1. cvičení

Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ jsou parametry):

$$1. \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x+3}}, \quad 2. \int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}dx, \quad 3. \int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^\alpha}dx$$

$$4. \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha + x^\beta}dx, \quad 5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\tan^\alpha x\, dx \quad .$$

Naleznte objemy

6.jednotkov koule, 7.anuloidu

Výsledky a návody:

1. Konverguje ; U ∞ limitně srovnáme s $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

2. Konverguje; U 1 víme $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\log x}{1-x} = 1$, a proto limitně srovnáme s 1.

U 0 srovnáme s $\log x$ a $\int_0^1 |\log x| < \infty$ zjistíme z per partes.

3. Konverguje pro $\alpha \in (2,4)$; U 0 limitně srovnáme s $\frac{x^3}{x^\alpha}$.

U ∞ (nelimitně) srovnáme s $\frac{x+1}{x^\alpha}$.

4. Konverguje pokud $\max\{\alpha,\beta\} > 1 > \min\{\alpha,\beta\}$; U 0 limitně srovnáme s $\frac{1}{x^{\min\{\alpha,\beta\}}}$.

U ∞ limitně srovnáme s $\frac{1}{x^{\max\{\alpha,\beta\}}}$.

5. Konverguje pro $\alpha \in (-3,1)$; U 0 limitně srovnáme s $(1-\cos x)x^\alpha \sim x^{2+\alpha}$.

U $\frac{\pi}{2}$ se chová jako $\frac{\log(\cos x)}{\cos^\alpha x}$. Vzhledem k $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = 1$

je tato funkce stejně integrovatelná, jako funkce $\frac{\log y}{y^\alpha}$ u 0, tedy pro $\alpha < 1$.

6.$\frac{4}{3}\pi$; Koule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ okolo osy x.

Objem je tedy $V = \pi \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2})^2\, dx = \frac{4}{3}\pi$.

7.$4\pi^2$; Uvažujme anuloid vzniklý rotací kruhu $\{[x,y] : x^2+(y-2)^2 \le 1\}$ okolo osy x.

Anuloid vznikne jako rozdíl tělesa vzniklého rotací $y_1 = 2+\sqrt{1-x^2}$ a tělesa $y_2 = 2-\sqrt{1-x^2}$.

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left[(2+\sqrt{1-x^2})^2 - (2-\sqrt{1-x^2})^2\right] dx = 16\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx\ .$$

2. cvičení

Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha \in \mathbf{R}$ je parametr):

$$1. \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^{\frac{5}{2}}}dx, \quad 2. \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx, \quad 3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\Big(\frac{1}{\sin x}\Big)dx$$

$$4. \int_0^\infty \sin\Big(\sqrt{x^{2\alpha}+1} - x^\alpha\Big)dx, \quad 6. \int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^\alpha(1/x)}\, dx, \quad 7. \int_0^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha dx.$$

Pomocí Riemanova integrálu spočtěte

$$5. \lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}, \ p > 1\ .$$

Výsledky a návody:

1. Konverguje; U 0 srovnej s $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ a u ∞ srovnej s $\dfrac{2}{x^{\frac{5}{2}}}$.

2. Konverguje ; Na $(-\infty,-1]$ a $[1,\infty)$ srovnej s e^{-x} nebo limitně srovnej s $\dfrac{1}{x^2}$.
Na $[-1,1]$ je funkce spojitá .

3. Konverguje; Srovnávací kritérium a $|f(x)| \le 1$.

4. Konverguje pro $\alpha > 1$; U ∞ limitně srovnáme se $\sin\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x^{2\alpha}+1}+x^\alpha}\Big) \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$.
pro $\alpha > 0$ a pro $\alpha \le 0$ u ∞ limitně srovnáme s 1.
To konverguje pro $\alpha > 1$ a pro $\alpha > 1$ je funkce u 0 spojitá.

5. $\dfrac{1}{p+1}$; $\dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{n}\Big((\dfrac{1}{n})^p + (\dfrac{2}{n})^p + \ldots + (\dfrac{n}{n})^p\Big) =$

Toto je Riemannovský součet funkce x^p, a tedy $\lim = \displaystyle\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$.

6. Konverguje pro $\alpha < \dfrac{3}{2}$; U 0 se chová jako $\dfrac{1}{\log^\alpha(1/x)}$,
a tedy limitním srovnáním s $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ konverguje. U 1 limitně srovnáme s $\dfrac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^\alpha}$.

7. Konverguje pro $\alpha > 1$; U 0 spojitá. U ∞ limitně srovnáme s $\dfrac{1}{x^\alpha}$,
neboť pomocí l'Hospitala zjistíme $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\arctan x}{\frac{1}{x}} = 2$.

