I. Úvod

1.1. Výroky a metody důkazů

- Výrok je tvrzení, o kterém má smysl říci, že je pravdivé či ne.
- Vytváření nových výroků: Logické spojky & a $\vee$, Implikace $\Rightarrow$, Ekvivalence $\Leftrightarrow$, Negace $\neg$.
- Obecný kvatifikátor $\forall$ a existenční kvantifikátor $\exists$.
- Negace výroků.

Metody důkazů tvrzení:

- Přímý důkaz: $\big(A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B\big) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.
- Nepřímý důkaz: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- Důkaz sporem: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \;\&\; \neg B)$
- Matematická indukce:
  $V(1) \;\&\; \big(\forall n \in \mathbf{N};\ V(n) \Rightarrow V(n+1)\big) \Rightarrow (\forall n \in \mathbf{N},\ V(n))$

1.2. Množina reálných čísel

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že M je *omezená shora* (*omezená zdola*), jestliže existuje $a \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $x \in M$ platí $x \leq a$ $(x \geq a)$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je shora omezená. Číslo $s \in \mathbf{R}$ nazýváme *supremem* M pokud

$$(i)\ \forall x \in M : x \leq s;$$
$$(ii)\ \forall y \in \mathbf{R},\ y < s\ \exists x \in M : y < x.$$

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je zdola omezená. Číslo $i \in \mathbf{R}$ nazýváme *infimem* M pokud

$$(i)\ \forall x \in M : i \leq x;$$
$$(ii)\ \forall y \in \mathbf{R},\ i < y\ \exists x \in M : x < y.$$

Definice. Na množině $\mathbf{R}$ je dána relace $\leq$ $(\subset \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, operace sčítání $+$, operace násobení $\cdot$ a množina $\mathbf{R}$ obsahuje prvky 0 a 1 tak, že platí

$I\ (i)\ \forall x, y, z \in \mathbf{R}:\ x + (y + z) = (x + y) + z$	asociativita $+$
$(ii)\ \forall x, y \in \mathbf{R}:\ x + y = y + x$	komutativita $+$
$(iii)\ \forall x \in \mathbf{R}:\ x + 0 = x$	existence 0
$(iv)\ \forall x \in \mathbf{R}\ \exists -x \in \mathbf{R}:\ x + (-x) = 0$	existence opačného prvku $+$
$(iv)\ \forall x, y, z \in \mathbf{R}:\ x(yz) = (xy)z$	asociativita $\cdot$
$(v)\ \forall x, y \in \mathbf{R}:\ xy = yx$	komutativita $+$
$(vi)\ \forall x \in \mathbf{R}:\ x1 = x$	existence 1
$(vii)\ \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\ \exists x^{-1} \in \mathbf{R}:\ xx^{-1} = 1$	existence opačného prvku $\cdot$
$(viii)\ \forall x, y, z \in \mathbf{R}:\ (x + y)z = xz + yz$	distributivita

II (*i*) $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \& \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ slabá antisymetrie

(*ii*) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \& \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ transitivita

(*iii*) $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (x \leq y) \vee (y \leq x)$ dichotomie

(*iv*) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ sčítání a $\leq$

(*v*) $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (0 \leq x \ \& \ 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy)$ násobení a $\leq$

III Je-li $M \subset \mathbf{R}$ neprázdná shora omezená množina, pak existuje supremum M.

Konec 1. přednášky

Věta L 1 (o existenci infima)**.** *Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje* $\inf M$.

Věta L 2 (Archimedova vlastnost)**.** *Ke každému $x \in \mathbf{R}$ existuje $n \in \mathbf{N}$ tak, že $x < n$.*

Věta L 3 (hustota $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$)**.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Pak existují $q \in \mathbf{Q}$ a $r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ tak, že $q \in (a, b)$ a $r \in (a, b)$.*

Věta T 4 (o n-té odmocnině)**.** *Nechť $n \in \mathbf{N}$ a $x \in [0, \infty)$. Pak existuje právě jedno $y \in [0, \infty)$ tak, že $y^n = x$.*

II. Posloupnosti

2.1. Úvod

Definice. Jestliže ke každému $n \in \mathbf{N}$ je přiřazeno $a_n \in \mathbf{R}$, pak říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\}$ je *posloupnost* reálných čísel.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ je *omezená*, jestliže množina členů posloupnosti $\{a_n\}$ je omezená podmnožina $\mathbf{R}$. Analogicky definijeme *omezenost shora* a *omezenost zdola.*

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ je:
neklesající, jestliže $\forall n \in \mathbf{N} \ a_n \leq a_{n+1}$,
nerostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbf{N} \ a_n \geq a_{n+1}$,
klesající, jestliže $\forall n \in \mathbf{N} \ a_n > a_{n+1}$,
rostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbf{N} \ a_n < a_{n+1}$.

