

Matematická analýza

S. Hencl, L. Pick, J. Spurný a M. Zelený

Obsah

Kapitola 1. Příklady na integrování	1
1.1. Per partes a substituce	1
1.2. Integrace racionálních funkcí	8
1.3. Integrace funkcí, které lze převést na integraci racionálních funkcí	15
1.4. Integrace trigonometrických funkcí	20
1.5. Aplikace integrálů	26

KAPITOLA 1

Příklady na integrování

Z teorie známe a budeme používat integrály následujících elementárních funkcí

$$\begin{aligned}\int C dx &= Cx && \text{pro } x \in \mathbb{R} \\ \int x^n dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1} && \text{pro } x \in \mathbb{R} \text{ a } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \int x^\alpha dx &= \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} && \text{pro } x \in (0, \infty) \text{ a } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \int x^z dx &= \frac{1}{z+1}x^{z+1} && \text{pro } x \in (0, \infty) \text{ nebo } x \in (-\infty, 0) \text{ a } -z \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ \int e^x dx &= e^x && \text{pro } x \in \mathbb{R} \\ \int \frac{1}{x} dx &= \log|x| && \text{pro } x \in (0, \infty) \text{ nebo } x \in (-\infty, 0) \\ \int \sin x dx &= -\cos x && \text{pro } x \in \mathbb{R} \\ \int \cos x dx &= \sin x && \text{pro } x \in \mathbb{R} \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x && \text{pro } x \in \mathbb{R} \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cotg x && \text{pro } x \in (k\pi, \pi + k\pi) \text{ a } k \in \mathbb{Z} \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x && \text{pro } x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \text{ a } k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

1.1. Per partes a substitute

1.1. Poznámka. Nedílnou součástí výpočtu primitivní funkce je také určení definičního oboru integrované funkce a určení, na kterém intervalu je spočtená funkce primitivní funkcí.

Připomeňme také, že podle Věty 1.1 je výsledná primitivní funkce určena jednoznačně až na aditivní konstantu. Tento fakt nebudeme neustále připomínat a spokojíme se s tím, že určíme jednu z primitivních funkcí.

1.2. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{1}{2x+3} dx.$$

Řešení. Tento příklad nejprve vyřešíme formálně za použití Věty o substituci a poté ukážeme standardní zkrácený zápis, který se běžně používá. Použijeme Větu 1.1 o substituci pro ZKONTROLUJ ZNACENÍ S VETOU AZ BUDE SEPSANA

$$\varphi(x) = 2x + 3, \quad f(y) = \frac{1}{y}, \quad F(y) = \log |y|, \quad (a, b) = (0, \infty) \text{ a } (\alpha, \beta) = \left(-\frac{3}{2}, \infty\right).$$

Levá strana ve větě je rovna

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int \frac{1}{2x+3} 2 dx$$

a pravá strana je rovna

$$F \circ \varphi(x) = \log |2x + 3|.$$

Odtud tedy dostáváme, že

$$\int \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \log |2x + 3| \text{ pro } x \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right).$$

Stejný postup můžeme použít i pro

$$(a, b) = (-\infty, 0) \text{ a } (\alpha, \beta) = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$$

a dostaneme, že výsledná funkce je primitivní i na intervalu $(-\infty, -\frac{3}{2})$.

Předchozí postup je příliš formální a zdlouhavý, a proto se běžně při výpočtu používá pouze jeho zkrácená verze. Je ale dobré si alespoň jednou pořádně promyslet, že formálním dosazením do věty a tímto zkráceným postupem dostáváme to samé. Při zkráceném postupu si označíme $y = 2x + 3$ a derivací dostaneme

$$y' = \frac{dy}{dx} = (2x + 3)' = 2.$$

Z této rovnice si neformálně spočteme

$$dx = \frac{dy}{2}$$

a příliš se nestaráme, že výrazy nemají formálně smysl. Tuto identitu si dosadíme do integrálu za dx a dostaneme

$$\int \frac{1}{2x+3} dx = \int \frac{1}{y} \frac{dy}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \log |y| = \frac{1}{2} \log |2x + 3|.$$

Vzhledem k tomu, že funkce $\frac{1}{2} \log |y|$ je primitivní na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, tak snadno dostaneme, že výsledná funkce je primitivní na intervalu $(-\infty, -\frac{3}{2})$ a na intervalu $(-\frac{3}{2}, \infty)$. V dalších příkladech už budeme používat pouze tento zkrácený neformální postup. ♣

1.3. Příklad. Spočítejte

$$\int x \log x \, dx .$$

Řešení. Integrovaná funkce je definovaná na intervalu $(0, \infty)$ a tam budeme hledat i její primitivní funkci. U tohoto příkladu si můžeme všimnout, že derivací logaritmu dostaneme funkci $1/x$, která je výrazně jednodušší a lépe se integruje. Zkusíme tedy použít per partes pro

$$u'(x) = x \text{ a } v(x) = \log(x) .$$

Snadno spočteme, že

$$u(x) = \frac{x^2}{2} \text{ a } v'(x) = \frac{1}{x} .$$

Za použití Věty ??? o výpočtu metodou per partes tedy dostaneme

$$\begin{aligned} \int x \log x \, dx &= \int u'(x)v(x) \, dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} . \end{aligned}$$