3. cvičení

1. Nalezněte obsah povrchu jednotkové koule v$\mathbf{R}^3$.
2. Nalezněte těžiště homogenního drátu tvaru půlkružnice.

Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících integrálů ($\alpha \in \mathbf{R}$ je parametr):

$$3.\ \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx,\quad 4.\ \int_0^\infty \frac{\sin(2x+1)}{\log(\log(10+x))}\,dx,\quad 5.\ \int_0^\infty x\cos(x^4)\,dx$$

$$6.\ \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^\alpha}\,dx,\quad 7.\ \int_0^\infty (\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}})x^\alpha\,dx,\quad 8.\ \int_0^\infty \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^\alpha}\,dx$$

Výsledky a návody:

1. $S = 4\pi$; Koule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$, kolem osy x.
Tedy $S = 2\pi \displaystyle\int_a^b f\sqrt{1+(f')^2} = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\Big(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big)^2} = 2\pi \int_{-1}^1 1\,dx.$

2. $T = [0, \frac{2}{\pi}]$; Půlkružnici parametrizujeme $[x,y] = [\cos t, \sin t]$ pro $t \in [0,\pi]$.
Délka je π, a tedy $T_y = \dfrac{1}{\text{délka}} \displaystyle\int_0^\pi y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin t\,dt.$
Analogicky $T_x = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin t\,dt.$

3. Konverguje neabsolutně ; Na $(0,1]$ limitně srovnáme s $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Na $[1,\infty)$ použijeme
Dirichletovo kritérium na $f = \cos x$ a $g = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. U absolutní konvergenci odhadneme

$$\int_0^\infty \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx \geq \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbf{N}} \int_{-\frac{\pi}{4}+k\pi}^{\frac{\pi}{4}+k\pi} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4}+k\pi}} = \infty$$

4. Konverguje neabsolutně ; Použijte Dirichletovo kritérium na $f = \sin(2x+1)$.

5. Konverguje neabsolutně ; Subtitucí $a = x^4$ převedeme na 1.

6. Konverguje pro $\alpha \in (0,4)$ a absolutně pro $\alpha \in (1,4)$; U 0 limitně srovnáme s $\frac{x^3}{x^\alpha}$. Na $[1,\infty)$ můžeme použít Dirichleta, neboť $\sin^3 x$ má omezenou primitivní funkci. Divergence pro $\alpha \leq 0$ se dá zjistit například pomocí Bolzano-Cauchyho podmínky.

7. Konverguje pro $\alpha \in (-5,0)$ a absolutně pro $\alpha \in (-5,-1)$; Na $(0,1]$ za pomocí Taylora limitně srovnáme s $x^{4+\alpha}$. Na $[1,\infty)$ použijeme mimo jiné Dirichletovo kritérium. Divergence pro $\alpha \geq 0$ se dá zjistit napřiklad pomocí Bolzano-Cauchyho podmínky.

8. Konverguje pro $0 < \alpha < 2$; Bolzano-Cauchyho podmínka dá divergenci $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ pro $\alpha \leq 0$. Z Dirichleta $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ konverguje pro $\alpha > 0$.

Dále na $\int_1^\infty \frac{\sin x - \sin(x+\frac{1}{x})}{x^\alpha} dx = \int_1^\infty \frac{2\sin(\frac{1}{x})\cos(x+\frac{1}{2x})}{x^\alpha} dx$ použij Abela.

cos je omezený a $\frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{a+1}}$ konverguje. Tedy $\int_1^\infty \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^\alpha} dx$ konverguje právě když $\alpha > 0$. $\int_0^1 \frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^\alpha} dx$ substitucí $y = \frac{1}{x}$ převedeme na předchozí případ.

4. cvičení

Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí:

1. $\frac{x^n}{1+x^n}$ na $[0,1]$, 2. $x^n - x^{2n}$ na $[0,1]$,

3. $\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ na $[-100,100]$ a na $\mathbf{R}$, 4. $n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right)$ na $(0,\infty)$,

5. $\sqrt[n]{1+x^n}$ na $[0,\infty)$, 6. $n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ na $[1,100]$ a na $[1,\infty)$.

Výsledky a návody:

1. Konverguje nestejnoměrně k 0 na $[0,1)$ a $\frac{1}{2}$ v 1; $\sigma_n = \frac{1}{2}$.

2. Konverguje nestejnoměrně k 0; Derivací zjistíme, že max $x^n - x^{2n}$ je v $\sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ a to $\sigma_n = \frac{1}{4}$.