2.2. Vlastní limita posloupnosti

Definice. Nechť $A \in \mathbf{R}$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Řekneme, že A je *(vlastní) limitou* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \geq n_0, \ n \in \mathbf{N} \ : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme $\lim_{n \to \infty} a_n = A$.

Věta L 1 (jednoznačnost vlastní limity)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Konec 2. přednášky

Věta L 2 (o omezenosti konvergentní posloupnosti)**.** *Nechť $\{a_n\}$ má vlastní limitu. Pak je $\{a_n\}$ omezená.*

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že $b_k = a_{n_k}$.

Věta BD 3 (o limitě vybrané posloupnosti)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$ *a nechť* $\{b_k\}$ *je vybraná a* $\{a_n\}$*. Pak* $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Věta T 4 (aritmetika limit)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbf{R}$. *Pak platí*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$

(iii) *pokud* $b_n \neq 0$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$ *a* $B \neq 0$, *pak* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$.

Věta L 5 (limita a uspořádání)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbf{R}$.
(i) *Jestliže* $A < B$, *pak existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$, *že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n < b_n$.
(ii) *Jestliže existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n \geq b_n$, *pak* $A \geq B$.

Věta L 6 (o dvou strážnících)**.** *Nechť* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ *jsou posloupnosti splňující:*
(i) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0 :\ a_n \leq c_n \leq b_n$,
(ii) $\lim a_n = \lim b_n = A \in \mathbf{R}$.
Pak $\lim c_n = A$.

Věta BD 7 (o limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)**.** *Nechť* $\lim a_n = 0$ *a* $\{b_n\}$ *je omezená. Pak* $\lim a_n b_n = 0$.

2.3. Nevlastní limita posloupnosti

Definice. Řekneme, že poloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ má *(nevlastní) limitu* $+\infty$ (respektive $-\infty$), pokud :

$$\forall K \in \mathbf{R}\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbf{N} :\ a_n > K$$

$$(\forall K \in \mathbf{R}\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbf{N} :\ a_n < K).$$

Věty 1, 3, 5 a 6 platí i v případě, že uvažujeme nevlastní limity.

Definice. *Rozšířená reálná osa* je množina $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ s následujícími vlastnostmi:

Uspořádání:	$\forall a \in \mathbf{R}$	$-\infty < a < \infty$
Absolutní hodnota:		$\lvert +\infty\rvert = \lvert -\infty\rvert = +\infty$
Sčítání:	$\forall a \in \mathbf{R}^* \setminus \{+\infty\}$	$-\infty + a = -\infty$
	$\forall a \in \mathbf{R}^* \setminus \{-\infty\}$	$+\infty + a = +\infty$
Násobení:	$\forall a \in \mathbf{R}^*,\ a > 0$	$a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
	$\forall a \in \mathbf{R}^*,\ a < 0$	$a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$
Dělení:	$\forall a \in \mathbf{R}$	$\dfrac{a}{\pm\infty} = 0.$

Výrazy $-\infty + \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\text{cokoli}}{0}$ nejsou definovány.

Konec 3. přednášky

Věta BD 4 (aritmetika limit podruhé)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}^*$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbf{R}^*$. *Pak platí*

(*i*) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován*

(*ii*) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$, *pokud je výraz* AB *definován*

(*iii*) *pokud* $b_n \neq 0$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$ *a* $B \neq 0$, *pak* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$,

pokud je výraz $\dfrac{A}{B}$ *definován.*

Věta L 8 (limita typu $A/0$)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}^*$, $A > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$, *že pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ *platí* $b_n > 0$. *Pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

2.4. Monotónní posloupnosti

Věta L 9 (o limitě monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost má limitu.*