Během výpočtu nemáme žádné další problémy s definičním oborem, a proto je výsledná funkce primitivní na celém intervalu $(0, \infty)$. ♣

1.4. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, dx .$$

Řešení. Zadanou funkci si můžeme upravit jako

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} ,$$

což nám připomene derivaci funkce arctan. Proto použijeme substituci $y = x + 1$ a snadno si spočteme

$$y' = \frac{dy}{dx} = (x + 1)' = 1, \text{ a tedy } dx = dy .$$

Podle věty o substituci dostaneme

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, dx = \int \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} \, dx = \int \frac{1}{y^2 + 1} \, dy = \arctan y = \arctan(x + 1) .$$

Nikde nenastanou žádné problémy s definičním oborem, a proto je výsledná funkce primitivní na celém \mathbb{R} . ♣

1.5. Příklad. Spočítejte

$$\int x^2 \cos x \, dx .$$

Řešení. Při derivování se nám funkce x^2 zjednoduší na polynom nižšího stupně a \cos se integrováním změní na zhruba stejně složitou funkci \sin . Proto za pomoci per partes pro

$$u_1(x) = x^2, \quad v_1'(x) = \cos x, \quad \text{a tedy } u_1'(x) = 2x, \quad v_1(x) = \sin x$$

dostáváme

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx .$$

Zbýlý integrál dopočteme opětovným použitím per partes, neboť derivace $2x$ je již konstantní funkce. Označme tedy

$$u_2(x) = 2x, \quad v_2'(x) = \sin x, \quad \text{a tedy } u_2'(x) = 2, \quad v_2(x) = -\cos x$$

a dostáváme

$$\int 2x \cos x \, dx = -2x \cos x - \int 2(-\cos x) \, dx = -2x \cos x + 2 \sin x .$$

Celkově tedy vychází

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$$

a snadno zjistíme, že funkce je primitivní na celém \mathbb{R} . ♣

1.6. Příklad. Spočítejte

$$\int |x| \, dx .$$

Řešení. Toto je první příklad, u kterého si vysvětlíme techniku takzvaného lepení primitivních funkcí. Zadaná funkce je na intervalu $(0, \infty)$ rovna x , a proto je zde její primitivní funkce rovna $\frac{x^2}{2} + C_1$. Na intervalu $(-\infty, 0)$ máme funkci $-x$ a primitivní funkce je tedy rovna $-\frac{x^2}{2} + C_2$.

Otázkou je, jestli existuje i nějaká primitivní funkce definovaná na celém \mathbb{R} . Podle Věty ??? je každá primitivní funkce spojitá, a tedy by muselo platit

$$C_2 = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{x^2}{2} + C_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} + C_1 = C_1 .$$

Jediným kandidátem na primitivní funkci na celém \mathbb{R} je tedy funkce

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + C & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} + C & \text{pro } x \in [0, \infty) . \end{cases}$$

Podle Věty ??? pro každou spojitou funkci existuje primitivní funkce na celém intervalu, a proto je tato F primitivní k zadané funkci na celém \mathbb{R} . Tento fakt se dá odůvodnit i jinak. Funkce F je podle prvního odstavce primitivní na intervalu $(-\infty, 0)$ i na intervalu

$(0, \infty)$ a zbývá ověřit $F'(0) = f(0) = |0| = 0$. Tento fakt by šel ověřit přímým výpočtem z definice derivace, nebo se dá snadno ověřit pomocí Věty ??? o limitě jednostranných derivací. Funkce F je totiž spojitá a pro limitu jednostranných derivací platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0,$$

a tedy $F'(0) = 0$. Funkce F je tedy skutečně primitivní na celém \mathbb{R} . ♣

1.7. Příklad. Spočítejte

$$\int x e^{-x^2} dx.$$

Řešení. Funkce x vypadá skoro jako připravená derivace funkce $-x^2$. Zvolíme proto substituci $y = -x^2$ a dostáváme

$$y' = \frac{dy}{dx} = -2x, \text{ a tedy } x dx = \frac{dy}{-2}.$$

Podle věty o substituci dostáváme

$$\int x e^{-x^2} dx = \int e^y \frac{dy}{-2} = -\frac{1}{2} e^y = -\frac{1}{2} e^{-x^2},$$

a tato funkce je zřejmě primitivní na celém \mathbb{R} . ♣

1.8. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{\log x}{x \sqrt{1 + \log x}} dx.$$

Řešení. Definiční obor zadané funkce snadno určíme z nerovnosti $1 + \log x > 0$ jako interval $(\frac{1}{e}, \infty)$. Funkce $\frac{1}{x}$ je derivací funkce $1 + \log x$, a proto se nám celý výraz výrazně zjednoduší při použití substituce $y = 1 + \log x$. Dostáváme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \text{ a tedy } \frac{1}{x} dx = dy$$

a podle věty o substituci

$$\begin{aligned} \int \frac{\log x}{x \sqrt{1 + \log x}} dx &= \int \frac{y-1}{\sqrt{y}} dy = \int \sqrt{y} dy - \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy \\ &= \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - 2y^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{(1 + \log x)^3} - 2\sqrt{1 + \log x}. \end{aligned}$$