3. Konverguje stejnoměrně k 0 na $[-100,100]$ a nestejnoměrně na $\mathbf{R}$; Pro $n \geq 100$ je $\sin\frac{x}{n}$ monotónní na $[-100,100]$ a tedy $\sigma_n = \sin\frac{100}{n} \to 0$. Na $\mathbf{R}$ je zjevně $\sigma_n = 1$.

4. Konverguje nestejnoměrně k $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; Standartně rozšiřujeme $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

$$\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+\frac{1}{n}}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}})} = \frac{\frac{1}{n}}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}})^2} \overset{x\to 0+}{\to} \infty = \sigma_n.$$

5. Konverguje stejnoměrně k $\max\{1,x\}$; Na $[0,1]$, $|\sqrt[n]{1+x^n} - 1| \leq \sqrt[n]{2} - 1 \to 0$. Na $[1,\infty)$ použijeme $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + \ldots)$ a odhadneme

$$|\sqrt[n]{1+x^n} - x| = \frac{(\sqrt[n]{1+x^n})^n - x^n}{(\sqrt[n]{1+x^n})^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x^n})^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}} \leq \frac{1}{n-2} \to 0.$$

6. Konverguje stejnoměrně k $\log x$ na $[1,100]$ a nestejnoměrně na $[1,\infty)$;

$$n\big(x^{\frac{1}{n}}-1\big)=\frac{e^{\frac{1}{n}\log x}-1}{\frac{1}{n}\log x}\log x\to\log x.\text{ Na } [1,\infty)\text{ je }\lim_{x\to\infty}n\big(x^{\frac{1}{n}}-1\big)-\log x=\infty=\sigma_n.$$

Na $[1,100]$ je potřeba provést rozumný odhad $:-)$.

5. cvičení

Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí:

1. $e^{n(x-1)}$ na $(0,1)$, 2. $\sin\big(\pi x^n\big)$ na $[0,1]$, 3. $\dfrac{nx}{1+n+x}$ na $(0,\infty)$,

4. nxe^{-nx^2} na $\mathbf{R}$, 5. $\dfrac{\log nx}{n}$ na $(0,\infty)$, 6. $\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)^n$ na $[0,\infty)$, 7. $x\arctan(nx)$ na $\mathbf{R}$.

Výsledky a návody:

1. Konverguje lokálně stejnoměrně k 0 na $(0,1)$; Nekonverguje stejnoměrně:

Moore-Osgood u 1. Na $[0,1-\delta]$ buď Dini, nebo $\sigma_n=e^{-n\delta}\to 0$.

2. Konverguje lokálně stejnoměrně k 0 na $[0,1)$; Nekonverguje stejnoměrně:

$$\sigma_n=f_n(\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}})=1.\text{ Na } [0,1-\delta]\text{ je } \sigma_n\le\sup\pi x^n=\pi(1-\delta)^n\to 0.$$

3. Konverguje lokálně stejnoměrně k x na $(0,\infty)$; Nekonverguje stejnoměrně:

$$\sigma_n\ge\lim_{x\to\infty}|f_n(x)-f(x)|=\infty.\text{ Na } [0,K]\text{ odhadneme } \sigma_n=\sup\frac{x+x^2}{1+n+x}\le\frac{K+K^2}{1+n}\to 0.$$

4. Konverguje lokálně stejnoměrně k 0 na $(0,\infty)$ a na $(-\infty,0)$;

Pomocí derivace zjistíme, že f_n-f roste na $(0,\frac{1}{\sqrt{2n}})$, klesá na $(\frac{1}{\sqrt{2n}},\infty)$

a maximum má v $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ a to $\sigma_n=\sqrt{n}e^{-1}$. Tedy nekonverguje stejnoměrně.

Na $[\delta,\infty)$, f_n-f klesá, pokud je n dost velké: $\dfrac{1}{\sqrt{2n}}<\delta$. Tedy $\sigma_n\le n\delta e^{-n\delta^2}\to 0$.

5. Konverguje lokálně stejnoměrně k 0 na $(0,\infty)$; Nekonverguje stejnoměrně:

$$\sigma_n\ge\lim_{x\to\infty}|f_n-f|=\infty.\text{ Na } [\delta,K]\text{ odhadneme }\Big|\frac{\log nx}{n}\Big|\le\max\Big\{\Big|\frac{\log n\delta}{n}\Big|,\Big|\frac{\log nK}{n}\Big|\Big\}\to 0.$$

6. Konverguje lokálně stejnoměrně k e^x na $(0,\infty)$; Nekonverguje stejnoměrně:

$$\lim_{x\to\infty}e^x-\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n=\infty,\text{ neboť } e^x\text{ roste u } \infty\text{ rychleji než polynom.}$$

Z Taylora víme, že existuje $C>0$ takové, že $|\dfrac{\log(1+y)}{y}-1|\le Cy$ pro všechna $0<y<1$.

