitost funkce a nabývání extrémů
- o inverzní funkci
- zavedení exponenciely
- vlastnosti logaritmu
- zavedení sin a cos (bez důkazu)
- aritmetika derivací
- derivace složené funkce
- l'Hospitalovo pravidlo (bez důkazu)
- nutná podmínka pro inflexi
- postačující podmínka pro inflexi (bez důkazu)
- konvexita a jednostranné derivace
- vztah druhé derivace a konvexity
- o nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem
- Taylorova věta (bez důkazu)