Věta T 10 (Bolzano-Weirstrass)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Věta T 11 (BC podmínka)**.** *Posloupnost* $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *má vlastní limitu, právě když splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku, tedy*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall m, n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0,\ m \geq n_0 : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Konec 4. přednášky

III. Řady

3.1. Úvod

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je posloupnost. Číslo $s_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ nazveme *m-tým částečným součtem* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Součtem* nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m\in\mathbf{N}}$, pokud tato limita existuje. Je-li tato limita konečná, pak řekneme, že řada je *konvergentní.* Je-li tato limita nekonečná nebo neexistuje, pak řekneme, že řada je *divergentní.* Tuto limitu budeme značit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta L 1 (nutná podmínka konvergence)**.** *Jestliže je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta BD 2. (*i*) *Nechť* $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, *pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n \text{ konverguje }.$$

(*ii*) *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ konverguje.}$$

3.2. Řady s nezápornými členy

Věta L 3 (srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *tak, že pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ *platí* $a_n \leq b_n$*. Pak*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje.}$$

Věta L 4 (limitní srovnávací kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in \mathbf{R}^*$*. Pak*

$$(i)\ \text{Jestliže } K \in (0,\infty),\ \text{pak } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(ii)\ \text{Jestliže } K = 0,\ \text{pak } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(ii)\ \text{Jestliže } K = \infty,\ \text{pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje.}$$

Věta L 5 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy.*

$$(i)\ \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0 :\ \sqrt[n]{a_n} < q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje,}$$

Věta BD 6 (d'Alambertovo podílové kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

$$(i)\ \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0 :\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(iii)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

Konec 5. přednášky

Věta BD 7 (konvergence řady $1/n^{\alpha}$)**.** *Nechť* $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ konverguje } \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

3.3. Neabsolutní konvergence řad

Definice. Nechť pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konveguje. Pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*

Věta L 8 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro konvergenci řad)**.** *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě tehdy, když je splněna následující podmínka*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall m, n \in \mathbf{N}, \ m \geq n_0, \ n \geq n_0 : \quad \Big| \sum_{j=n}^{m} a_j \Big| < \varepsilon.$$

Věta L 9 (vztah konvergence a absolutní konvergence)**.** *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Věta T 10 (Leibnitzovo kritérium)**.** *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \ \textit{konverguje} \ \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

3.4. Přerovnávání řad

Definice. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ je bijekce. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ nazýváme *přerovnáním řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta BD 11 (o přerovnání absolutně konvergentní řady)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolutně konvergentní řada a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ *je její přerovnání. Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ *je absolutně konvergentní řada a má stejný součet jako* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta BD 12 (Riemann)**.** *Neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat k libovolnému součtu z* $\mathbf{R}^*$. *Neboli: Nechť pro konvergentní řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *platí* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$. *Pak pro libovolné* $s \in \mathbf{R}^*$ *existuje bijekce* $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *taková, že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = s.$$

IV. Funkce jedné reálné proměnné

4.1. Základní definice

Definice. *Funkcí jedné reálné proměnné* rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbf{R}$, kde $M \subset \mathbf{R}$.

Definice. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$, je

rostoucí, jestliže $\quad \forall x, y \in M, \ x < y : \quad f(x) < f(y),$

klesající, jestliže $\quad \forall x, y \in M, \ x < y : \quad f(x) > f(y),$

nerostoucí, jestliže $\quad \forall x, y \in M, \ x < y : \quad f(x) \geq f(y),$

neklesající, jestliže $\quad \forall x, y \in M, \ x < y : \quad f(x) \leq f(y).$

Definice. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$, je

sudá, jestliže $\quad \forall x \in M : \quad (-x \in M) \& (f(x) = f(-x)),$

lichá, jestliže $\quad \forall x \in M : \quad (-x \in M) \& (f(x) = -f(-x)),$

periodická, jestliže $\quad \exists p > 0, \ \forall x \in M : \quad (x + p \in M) \& (x - p \in M) \& (f(x) = f(x + p)).$

Definice. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$, je *omezená* (*omezená shora, omezená zdola), jestliže* $f(M)$ *je omezená (shora omezená, zdola omezená) podmnožina* $\mathbf{R}$.