Na $[0,K)$ tedy pro $n>K$ odhadneme

$$\Big|\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n-e^x\Big|=e^x\Big|e^{(\frac{\log(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}-1)x}-1\Big|\le e^K(e^{C\frac{K}{n}K}-1)\to 0.$$

7. Konverguje stejnoměrně k $\dfrac{\pi}{2}|x|$ na $\mathbf{R}$; Pomocí l'Hospitala $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan y}{\frac{1}{y}}=1$.

$$\text{Na } [0,\tfrac{1}{\sqrt{n}}]\text{ je } |x\arctan(nx)-\tfrac{\pi}{2}x|=|x(\arctan(nx)-\tfrac{\pi}{2})|\le\frac{1}{\sqrt{n}}\pi\to 0.$$

$$\text{Na } [\tfrac{1}{\sqrt{n}},\infty]\text{ je } nx\text{ velké . Tedy díky }\lim_{y\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan y}{\frac{1}{y}}=1$$

$$\text{odhadneme } |x(\arctan(nx)-\tfrac{\pi}{2})|\le x\frac{C}{nx}=\frac{C}{n}\to 0.$$

6. cvičení

U následujících řad funkcí zjistěte : a) Pro jaká x řada konverguje? b) Na jakém intervalu konverguje řada stejnoměrně nebo lokálně stejnoměrně? c) Na jakém intervalu je součet řady spojitá funkce?

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} x^n,\quad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2x^2+1},\quad 3.\ \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx},\quad 4.\ \sum_{n=1}^{\infty} \log\Big(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\Big),$$

$$5.\ \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\Big(\frac{2x}{x^2+n^3}\Big),\quad 6.\ \text{Na } (0,\infty) \text{ vyšetřete } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}.$$

Výsledky a návody:

1. Konverguje lokálně stejnoměrně na $(-1,1)$ a tedy je tam i spojitá;

Podle nutné podmínky nekonverguje stejnoměrně na $(-1,1)$.

Na $[-1+\delta, 1-\delta]$ použijeme Weierstrasse: $|x^n| \le (1-\delta)^n$ a $\sum_n (1-\delta)^n < \infty$.

2. Konverguje lokálně stejnoměrně na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ a tedy je tam i spojitá;

Konverguje na $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Podle nutné podmínky nekonverguje stejnoměrně.

Na $\mathbf{R}\setminus(-\delta,\delta)$ použijeme Weierstrasse: $\Big|\frac{1}{n^2x^2+1}\Big| \le \frac{1}{n^2\delta^2+1}$ a $\sum_n \frac{1}{n^2\delta^2+1} < \infty$.

3. Konverguje stejnoměrně na $[0,\infty)$ a tedy je tam i spojitá;

Derivováním zjistíme, že $|u_n(x)| \le u_n(\frac{2}{n}) = \frac{4}{n^2}e^{-2}$. Weierstrass a $\sum_n \frac{4}{n^2}e^{-2} < \infty$.

4. Konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbf{R}$ a tedy je tam i spojitá;

Podle nutné podmínky nekonverguje stejnoměrně na $\mathbf{R}$.

Na $[-K,K]$ použijeme Weierstrasse: $|u_n(x)| \le \log\Big(1+\frac{K^2}{n\log^2 n}\Big) \le \frac{K^2}{n\log^2 n}$

a $\sum_n \frac{K^2}{n\log^2 n}$ konverguje podle kondenzačního kritéria.

5. Konverguje stejnoměrně na $\mathbf{R}$ a tedy je tam i spojitá;

Derivováním zjistíme, že $|u_n(x)| \le u_n(n^{3/2})$. Weierstrass a $\sum_n \arctan\Big(\frac{2n^{3/2}}{2n^3}\Big) < \infty$.

6. Konverguje lokálně stejnoměrně na $(0,\infty)$;

Na $[\delta,\infty)$ odhadneme $\Big|\frac{nx}{1+nx}\frac{1}{(1+x)\cdots(1+(n-1)x)}\Big| \le 1\frac{1}{(1+\delta)^{n-1}}$

a použijeme Weierstrasse $\sum_n \frac{1}{(1+\delta)^{n-1}} < \infty$. Nekonverguje stejnoměrně :

$$\log\big((1+x)\cdots(1+nx)\big) \le \log(1+x)+\ldots+\log(1+nx) \le x+\ldots+nx \le n^2x,$$

a tedy $u_n(x) \ge \frac{nx}{\exp(n^2x)}$. Není splněna Bolzano-Cauchyho podmínka, neboť

$$\sum_{n=n_0}^{2n_0} u_n(\tfrac{1}{n_0^2}) \ge \sum_{n=n_0}^{2n_0} \frac{\frac{1}{n_0}}{\exp(4)} \ge \frac{1}{\exp(4)}.$$

7. cvičení

Ve dnech 1.12 a 2.12 bude zápočtová písemka na stejnoměrnou konvergenci posloupností a řad funkcí a na konvergenci integrálů.