Nejsou žádné další problémy s definičním oborem, a proto je výsledná funkce primitivní na celém intervalu $(\frac{1}{e}, \infty)$. ♣

1.9. Příklad. Spočítejte

$$\int x \arctan x dx.$$

Řešení. Funkce $\arctan x$ se nám zjednoduší při derivování, a proto zkusíme použít per partes pro

$$u(x) = \arctan x, \quad v'(x) = x, \quad \text{a tedy } u'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} \int x \arctan x \, dx &= \arctan x \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{1+x^2} \frac{x^2}{2} \, dx = \arctan x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{(1+x^2) - x^2}{1+x^2} \, dx \\ &= \arctan x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int 1 \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctan x \end{aligned}$$

a tato funkce je zřejmě primitivní na celém \mathbb{R} . ♣

1.10. Příklad. Spočítejte

$$\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} \, dx.$$

Řešení. Definiční obor snadno zjistíme z nerovnosti $\sin x \geq 0$ jako

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, \pi + 2k\pi].$$

Funkce $\sqrt{\sin x}$ je příliš složitá na integrování, a proto nás určitě napadne si ji zjednodušit pomocí substituce $y = \sin x$. Snadno dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \text{a tedy } \cos x \, dx = dy.$$

Zbylou funkci $\cos^5 x = \cos x (\cos^2 x)^2$ si přepíšeme pomocí identity

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

a podle věty o substituci dostaneme

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} \, dx &= \int (1 - \sin^2 x)^2 \sqrt{\sin x} \cos x \, dx = \int (1 - y^2)^2 \sqrt{y} \, dy \\ &= \int \left(y^{\frac{1}{2}} - 2y^{\frac{5}{2}} + y^{\frac{9}{2}} \right) dy = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - 2 \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11} y^{\frac{11}{2}} \\ &= \frac{2}{3} (\sin x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7} (\sin x)^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11} (\sin x)^{\frac{11}{2}}. \end{aligned}$$

Tato funkce je primitivní na libovolném z intervalů $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ pro $k \in \mathbb{Z}$. ♣

1.11. Příklad. Pro $a, b \in \mathbb{R}$ spočítejte

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

Řešení. Zadaná funkce je spojitá, a tedy podle Věty ??? existuje její primitivní funkce $F_{a,b}(x)$ všude na \mathbb{R} . Pro $a \neq 0$ použijeme per partes pro

$$u_1(x) = \cos bx, \quad v_1'(x) = e^{ax}, \quad \text{a tedy } u_1'(x) = -b \sin bx, \quad v_1(x) = \frac{1}{a}e^{ax}$$

a dostaneme

$$F_{a,b}(x) = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a}e^{ax} \cos bx + \int \frac{b}{a}e^{ax} \sin bx \, dx .$$

Na zbývající integrál použijeme per partes pro

$$u_2(x) = \sin bx, \quad v_2'(x) = e^{ax}, \quad \text{a tedy } u_2'(x) = b \cos bx, \quad v_2(x) = \frac{1}{a}e^{ax}$$

a dostaneme

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a}e^{ax} \sin bx - \int \frac{b}{a}e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a}e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a}F_{a,b}(x) .$$

Celkově tedy dostáváme

$$F_{a,b}(x) = \frac{1}{a}e^{ax} \cos bx + \int \frac{b}{a}e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a}e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2}e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2}F_{a,b}(x) .$$

Z této rovnice již snadno dopočteme

$$F_{a,b}(x) = \frac{a}{a^2 + b^2}e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2 + b^2}e^{ax} \sin bx$$

a toto je primitivní funkce na celém \mathbb{R} . Připomeňme ještě, že veškeré integrované funkce byly spojité, a tedy primitivní funkce vždy existovaly a veškeré výpočty tedy byly korektní. Snadno ověříme, že tato funkce je primitivní i pro $a = 0$. ♣

1.12. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{\arctan e^x}{e^x} \, dx .$$

Řešení. Nejprve zkusíme použít per partes pro

$$u(x) = \arctan e^x, \quad v'(x) = e^{-x}, \quad \text{a tedy } u'(x) = \frac{1}{e^{2x} + 1}e^x, \quad v(x) = -e^{-x}$$

a dostaneme

$$\int \frac{\arctan e^x}{e^x} \, dx = -\arctan e^x e^{-x} + \int \frac{1}{e^{2x} + 1}e^x e^{-x} \, dx .$$

Na zbývající integrál použijeme substituci $y = e^{2x}$ a za pomoci

$$\frac{dy}{dx} = 2e^{2x}, \quad \text{a tedy } e^{2x} dx = \frac{dy}{2}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^{2x} + 1} dx &= \int \frac{1}{e^{2x}(e^{2x} + 1)} e^{2x} dx = \int \frac{1}{y(y+1)} \frac{dy}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \frac{1}{2} (\log|y| - \log|y+1|) = \frac{1}{2} \log \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}. \end{aligned}$$