Konec 6. přednášky

Definice. Nechť $\delta > 0$ a $a \in \mathbf{R}$. *Prstencové okolí* bodu je

$$P(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}; \quad P(+\infty,\delta) = (\tfrac{1}{\delta}, +\infty); \quad P(-\infty,\delta) = (-\infty, -\tfrac{1}{\delta}).$$

Pravé a levé prstencové okolí bodu a je

$$P_+(a,\delta) = (a, a+\delta); \quad P_-(a,\delta) = (a-\delta, a).$$

Okolí bodu je

$$U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta); \quad U(+\infty,\delta) = (\tfrac{1}{\delta}, +\infty); \quad U(-\infty,\delta) = (-\infty, -\tfrac{1}{\delta}).$$

Pravé a levé okolí bodu a je

$$U_+(a,\delta) = [a, a+\delta); \quad U_-(a,\delta) = (a-\delta, a].$$

Definice. Nechť $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbf{R}^*$ *limitu* rovnou $A \in \mathbf{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in P(a,\delta): \quad f(x) \in U(A,\varepsilon).$$

Značíme $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Definice. Nechť $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbf{R}^*$ *limitu zprava (zleva)* rovnou $A \in \mathbf{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in P_+(a,\delta): \quad f(x) \in U(A,\varepsilon)$$

$$\big(\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in P_-(a,\delta): \quad f(x) \in U(A,\varepsilon)\big).$$

Značíme $\lim_{x\to a+} f(x) = A$ ($\lim_{x\to a-} f(x) = A$).

Definice. Nechť $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$, $a \in M$. Řekneme, že f je v a *spojitá (spojitá zprava, spojitá zleva)*, jestliže

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \; (\lim_{x\to a+} f(x) = f(a), \; \lim_{x\to a-} f(x) = f(a)).$$

4.2. Věty o limitách

Věta T 1 (Heine)**.** *Nechť* $A \in \mathbf{R}^*$, $f : M \to \mathbf{R}$ *a* f *je definována na prstencovém okolí bodu* $a \in \mathbf{R}^*$. *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(*i*) $\lim_{x\to a} f(x) = A$

(*ii*) *pro každou posloupnost* $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *takovou, že*

$$x_n \in M, \; \forall n \in \mathbf{N} \; x_n \neq a, \; \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ platí } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Věta L 2 (o jednoznačnosti limity)**.** *Funkce* f *má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

Věta L 3 (limita a omezenost)**.** *Nechť* f *má vlastní limitu v bodě* $a \in \mathbf{R}^*$. *Pak existuje* $\delta > 0$ *tak, že* f *je na* $P(a,\delta)$ *omezená.*

Věta L 4 (o aritmetice limit)**.** *Nechť* $a \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$ *a* $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbf{R}^*$. *Pak platí*

$$(i)\ \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B, \ \textit{pokud je výraz } A+B \textit{ definován}$$
$$(ii)\ \lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB, \ \textit{pokud je výraz } AB \textit{ definován}$$
$$(iii)\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \ \textit{pokud je výraz } \frac{A}{B} \textit{ definován.}$$

Důsledek Věty 4: Nechť jsou funkce f a g spojité v bodě $a \in \mathbf{R}$. Pak jsou funkce $f+g$, $f \cdot g$ spojité v a. Pokud je navíc $g(a) \neq 0$, pak je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v a.

Věta L 5 (limita a uspořádání)**.** *Nechť* $a \in \mathbf{R}^*$.
(i) *Nechť* $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$. *Pak existuje prstencové okolí* $P(a,\delta)$ *tak, že*

$$\forall x \in P(a,\delta): \quad f(x) > g(x).$$

(ii) *Nechť existuje prstencové okolí bodu* $P(a,\delta)$ *tak, že*

$$\forall x \in P(a,\delta): \quad f(x) \le g(x).$$

Nechť existují $\lim_{x\to a} f(x)$ *a* $\lim_{x\to a} g(x)$. *Potom platí*

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

(iii) *Nechť na nějakém prstencovém okolí* $P(a,\delta)$ *platí* $f(x) \le h(x) \le g(x)$. *Nechť* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. *Pak existuje* $\lim_{x\to a} h(x)$ *a všechny tři limity se rovnají.*

Konec 7. přednášky

Věta T 6 (limita složené funkce)**.** *Nechť funkce* f *a* g *splňují:*

$$(i)\ \lim_{x\to c} g(x) = A,$$
$$(ii)\ \lim_{y\to A} f(y) = B.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

$$(P1)\ f \textit{ je spojitá v } A,$$
$$(P2)\ \exists \eta > 0\ \forall x \in P(c,\eta):\ g(x) \neq A,$$

pak platí $\lim_{x\to c} f(g(x)) = B$.