Vyšetřete stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci následujících řad funkcí:

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}\ \text{na}\ (-1,\infty),\quad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n\ \text{na}\ [0,1],\quad 3.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^s}\ \text{na}\ \mathbf{R},\ s\in\mathbf{R},$$

$$4.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\arctan(nx)\ \text{na}\ [0,2\pi]\ ,\quad 5.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\ \sin nx}{\sqrt{n+x}}\ \text{na}\ (0,\infty).$$

Rozhodněte, jestli jsou následující funkce diferencovatelné na $(-1,\infty)$*:*

$$6.\ F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x},\quad 7.\ G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x}.$$

Výsledky a návody:

1. Konverguje stejnoměrně; Dirichlet s $\varepsilon_n(x)=(-1)^n$.

2. Konverguje stejnoměrně; Dirichlet s $\varepsilon_n(x)=(-1)^n$.

Průběh funkce $(1-x)x^n$ dá stejnoměrnou konvergenci $a_n(x)$ k 0.

3. Konverguje stejnoměrně pro $s>1$ a lokálně stejnoměrně pro $0<s\le 1$;

Pro $s>1$ Weierstrass s $a_n=\dfrac{1}{n^s}$. Pro $0<s\le 1$ lze lokálně Dirichlet s $\varepsilon_n=\cos nx$.

Na celém $(0,2\pi)$ neplatí B-C, neboť $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{2n_0}u_n\Big(\frac{1}{n_0}\Big)\ge\frac{1}{1000}$.

4. Konverguje lokálně stejnoměrně; Na $[0,2\pi]$ není splněna B-C:

$\displaystyle\sum_{n=n_0}^{2n_0}u_n\Big(\frac{1}{n_0}\Big)\ge\frac{1}{1000}$. Na $[\delta,2\pi-\delta]$ lze užít Abel s $\varepsilon_n=\arctan nx$

a $a_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n}$ konverguje stejnoměrně z Dirichleta.

5. Konverguje stejnoměrně; Dirichlet s $\varepsilon_n(x)=\sin x\ \sin nx$.

Lze ukázat, že částečné součty $\varepsilon_n(x)$ jsou omezené - i u 0!!!

6. Je diferencovatelná na $(-1,\infty)$; $F(0)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konverguje z Leibnitze.

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)}{(n+x)^2}\ \text{a na}\ [-1+\delta,\infty):\ |u_n(x)|\le\frac{1}{(n-1+\delta)^2}.$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1+\delta)^2}<\infty$ a díky Weierstrassovi existuje F' na $[-1+\delta,\infty)$, a tedy na $(-1,\infty)$.

7. Je diferencovatelná na $(-1,\infty)$; Zřejmě $G(x)=xF(x)$, a tedy to plyne z 6.

Jde i znovu ověřit předpoklady věty: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}$

a tato řada konverguje stejnoměrně z Dirichleta s $\varepsilon_n(x)=(-1)^n$ na $(-1,K]$.

Z $\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{n}{(n+x)^2}$ zjistíme, že monotonie v n platí pro $n\ge n_0\ge K$!

8. cvičení

Za pomoci věty o implicitních funkcích spočtěte:

1. y_x a y_{xx}, pokud $x^3+y^3=2xy$ v bodě $[1,1]$.

2. x_v, y_v a z_v, pokud $u=x^2+y^2$, $v=x^2-2xy^2$ a $z=\log(y^2-x^2)$ v bodech $u=5$, $v=-7$, $x(5,-7)=1$ a $y(5,-7)=2$.

3. Dokažte, že existují funkce $z(x,y)$ a $t(x,y)$ splňující na okolí $x=1,\ y=-1,\ z=2,\ t=0$ vztahy $x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2-t^3=0$ a $x+y+z-t-2=0$.

Spočtěte druhé derivace $z(x,y),\ t(x,y)$ a dále $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, kde $w=z^2e^t$.

4. z_{xy} v bodě $u=2,\ v=1$ jestliže $x=u+v^2,\ y=u^2-v^3$ a $z=2uv$.

Výsledky a návody:

1. $y'(1)=-1$ a $y''(1)=-16$; Derivováním rovnice dostaneme $3x^2+3y^2y'=2y+2xy'$.

Odtud po dosazení $x=1$ a $y=1$ dostaneme $y'=-1$.