Celkově tedy dostáváme

$$\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx = -\arctan e^x e^{-x} + \frac{1}{2} \log \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$

a tato funkce je primitivní na celém \mathbb{R} . ♣

1.13. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{1}{\sin x} dx.$$

Řešení. Definiční obor snadno určíme z $\sin x \neq 0$ jako

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi).$$

Později se naučíme, jak takovéto příklady řešit 'algoritmickým' postupem. V tuto chvíli nás může napadnout následující mírně 'triková' úprava

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Nyní již nás může napadnout substituce $y = \tan \frac{x}{2}$, pro kterou platí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}, \text{ a tedy } \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = 2dy.$$

Pomocí věty o substituci dostaneme

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{1}{2y} 2 dy = \log|y| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

a tato funkce je primitivní na každém z intervalů $(k\pi, (k+1)\pi)$ pro $k \in \mathbb{Z}$. ♣

1.2. Integrace racionálních funkcí

V této sekci se naučíme integrovat racionální lomené funkce. Podle Kapitoly ??? z přednášky víme, že každá racionální lomená funkce lze rozložit jako součet několika

jednodušších typů racionálních funkcí. Tyto typy funkcí lze pak jednoduchou substitucí převést na jeden z následujících známých integrálů:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x|, \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x^k} dx = \frac{1}{-k+1} x^{-k+1} \text{ pro } k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}, \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x, \quad (3)$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \log(1+x^2), \quad (4)$$

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)^n} dx = \frac{1}{1-n} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \text{ a} \quad (5)$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx =: I_n, \quad (6)$$

kde I_n lze spočítat rekurzivně pomocí známého integrálu I_1 a vzorečku získaném per partes (viz ???)

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} x \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

Například pro $n = 1$ dostaneme

$$I_2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} x \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{1}{2} x \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \arctan x.$$

Výsledná funkce bude vždy primitivní na každém intervalu, který neobsahuje žádný kořen polynomu z jmenovatele.

1.14. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{x^4}{x^3-1} dx.$$

Řešení. Celý výpočet rozdělíme do čtyřech kroků. Tyto čtyři kroky u tohoto prvního příkladu detailně okomentuje a provedeme. U dalších příkladů již budeme stručnější.

1.krok Zajistíme, aby stupeň polynomu ve jmenovateli byl vyšší než stupeň polynomu v čitateli. Obecně vydělíme polynom polynomem. U zadaného jednoduchého příkladu si to můžeme také elementárně rozepsat

$$\frac{x^4}{x^3-1} = \frac{x^4-x}{x^3-1} + \frac{x}{x^3-1} = x + \frac{x}{x^3-1}.$$

2.krok Rozložíme jmenovatel výsledného zlomku na součin co nejjednodušších reálných polynomů stupně jedna nebo dva. U zadaného příkladu dostáváme

$$(x^3-1) = (x-1)(x^2+x+1).$$

3.krok Výslednou racionální funkci rozložíme na parciální zlomky podle postupu z Kapitoly ????. Podle Věty ??? existují jednoznačně určené $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}. \quad (7)$$

Nyní musíme tyto neznámé hodnoty a, b, c nalézt. Rovnost (7) si vynásobíme jmenovatelem a dostaneme

$$x = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x - 1) = (a + b)x^2 + (a - b + c)x + (a - c).$$

Dva polynomy se rovnají právě tehdy, když se rovnají koeficienty u všech mocnin x , a proto dostáváme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} 0 &= a + b \\ 1 &= a - b + c \\ 0 &= a - c. \end{aligned}$$

Tuto soustavu vyřešíme za pomoci znalostí z lineární algebry. Předpokládáme, že čtenář umí řešit soustavy rovnic, a proto se tímto nebudeme detailně zaobírat. NEBO TO ALESPON U JEDNOHO PŘÍKLADU DETAILNE UDELAT???? Řešením zadané soustavy dostaneme $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ a $c = \frac{1}{3}$. Celkově tedy zatím máme

$$\frac{x^4}{x^3 - 1} = x + \frac{x}{x^3 - 1} = x + \frac{\frac{1}{3}}{x - 1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2 + x + 1}.$$

Poznamenejme ještě, že celý výpočet neznámých a, b, c se dá i urychlit. Do rovnosti

$$x = a(x^2 + x + 1) + (bx + c)(x - 1)$$

můžeme dosadit jednotlivé kořeny jmenovatele. Například dosazením $x = 1$ ihned dostáváme

$$1 = a(1 + 1 + 1) + (b + c)(1 - 1) = 3a, \text{ a tedy } a = \frac{1}{3}.$$

U jednoduchých příkladů s malým počtem neznámých můžeme klidně použít postup jako nahoře. U složitějších příkladů nám zredukování počtu neznámých může celý výpočet výrazně urychlit a také se sníží pravděpodobnost numerické chyby.