Věta BD 7 (limita monotónní funkce)**.** *Nechť* f *je monotónní na intervalu* (a,b), $a,b \in \mathbf{R}^*$. *Potom existuje* $\lim_{x\to a+} f(x)$ *i* $\lim_{x\to b-} f(x)$.

4.3. Funkce spojité na intervalu

Definice. Vnitřními body intervalu J rozumíme ty body z J, které nejsou krajními.

Definice. Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f je spojitá na J, jestliže je spojitá ve všech vnitřních bodech J. Je-li počáteční bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zprava v tomto bodě a je-li koncový bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zleva v tomto bodě.

Věta T 8 (Darboux)**.** *Nechť* f *je spojitá na intervalu* $[a,b]$ *a platí* $f(a) < f(b)$. *Pak pro každé* $y \in (f(a), f(b))$ *existuje* $x \in (a,b)$ *tak, že* $f(x) = y$.

Konec 8. přednášky

Věta L 9 (zobrazení intervalu spojitou funkcí). *Nechť J je interval. Nechť funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je spojitá. Pak je $f(J)$ interval.*

Definice. Nechť $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $a \in M$

$$\begin{array}{ll} \textit{maxima} \text{ na } M \text{ jestliže } \forall x \in M : & f(x) \leq f(a), \\ \textit{minima} \text{ na } M \text{ jestliže } \forall x \in M : & f(x) \geq f(a), \\ \textit{ostrého maxima} \text{ na } M \text{ jestliže } \forall x \in M,\ x \neq a : & f(x) < f(a), \\ \textit{ostrého minima} \text{ na } M \text{ jestliže } \forall x \in M,\ x \neq a : & f(x) > f(a), \end{array}$$

lokálního maxima (ostrého lokálního maxima, ostrého lokálního minima, lokálního minima), jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že f nabývá na $M \cap U(a, \delta)$ svého maxima (ostrého maxima, ostrého minima, minima).

Věta T 10 (spojitost funkce a nabývaní extrémů). *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Pak funkce f nabýva na $[a, b]$ svého maxima a minima.*

Věta L 11 (spojitost funkce a omezenost). *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Pak je funkce f na $[a, b]$ omezená.*

Definice. Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f je prostá na J, jestliže pro všechna $x, y \in J$ platí $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Pro prostou funkci $f : J \to \mathbf{R}$ definujeme funkci $f^{-1} : f(J) \to \mathbf{R}$ předpisem $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Věta T 12 (o inverzní funkci). *Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom je funkce f^{-1} spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*

4.4. Elementární funkce

Věta T 13 (zavedení exponenciely). *Existuje funkce* exp : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *splňující:*

$$\begin{aligned} &a)\ \exp(x) \textit{ je rostoucí na } \mathbf{R}, \\ &b)\ \forall x, y \in \mathbf{R} \quad \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y), \\ &c)\ \exp(0) = 1, \\ &d)\ \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1. \end{aligned}$$

Definice. Funkci inverzní k exponenciele exp je *logaritmus* log.

Věta T 14 (vlastnosti logaritmu). *Funkce* log *splňuje:*

$$\begin{aligned} &a)\ \log : (0, \infty) \to \mathbf{R} \textit{ je spojitá rostoucí funkce}, \\ &b)\ \forall x, y > 0 \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y), \\ &c)\ \lim_{x \to 1} \frac{\log(x)}{x - 1} = 1. \end{aligned}$$

Definice. Nechť $a > 0$ a $b \in \mathbf{R}$. Pak definujeme $a^b = \exp(b \log(a))$. Je-li $b > 0$ pak definujeme $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$.