Opětovným zderivováním $6x+6yy'y'+3y^2y''=2y'+2y'+2xy''$.

2. $x_v=-\dfrac{1}{2},\ y_v=\dfrac{1}{4}$ a $z_v=\dfrac{2}{3}$; Derivací rovnic $\dfrac{\partial}{\partial v}$ dostaneme $0=2xx_v+2yy_v$ a $0=2xx_v-2x_vy^2-2x2yy_v-1$. Dosadíme $x=1,y=2$ a vyřešíme.

Podle řetízkového pravidla $z_v=z_xx_v+z_yy_v=\dfrac{-2x}{y^2-x^2}\dfrac{1}{2}+\dfrac{2y}{y^2-x^2}\dfrac{-1}{4}=-\dfrac{2}{3}$.

3. $z_x=1,\ z_y=-1,\ t_x=2,\ t_y=0,\ t_{xx}=z_{xx}=\dfrac{1}{2}=z_{yy}=t_{yy},\ t_{xy}=z_{xy}=\dfrac{1}{2}$ a $w_x=12$;

Derivací rovnic dostaneme $2x-zz_x-3t^2t_x=0$ a $1+z_x-t_x=0$.

Tedy $z_x=\dfrac{2x-3t^2}{z+3t^2}$ a derivováním $z_{xx}=\dfrac{(2-6tt_x)(z+3t^2)-(2x-3t^2)(z_x+6tt_x)}{(z+3t^2)^2}$.

Dále $w_x=2zz_xe^t+z^2t_xe^t=4+8=12$.

4. $z_{xy}=\dfrac{26}{121}$; Z prvních dvou rovnic můžeme imlicitně určit pro $u(x,y),v(x,y)$

$v_x=\dfrac{4}{11},\ u_x=\dfrac{3}{11},\ v_y=\dfrac{-1}{11},\ u_y=\dfrac{2}{11}$ atd. Z poslední rovnice dostaneme

$z_x=2u_xv+2uv_x,$ a tedy $z_{xy}=2u_{xy}v+2u_xv_y+2u_yv_x+2uv_{xy}$.

10. cvičení

Ve dnech 5.1 a 6.1 bude zápočtová písemka na Abelovu sčítací metodu, větu o implicitních funcích, převod diferenciálních rovnic do jiných souřadnic a na homogenní a Bernouliovy diferenciální rovnice.

Do polárních souřadnic převeďte:

$$1.\ \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}=0.$$

2. $x\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial y}-y\dfrac{\partial z(x,y)}{\partial x}=0$. Nalezněte jedno nekonstatní řešení této rovnice.

$$4.\ \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Do nových souřadnic u a v převeďte rovnici:

3. $xz_{xx}-yz_{yy}=0,$ kde $x=(u+v)^2$ a $y=(u-v)^2$.

Výsledky a návody:

1. $h_rr+\dfrac{h_{\varphi\varphi}}{r^2}+\dfrac{h_r}{r}=0,$ kde $z(x,y)=h(r,\varphi)$; Parciální derivací $h(r,\varphi)=z(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$

dostaneme $h_r=z_x\cos\varphi+z_y\sin\varphi$ a $h_\varphi=-z_xr\sin\varphi+z_yr\cos\varphi$.

Ze soustavy těchto 2 rovnic dostaneme $z_x=h_r\cos\varphi-\frac{1}{r}h_\varphi\sin\varphi$ a $z_y=h_r\sin\varphi+\frac{1}{r}h_\varphi\cos\varphi$.

Dosazením z_y za z do předchozí rovnice dostaneme $z_{yy}=\frac{\partial}{\partial r}(z_y)\sin\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(z_y)\cos\varphi=$

$=\frac{\partial}{\partial r}(h_r\sin\varphi+\frac{1}{r}h_\varphi\cos\varphi)\sin\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(h_r\sin\varphi+\frac{1}{r}h_\varphi\cos\varphi)\cos\varphi$

$$= h_r r \sin^2\varphi + h_{\varphi\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{r^2} + h_{r\varphi}\frac{\sin 2\varphi}{r} + h_r\frac{\cos^2\varphi}{r} - h_\varphi\frac{\sin 2\varphi}{r^2}.$$

Analogicky $z_{xx} = h_r r\cos^2\varphi + h_{\varphi\varphi}\dfrac{\sin^2\varphi}{r^2} - h_{r\varphi}\dfrac{\sin 2\varphi}{r} + h_r\dfrac{\sin^2\varphi}{r} + h_\varphi\dfrac{\sin 2\varphi}{r^2}$.