4.krok Jednotlivé členy zintegrujeme za pomoci známých integrálů (1) až (5). U našeho příkladu dostáváme

$$\int \frac{x^4}{x^3 - 1} dx = \int x dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} dx.$$

První integrál je jeden ze základních

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}.$$

Druhý snadnou substitucí $y = x - 1$ převedeme na (1) a dostaneme

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \int \frac{1}{y} dy = \log|y| = \log|x-1|.$$

Třetí integrál si rozdělíme na dvě části z nichž první spočteme za pomoci substituce $y = 2x + 1$ a (4)

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)}{x^2+x+1} dx + \int \frac{-\frac{3}{2}}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx. \end{aligned}$$

U zbylého integrálu si nejprve jmenovatel upravíme na čtverec

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1 \right)$$

a poté ho za pomoci substituce $y = \sqrt{\frac{4}{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ převedeme na (3) a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+x+1} dx &= \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{y^2+1} \sqrt{\frac{3}{4}} dy \\ &= \sqrt{\frac{4}{3}} \arctan y = \sqrt{\frac{4}{3}} \arctan \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Celkově tedy máme

$$\int \frac{x^4}{x^3-1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \log|x-1| - \frac{1}{6} \log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right) \right)$$

a tato funkce je primitivní na intervalu $(-\infty, 1)$ a na intervalu $(1, \infty)$. ♣

1.15. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{x^3 - 4x - 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$$

Řešení. Nejprve si zadané polynomy vydělíme na

$$\frac{x^3 - 4x - 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 5x^2 + 6x} + \frac{5x^2 - 10x - 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{5x^2 - 10x - 6}{x^3 - 5x^2 + 6x}.$$

Jmenovatel si rozložíme na

$$x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3),$$

a proto hledáme rozklad na parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{5x^2 - 10x - 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}.$$

Do identity

$$5x^2 - 10x - 6 = a(x-2)(x-3) + bx(x-3) + cx(x-2)$$

můžeme postupně dosadit $x = 0$, $x = 2$, $x = 3$ a dostaneme $a = -1$, $b = 3$ a $c = 3$. Celkově tedy máme

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 4x - 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx &= \int 1 dx - \int \frac{1}{x} dx + 3 \int \frac{1}{x-2} dx + 3 \int \frac{1}{x-3} dx \\ &= x - \log|x| + 3 \log|x-2| + 3 \log|x-3| \end{aligned}$$

a tato funkce je primitivní na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 3)$ a $(3, \infty)$. ♣

1.16. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{x^9 - 5}{x^2 - 1} dx.$$

Řešení. Vydělením polynomů dostaneme

$$\frac{x^9 - 5}{x^2 - 1} = x^7 + x^5 + x^3 + x + \frac{x-5}{x^2-1}.$$

Budeme tedy hledat rozklad na parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{x-5}{x^2-1} = \frac{x-5}{(x+1)(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}.$$

Z rovnice

$$x-5 = a(x-1) + b(x+1)$$

snadno dostaneme, že $a = 3$ a $b = -2$. Celkově tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{x^9 - 5}{x^2 - 1} dx &= \int x^7 dx + \int x^5 dx + \int x^3 dx + \int x dx + \int \frac{3}{x+1} dx + \int \frac{-2}{x-1} dx \\ &= \frac{x^8}{8} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 3 \log|x+1| - 2 \log|x-1| \end{aligned}$$

na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, \infty)$. ♣

1.17. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{1}{x^4 - 1} dx.$$

Řešení. Jmenovatel snadno rozložíme jako

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1),$$

a proto hledáme rozklad na parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 + 1}.$$

Z rovnosti

$$1 = a(x + 1)(x^2 + 1) + b(x - 1)(x^2 + 1) + (cx + d)(x - 1)(x + 1)$$

dostaneme dosazením $x = -1$ a $x = 1$ postupně $a = \frac{1}{4}$ a $b = -\frac{1}{4}$. Hodnoty neznámých c a d poté můžeme dopočítat porovnáním koeficientů u ostatních mocnin x v této identitě a dostaneme $c = 0$ a $d = -\frac{1}{2}$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4 - 1} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{4} \log|x - 1| - \frac{1}{4} \log|x + 1| - \frac{1}{2} \arctan x \end{aligned}$$

a tato funkce je primitivní na intervalech $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ a $(1, \infty)$. ♣

1.18. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{1}{x^4 + 1} dx.$$

Řešení. Při hledání rozkladu jmenovatele můžeme buď použít znalost komplexních čísel a hledání odmocnin $z = -1$, nebo můžeme vzorec pro $a^2 - b^2$ a použít úpravu

$$x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x).$$

Hledáme tedy rozklad na parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{ax + b}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{cx + d}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

a obvyklým postupem dostaneme

$$\begin{aligned} 1 &= (ax + b)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + (cx + d)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \\ &= (a + c)x^3 + (-\sqrt{2}a + b + \sqrt{2}c + d)x^2 + (a - \sqrt{2}b + c + \sqrt{2}d)x + (b + d). \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= a + c \\ 0 &= -\sqrt{2}a + b + \sqrt{2}c + d \\ 0 &= a - \sqrt{2}b + c + \sqrt{2}d \\ 1 &= b + d \end{aligned}$$

dostaneme

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad d = \frac{1}{2}.$$

První integrál si můžeme rozložit na dva a použít substituci $y = x^2 + \sqrt{2}x + 1$

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx &= \int \frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}(2x + \sqrt{2})}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \log(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx \end{aligned}$$