Konec 9. přednášky

Věta BD 15 (zavedení sinu a cosinu)**.** *Existují funkce* sin : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *a* cos : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *splňující:*

a) $\forall x, y \in \mathbf{R}$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x,$$

b) existuje kladné číslo π *tak, že* sin *je rostoucí na* $[0, \frac{1}{2}\pi]$ *a* $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Definice. Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ a $y \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ definujeme funkce *tangens* a *cotangens* předpisem
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \ \text{a}\ \operatorname{cotg} y = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Věta L 16 (spojitost sinu a cosinu)**.** *Funkce* sin*,* cos*,* tan *a* cotg *jsou spojité na svém definičním oboru.*

Definice. Nechť
$$\sin^* x = \sin x \text{ pro } x \in [\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],$$
$$\cos^* x = \cos x \text{ pro } x \in [0, \pi],$$
$$\tan^* x = \tan x \text{ pro } x \in (\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \text{ a}$$
$$\operatorname{cotg}^* x = \operatorname{cotg} x \text{ pro } x \in (0, \pi).$$

Definujeme arcsin (respektive arccos, arctan, arccotg) jako inverzní funkci k funkci $\sin^*$ (respektive $\cos^*$, $\tan^*$, cotg^*).

4.5. Derivace funkce

Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak *derivací* f *v bodě* a budeme rozumět
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$
derivací f *v bodě* a *zprava* budeme rozumět
$$f'(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$
derivací f *v bodě* a *zleva* budeme rozumět
$$f'(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Věta L 17 (vztah derivace a spojitosti)**.** *Nechť má funkce* f *v bodě* $a \in \mathbf{R}$ *derivaci* $f'(a) \in \mathbf{R}$*. Pak je* f *v bodě* a *spojitá.*

Věta T 18 (aritmetika derivací)**.** *Nechť* $f'(a)$ *a* $g'(a)$ *existují.*

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$*, pokud má pravá strana smysl.*

(ii) Nechť je g *spojitá v* a*, pak* $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$*,*
pokud má pravá strana smysl.

(iii) Nechť je g *spojitá v* a *a* $g(a) \neq 0$*, pak* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$*,*
pokud má pravá strana smysl.

Věta T 19 (derivace složené funkce)**.** *Nechť f má derivaci v bodě y_0, g má derivaci v x_0 a je v x_0 spojitá a $y_0 = g(x_0)$. Pak*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0),$$

je-li výraz vpravo definován.

Konec 10. přednášky

Věta L 20 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť f je na intervalu (a, b) spojitá a rostoucí (respektive klesající). Nechť f má v bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}.$$

Věta L 21 (Fermatova)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$ je bod lokálního extrému funkce f na M. Pak $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$.*

Věta L 22 (Rolleova věta)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (a, b)$ a $f(a) = f(b)$. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.*

Věta L 23 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci v každém bodě intervalu (a, b). Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Věta BD 24 (l'Hospitalovo pravidlo)**.**
(i) Nechť $a \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ a nechť existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) Nechť $a \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty$ a nechť existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Věta L 25 (derivace a limita derivace)**.** *Nechť je funkce f spojitá zprava v a a nechť existuje $lim_{x\to a+} f'(x) = A \in \mathbf{R}^*$. Pak $f'_+(a) = A$.*

Definice. Nechť J je interval. Množinu všech vnitřních bodů J nazýváme *vnitřek* J a značíme $\operatorname{int} J$.

Věta L 26 (o vztahu derivace a monotonie)**.** *Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je interval a f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J má derivaci.*

(i) Je-li $f'(x) > 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f rostoucí na J.

(ii) Je-li $f'(x) < 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f klesající na J.

(iii) Je-li $f'(x) \geq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f neklesající na J.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f nerostoucí na J.

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a nechť f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $n + 1$-ní derivací funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a + h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

Konec 10. přednášky

4.6. Konvexní a konkávní funkce

Definice. Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}$. Označme

$$T_a = \{[x, y];\ x \in \mathbf{R},\ y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)],\ x \in D_f$ leží *nad (pod) tečnou* T_a, jestliže platí

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a) \quad \big(f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)\big).$$

Definice. Funkce f má v bodě a inflexi (a je inflexní bod), jestliže $f'(a) \in \mathbf{R}$ a existuje $\Delta > 0$ tak, že

$$(i)\ \forall x \in (a - \Delta, a) :\ [x, f(x)] \text{ leží nad tečnou,}$$
$$(ii)\ \forall x \in (a, a + \Delta) :\ [x, f(x)] \text{ leží pod tečnou,}$$

nebo

$$(i)\ \forall x \in (a - \Delta, a) :\ [x, f(x)] \text{ leží pod tečnou,}$$
$$(ii)\ \forall x \in (a, a + \Delta) :\ [x, f(x)] \text{ leží nad tečnou,}$$

Věta T 27 (nutná podmínka pro inflexi)**.** *Nechť $f''(a) \neq 0$. Pak a není inflexní bod funkce f.*

Věta BD 28 (postačující podmínka pro inflexi)**.** *Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b). Nechť $z \in (a, b)$ a platí*

$$\forall x \in (a, z) : f''(x) > 0 \ \text{a}\ \forall x \in (z, b) : f''(x) < 0.$$

Pak z je inflexní bod f.