2. $h_\varphi = 0$ a jedno řešení je například $z(x,y) = x^2 + y^2$;

$$xz_y - yz_x = r\cos\varphi(h_r\sin\varphi + h_\varphi\tfrac{\cos\varphi}{r}) - r\sin\varphi(h_r\cos\varphi - h_\varphi\tfrac{\sin\varphi}{r}) = h_\varphi.$$

3. $w_{uv} + 2\dfrac{vw_u - uw_v}{u^2 - v^2} = 0$ kde $z(x,y) = w(u,v)$; Derivací $w(u,v) = z((u+v)^2, (u-v)^2)$ dostaneme $w_u = z_x 2(u+v) + z_y 2(u-v)$ a $w_v = z_x 2(u+v) + z_y 2(v-u)$.

Odtud spočteme $z_x = \dfrac{w_u + w_v}{4(u+v)}$ a $z_y = \dfrac{w_u - w_v}{4(u-v)}$. Dosazením z_x za z do první rovnice

$$z_{xx} = \tfrac{1}{4(u+v)}\Big(\tfrac{\partial}{\partial u}(z_x) + \tfrac{\partial}{\partial v}(z_x)\Big) = \tfrac{1}{4(u+v)}\Big(\tfrac{\partial}{\partial u}\big(\tfrac{w_u+w_v}{4(u+v)}\big) + \tfrac{\partial}{\partial v}\big(\tfrac{w_u+w_v}{4(u+v)}\big)\Big)$$

$= \dfrac{1}{16(u+v)^2}(w_{uu} + 2w_{uv} + w_{vv}) - \dfrac{1}{16(u+v)^3}(w_u + w_v)$ a zbytek se spočte analogicky.

4.$h_{rr}\sin\varphi\cos\varphi - h_{\varphi\varphi}\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + h_{r\varphi}\dfrac{\cos 2\varphi}{r} - h_\varphi\dfrac{\cos 2\varphi}{r^2} - h_r\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}$;

Dosazením z_x za z do $z_y = h_r\sin\varphi + \frac{1}{r}h_\varphi\cos\varphi$ dostaneme

$$z_{yx} = \tfrac{\partial}{\partial r}(z_x)\sin\varphi + \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial\varphi}(z_x)\cos\varphi =$$

$$= \tfrac{\partial}{\partial r}(h_r\cos\varphi - \tfrac{1}{r}h_\varphi\sin\varphi)\sin\varphi + \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial\varphi}(h_r\cos\varphi - \tfrac{1}{r}h_\varphi\sin\varphi)\cos\varphi.$$

11. cvičení

Ve dnech 5.1 a 6.1 bude zápočtová písemka na Abelovu sčítací metodu, větu o implicitních funcích, převod diferenciálních rovnic do jiných souřadnic a na homogenní a Bernouliovy diferenciální rovnice.

Nalezněte řešení následujících diferenciálních rovnic:

$$1.\ y' = \frac{y}{x} + x, \quad 2.\ xy^2y' = x^2 + y^3$$

$$3.\ xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y, \quad 4.\ y' + 2xy = 2xy^3$$

5. $(x-y-1) + y'(y-x+2) = 0,$, 6. $xy' = 4y + x^2\sqrt{y}$, 7. $(x+y-2) + y'(x-y+4) = 0.$

Výsledky a návody:

1. $y = x^2 + Cx$ na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ pro $C \in \mathbf{R}$;

Po substituci $y = zx$ vyjde $z'x + z = z + x$.

2. $\sqrt[3]{-3x^2 + Cx^3}$ na $(-\infty,0), (0,\frac{3}{C})$ a $(\frac{3}{C},\infty)$ pro $C > 0$;

na $(-\infty,\frac{3}{C}), (\frac{3}{C},0)$ a $(0,\infty)$ pro $C < 0$; na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ pro $C = 0$.

V problémových bodech 0 a $\dfrac{3}{C}$ není $\sqrt[3]{-3x^2 + Cx^3}$ diferencovatelná.

Po substituci $z = y^3$ vyjde rovnice $z' - z\dfrac{3}{x} = 3x$.

3. $-x\log(-\log|x| - C)$ na $(-e^{-C},0)$ a $(0,e^{-C})$, $C \in \mathbf{R}$;

Po substituci $z = \dfrac{y}{x}$ vyjde rovnice $z'x^2 = xe^z$.

4. 0 na $\mathbf{R}$ a $\pm\dfrac{1}{\sqrt{1 + Ce^{2x^2}}}$ na $\mathbf{R}$ pro $C \geq 0$

a na $\Big(-\sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{-1}{C}}, \sqrt{\frac{1}{2}\log\frac{-1}{C}}\Big)$ pro $-1 < C < 0$;

Po substituci $z = \frac{1}{y^2}$ vyjde rovnice $-\dfrac{1}{2}z' + 2xz = 2x$.