U posledního integrálu můžeme použít úpravu na čtverec a substituci $y = \sqrt{2}x + 1$

$$\int \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = 2 \int \frac{1}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1} dx = \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}x + 1).$$

Analogicky můžeme postupovat i u druhého členu a celkově dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4 + 1} dx &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \log(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x - 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x + 1) \end{aligned}$$

a tato funkce je primitivní na celém \mathbb{R} . ♣

1.19. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{x^2 + x}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx.$$

Řešení. Vidíme, že jmenovatel se dá napsat jako

$$x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 = (x^2 + 1)^3.$$

Použijeme-li standardní značení integrálů z (6), tak dostaneme

$$\int \frac{x^2 + x}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx = \int \frac{(x^2 + 1) - 1 + x}{(x^2 + 1)^3} dx = I_2 - I_3 + \int \frac{x}{(x^2 + 1)^3} dx$$

Poslední integrál je podle (5) (nebo snadno substitucí $y = x^2 + 1$) roven

$$\int \frac{x}{(x^2 + 1)^3} dx = -\frac{1}{4} \frac{1}{(1 + x^2)^2}.$$

Podle rekurentního vzorečku pro I_n tedy dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x}{x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \arctan x - \\ &- \left[\frac{1}{4x} \left(\frac{1}{1 + x^2} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2x^2 + 1} + \frac{1}{2} \arctan x \right) \right] - \frac{1}{4} \frac{1}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

a toto je primitivní funkce na celém \mathbb{R} . ♣

1.3. Integrace funkcí, které lze převést na integraci racionálních funkcí

V této kapitole si ukážeme několik typů funkcí, jejichž integrál lze vhodnou substitucí převést na integrování racionální funkce. Nechť R je racionální funkce jedné nebo dvou proměnných a $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(A) Pro $\int R(e^{ax}) dx$ volíme substituci $y = e^{ax}$, pokud $a \neq 0$.

(B) Pro $\int R(\log x) \frac{dx}{x}$ volíme substituci $y = \log x$.

(C) Pro $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ volíme substituci $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$,
pokud $ad - bc \neq 0$.

(D) Úlohu $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, kde $ax^2 + bx + c$ má dva různé kořeny, převedeme vhodnou úpravou na typ (C).

(E) Pro $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ volíme substituci
 $y + \sqrt{ax} = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ pokud $a > 0$.

Jak se při integraci jednotlivých typů postupuje bude jasné z následujících příkladů.

1.20. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{1}{x(\log^2 x - 5 \log x + 6)} dx.$$

Řešení. Jedná se o integrál typu (B), a proto volíme substituci $y = \log x$. Snadno dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \text{ a tedy } \frac{dx}{x} = dy.$$

Podle věty o substituci spočteme

$$\int \frac{1}{x(\log^2 x - 5 \log x + 6)} dx = \int \frac{1}{y^2 - 5y + 6} dy.$$

Tento integrál z racionální funkce počítáme obvyklým způsobem

$$\frac{1}{y^2 - 5y + 6} = \frac{1}{(y-3)(y-2)} = \frac{a}{y-3} + \frac{b}{y-2}.$$

Z rovnice

$$1 = a(y-2) + b(y-3)$$

dostaneme postupným dosazením hodnot $y = 3$ a $y = 2$, že $a = 1$ a $b = -1$. Nyní už integrál snadno dopočteme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(\log^2 x - 5 \log x + 6)} dx &= \int \frac{1}{y-3} dy - \int \frac{1}{y-2} dy \\ &= \log|y-3| - \log|y-2| = \log \left| \frac{\log x - 3}{\log x - 2} \right|. \end{aligned}$$

Při určení výsledných intervalů nezapomeneme na definiční obor logaritmu $(0, \infty)$ a na podmínky $y \neq 2$ a $y \neq 3$. Dostaneme, že výsledná funkce je primitivní na intervalech $(0, e^2)$, (e^2, e^3) a (e^3, ∞) . ♣

1.21. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{1}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}} dx.$$

Řešení. Než se pustíme do výpočtu, tak si uvědomíme, že

$$1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}} = 1 + \left(e^{\frac{x}{6}}\right)^3 + \left(e^{\frac{x}{6}}\right)^2 + e^{\frac{x}{6}}.$$

Jedná se tedy o integrál typu (A) pro $a = \frac{1}{3}$. Volíme tedy substituci $y = e^{\frac{x}{6}}$ a dostáváme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}e^{\frac{x}{6}}, \text{ odkud dostaneme } 6dy = e^{\frac{x}{6}} dx.$$

Pomocí věty o substituci dostaneme

$$\int \frac{1}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}} dx = \int \frac{e^{\frac{x}{6}}}{e^{\frac{x}{6}}(1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}})} dx = \int \frac{6}{y(1 + y^3 + y^2 + y)} dy.$$

Rozklad na parciální zlomky tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{y(1 + y^3 + y^2 + y)} = \frac{1}{y(y+1)(y^2+1)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{y+1} + \frac{cy+d}{y^2+1}$$