Definice. Funkce f na intervalu I nazveme *konvexní (konkávní)*, jestliže

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$
$$\Big(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}\Big).$$

Funkci nazveme *ryze konvexní (ryze konkávní)*, je-li příslušná nerovnost ostrá.

Lemma. *Nechť je funkce f je na intervalu I konvexní, pak*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Lemma'. *Nechť je funkce f je na intervalu I ryze konvexní, pak*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Věta T 29 (konvexita a jednostranné derivace)**.** *Nechť f je konvexní na intervalu J a $a \in \operatorname{int} J$. Pak $f'_+(a) \in \mathbf{R}$ a $f'_-(a) \in \mathbf{R}$.*

Věta L 30 (konvexita a spijitost)**.** *Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J. Pak je f spojitá na J.*

Věta T 31 (vztah druhé derivace a konvexity (konkávity))**.** *Nechť f má na intervalu (a,b) spojitou první derivaci.*

$$\text{Jestliže } \forall x \in (a,b):\ f''(x) > 0, \text{ pak } f \text{ je ryze konvexní.}$$
$$\text{Jestliže } \forall x \in (a,b):\ f''(x) < 0, \text{ pak } f \text{ je ryze konkávní.}$$
$$\text{Jestliže } \forall x \in (a,b):\ f''(x) \geq 0, \text{ pak } f \text{ je konvexní.}$$
$$\text{Jestliže } \forall x \in (a,b):\ f''(x) \leq 0, \text{ pak } f \text{ je konkávní.}$$

4.7. Průběh funkce

Definice. Řekneme, že funkce $ax+b$, $a,b \in \mathbf{R}$, je *asymptotou funkce f v ∞ (resp. $-\infty$)*, jestliže

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big) = 0 \quad (\text{resp. } \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big) = 0).$$

Věta L 32 (tvar asymptoty)**.** *Funkce f má v ∞ asymptotu $ax+b$, právě když*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R} \text{ a } \lim_{x\to\infty}\big(f(x)-ax\big) = b \in \mathbf{R}.$$

Konec 12. přednášky

Při vyšetření průběhu funkce provádíme následující kroky:

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.
3. Zjistíme symetrii funkce: lichost, sudost, periodicita.
4. Dopočítáme limity v 'krajních bodech definičního oboru'.
5. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémý.
6. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je f konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
7. Vypočteme asymptoty funkce.
8. Načtneme graf funkce a určíme obor hodnot.

4.8. Taylorův polynom

Definice. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbf{R}$ a existuje vlastní n-tá derivace f v bodě a. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme *Taylorovým polynomem řadu n funkce f v bodě a.*

Věta T 33 (o nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$ a P je polynom stupně nejvýše n. Pak*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P = T_n^{f,a}.$$

Lemma. *Nechť Q je polynom, $a \in \mathbf{R}$,* $\operatorname{st} Q \leq n$ a $\lim_{x\to a}\frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak $Q \equiv 0$.

Věta BD 34 (Taylor)**.** *Nechť funkce f má vlastní $(n+1)$-ní derivaci v intervalu $[a,x]$, a nechť ϕ je spojitá funkce v $[a,x]$ a má vlastní derivaci v (a,x), která je v každém bodě tohoto intervalu různá od nuly. Pak existuje $\xi \in (a,x)$ tak, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!}\frac{\phi(x)-\phi(a)}{\phi'(\xi)}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Specielně existuje $\xi_1 \in (a, x)$ *tak, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_1)(x-a)^{n+1} \text{ (Lagrangeův tvar zbytku)}$$

a existuje $\xi_2 \in (a, x)$ *tak, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_2)(x-\xi_2)^n (x-a). \text{ (Cauchyův tvar zbytku)}$$