5. $y_1(x) = x - 2 + \sqrt{C - 2x}$ a $y_2(x) = x - 2 - \sqrt{C - 2x}$ na $(-\infty,\frac{C}{2})$, $C \in \mathbf{R}$;

Po substituci $z = y - x$ vyjde rovnice $1 + z'(z+2) = 0$,

což vede na kvadratickou rovnici $\dfrac{z^2}{2} + 2z = -x + C$.

6. Po substituci $z = \sqrt{y}$ vyjde rovnice $z' - \dfrac{2z}{x} = \dfrac{x}{2}$.

Mechanickým postupem zjistíme, že $x^4(\frac{1}{2}\log|x| + C)^2$ je řešení.

Toto řešení je ovšem možné lepit s $y \equiv 0$ a nezapomínáme na podmínku $z \geq 0$.

Celkem: $y(x) = 0$ je řešení na $\mathbf{R}$; Dále nechť $C, C_1, C_2 \in \mathbf{R}$, pak

$$y(x) = \begin{cases} x^4(\frac{1}{2}\log|x| - C)^2 & \text{pro } x \in (-\infty, -e^{-2C}] \\ 0 & \text{pro } x \in [-e^{-2C}, \infty) \end{cases} \quad \text{je řešení na } \mathbf{R}.$$

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, e^{-2C}] \\ x^4(\frac{1}{2}\log|x| - C)^2 & \text{pro } x \in [e^{-2C}, \infty) \end{cases} \quad \text{je řešení na } \mathbf{R}.$$

$$y(x) = \begin{cases} x^4(\frac{1}{2}\log|x| - C_1)^2 & \text{pro } x \in (-\infty, -e^{-2C_1}] \\ 0 & \text{pro } x \in [-e^{-2C_1}, e^{-2C_2}] \\ x^4(\frac{1}{2}\log|x| - C_2)^2 & \text{pro } x \in [e^{-2C_2}, \infty) \end{cases} \quad \text{je řešení na } \mathbf{R}.$$

7. $y_{1,2}(x) = 3 + (1 \pm \sqrt{2})(x+1)$ na $\mathbf{R}$ a $y_{3,4}(x) = 3 + (x+1)(1 \pm \sqrt{2 + C(x+1)^{-2}})$ na $(-\infty, -1)$ a $(-1, \infty)$ pro $C > 0$ a na $(-1-\sqrt{\frac{-C}{2}}, -1)$ a $(-1, -1+\sqrt{\frac{-C}{2}})$ pro $C < 0$;

Po substituci $u = x + 1$ a $v(u) = y - 3$ vyjde rovnice $(u + v) + (u - v)v' = 0$,

a po substituci $z = \dfrac{v}{u}$ dostaneme rovnici $(1 - z)z'u = z^2 - 2z - 1$.

12. cvičení

Nalezněte řešení diferenciální rovnice

1. $y'' - y = 2e^x - x^2$ splňující počáteční podmínku $y(0) = 1$ a $y'(0) = 2$.

Nalezněte obecné řešení následujících diferenciálních rovnic:

2. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$; 3. $y^{(5)} - y'' = \sin x$;

4. $y'' + y = x \sin x$; 5. $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$, 6. $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x} \sin \dfrac{4}{5}x$.

Výsledky a návody:

1. $-e^{-x} + xe^x + x^2 + 2$; Obecné řešení je $C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2$.

2. $C_1xe^x + C_2e^x + e^x x \log|x|$; Partikulární řešení hledáme variací konstant ve tvaru $C_1(x)xe^x + C_2(x)e^x$. Standartním způsobem dostaneme soustavu

$$C_1'xe^x + C_2'e^x = 0 \text{ a } C_1'(e^x + xe^x) + C_2'e^x = \frac{e^x}{x}.$$

3. $C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_5e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x$.

4. $C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{x \sin x}{4} - \dfrac{x^2 \cos x}{4}$;

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_0(x) = x(a + bx)\sin x + x(c + dx)\cos x$.

5. $C_1x^3 + C_2\frac{1}{x}$; Substitucí $y(x) = z(\log x)$ převedeme na rovnici $z'' - 2z' - 3z = 0$. Ta má řešení $C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$, které snadno převedeme.

6. $-\dfrac{1}{8}xe^{\frac{3}{5}x}\cos\frac{4}{5}x + C_1e^{\frac{3}{5}x}\cos\frac{4}{5}x + C_2e^{\frac{3}{5}x}\sin\frac{4}{5}x$.

Přeji Vám mnoho úspěchů při zkouškách.