Neznámé konstanty nalezneme obvyklým způsobem, který již zde nebudeme detailně rozepisovat, a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}} dx &= 6 \int \frac{1}{y} dy - 3 \int \frac{1}{1+y} dy - \frac{3}{2} \int \frac{2y}{1+y^2} dy + 3 \int \frac{1}{1+y^2} dy \\ &= x - 3 \log(1 + e^{\frac{x}{6}}) - \frac{3}{2} \log(1 + e^{\frac{x}{3}}) + 3 \arctan e^{\frac{x}{6}}. \end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že tato funkce je primitivní na celém \mathbb{R} . ♣

1.22. Příklad. Spočítejte

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{x} dx.$$

Řešení. Než se pustíme do řešení, tak si určíme definiční obor integrované funkce jako $(-1, 1] \setminus \{0\}$. Jedná se o integrál typu (C), a proto budeme volit substituci

$$y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \quad (8)$$

Toto je první příklad, kde budeme používat druhou větu o substituci - Větu ????. Narozdíl od první věty o substituci bude potřeba ověřit, že funkce udávající změnu proměnných je prostá a určit na jakých intervalech je prostá. Později uvidíme, že ověření tohoto předpokladu je skutečně nutné, aby nám vyšel správný výsledek. Umocněním (8) a úpravou dostaneme

$$y^2(1+x) = 1-x$$

a odtud lehce odvodíme

$$x = \frac{1-y^2}{1+y^2}.$$

Nedá velkou práci si uvědomit, že tato funkce zobrazí interval $(0, 1)$ prostě na interval $(0, 1)$ a interval $(1, \infty)$ prostě na $(-1, 0)$. Pokud si chceme pamatovat 'jednoduché pravidlo', kdy používáme substituci prvního a druhého druhu, tak si stačí uvědomit následující. Při substituci prvního druhu typicky počítáme $\frac{dy}{dx}$ a při substituci druhého druhu počítáme $\frac{dx}{dy}$. Dostaneme

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{1-y^2}{1+y^2} \right) = \frac{-4y}{(1+y^2)^2}, \text{ a tedy } dx = \frac{-4y}{(1+y^2)^2} dy.$$

Podle druhé věty o substituci máme

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{x} dx = \int y \frac{1}{\frac{1-y^2}{1+y^2}} \frac{-4y}{(1+y^2)^2} dy = \int \frac{4y^2}{y^4-1} dy.$$

Rozklad na parciální zlomky tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{4y^2}{y^4-1} = \frac{4y^2}{(y+1)(y-1)(y^2+1)} = \frac{a}{y+1} + \frac{b}{y-1} + \frac{cy+d}{y^2+1}.$$

Neznámé konstanty nalezneme obvyklým způsobem a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{x} dx &= \int \frac{1}{y+1} dy - \int \frac{1}{y-1} dy - 2 \int \frac{1}{1+y^2} dy \\ &= \log \left| 1 + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right| - \log \left| 1 - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right| - 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \end{aligned}$$

Tato funkce je primitivní na intervalu $(-1, 0)$ a na intervalu $(0, 1)$. ♣

1.23. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}} dx.$$

Řešení. Definiční obor zadané funkce je celé \mathbb{R} . Jedná se o integrál typu (E), a proto použijeme substituci

$$y + x = \sqrt{x^2 + 2x + 4}. \quad (9)$$

Umocněním dostaneme

$$y^2 + 2xy = 2x + 4$$

odkud snadno odvodíme

$$x = \frac{y^2 - 4}{2(1 - y)}.$$

PRIDAT NEJAKE KECY O PROSTOTE A ODKUD KAM? Opět tedy použijeme substituci druhého druhu a derivací posledního vztahu dostaneme

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y^2 + 2y - 4}{2(1 - y^2)}, \text{ a tedy } dx = \frac{-y^2 + 2y - 4}{2(1 - y^2)} dy.$$

Podle druhé věty o substituci máme

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx = \int \frac{\frac{y^2-4}{2(1-y)}}{y + \frac{y^2-4}{2(1-y)}} \frac{-y^2 + 2y - 4}{2(1 - y^2)} dy = \int \frac{y^2 - 4}{2y^2 - 4y + 2} dy.$$

Rozklad na parciální zlomky tedy hledáme ve tvaru

$$\frac{y^2 - 4}{2y^2 - 4y + 2} = \frac{1}{2} + \frac{2y - 5}{2(y - 1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{(y - 1)} + \frac{b}{(y - 1)^2}.$$

Neznámé konstanty nalezneme obvyklým způsobem a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx &= \int \frac{1}{2} dy + \int \frac{1}{y - 1} dy - \frac{3}{2} \int \frac{1}{(y - 1)^2} dy \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x) + \log(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x + 1) + \frac{3}{2(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1)} \end{aligned}$$

kde jsme dosadili $y = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - x$ z rovnice (9). Tato funkce je primitivní na celém \mathbb{R} . ♣

1.24. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{x - 1}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})} dx.$$

Řešení. Definiční obor zadaného výrazu je interval $(0, \infty)$. Po chvílce přemýšlení přijdeme na to, že druhá i třetí odmocnina jsou mocniny šesté odmocniny, a tedy se jedná o integrál typu

$$\int R(x, \sqrt[6]{x}) dx = \int R\left(x, \sqrt[6]{\frac{1x + 0}{0x + 1}}\right) dx,$$

neboli o typ (C). Volíme tedy substituci

$$y = \sqrt[6]{x},$$

odkud máme

$$x = y^6 .$$

Toto zobrazení nám zřejmě zobrazí interval $(0, \infty)$ prostě na interval $(0, \infty)$. Derivací dostaneme

$$\frac{dx}{dy} = 6y^5, \text{ a tedy } dx = 6y^5 dy .$$

Podle druhé věty o substituci máme

$$\int \frac{x-1}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})} dx = \int \frac{y^6-1}{y^6(y^3+y^4)} 6y^5 dy = 6 \int \frac{y^6-1}{y^4(y+1)} dy .$$

Rozklad na parciální zlomky tedy hledáme ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{y^6-1}{y^4(y+1)} &= y-1 + \frac{y^4-1}{y^4(y+1)} = y-1 + \frac{(y-1)(y^2+1)}{y^4} \\ &= y-1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^4} . \end{aligned}$$

Integrací dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})} dx &= 6 \int \left(y-1 + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^4} \right) dy \\ &= 6 \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{2} - \sqrt[6]{x} + \ln \sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3\sqrt{x}} \right) . \end{aligned}$$

Tato funkce je primitivní na celém intervalu $(0, \infty)$. ♣

PRIDEJ JEDEN INTEGRAL NA TYP (D)

1.25. Příklad. Spočítejte

$$\int \sqrt{\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+1}} dx .$$

Řešení. Tento integrál není na první pohled žádný ze základních typů. Na druhý pohled ovšem zjistíme, že se dá na takový integrál převést za pomoci substituce

$$y = e^x, \text{ a tedy } dy = e^x dx .$$

Dostaneme

$$\int \sqrt{\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+1}} \frac{e^x}{e^x} dx = \int \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2+2y+1}} \frac{1}{y} dy = \int \sqrt{\frac{1-y}{y+1}} \frac{1}{y} dy .$$

Tento integrál jsme spočítali v Příkladu 1.22, a proto můžeme rovnou napsat výsledek

$$\int \sqrt{\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+1}} dx = \log \left| 1 + \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}} \right| - \log \left| 1 - \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}} \right| - 2 \arctan \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}} .$$

V Příkladu 1.22 byla funkce primitivní na intervalech $(-1, 0)$ a $(0, 1)$. Naše funkce je tedy primitivní, pokud $y = e^x \in (0, 1)$, neboli na intervalu $(-\infty, 0)$. ♣

1.4. Integrace trigonometrických funkcí

Připomeňme si, jaké druhy substitucí můžeme volit na integrály typu

$$\int R(\sin x, \cos x) dx ,$$

kde R je racionální funkce dvou proměnných.

- (A) Pokud $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak lze volit substituci $t = \sin x$.
- (B) Pokud $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak lze volit substituci $t = \cos x$.
- (C) Pokud $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pak lze volit substituci $t = \tan x$.
- (D) Vždy lze volit substituci $t = \tan \frac{x}{2}$.

Poznamenejme, že bývá většinou snazší volit jednodušší substituci. Pokud můžeme volit substituci typu (A) i (C), tak raději volíme (A), a substituci typu (D) si necháváme v záloze pouze na příklady, které nelze řešit jinak. Při použití nevhodného typu substituce můžeme například rozkládat na parciální zlomky výraz, kde stupeň ve jmenovateli je příliš velký a tím zbytečně ztrácíme čas a zvýší se pravděpodobnost chyby.

Jak se při integraci jednotlivých typů postupuje bude jasné z následujících příkladů. Nejprve ale poznamenejme, že u typů (C) a (D) volíme substituci druhého druhu, a proto se dobré si dopředu rozmyslet, na jakých intervalech tyto substituce provádíme.

(C): Je dobré si pamatovat, že u substituce typu (C) dostaneme z identity $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ rovnost $t^2 + 1 = 1/\cos^2 x$. Odtud již snadno dostaneme

$$\cos^2 x = \frac{1}{t^2 + 1} \quad \text{a} \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{t^2}{t^2 + 1} .$$

Dále derivací rovnosti $x = \arctan t$ odvodíme

$$dx = \frac{1}{1 + t^2} dt .$$

Snadno si rozmyslíme, že substituci $x = \arctan t$ můžeme použít na libovolném intervalu $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, neboť tento interval se zobrazí na \mathbb{R} prostě.

(D): Použitím známých identit pro trigonometrické funkce dostaneme

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

a také

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Dále derivací rovnosti $x = 2 \arctan t$ odvodíme

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Snadno si rozmyslíme, že substituci $x = 2 \arctan t$ můžeme použít na libovolném intervalu $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, neboť tento interval se zobrazí na \mathbb{R} prostě. **KECY PREDELEJ**

1.26. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx.$$

Řešení. Pro naši racionální funkci dvou proměnných $R(x, y) = \frac{1}{yx^2}$ platí

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\cos x) \sin^2 x} = -\frac{1}{\cos x \sin^2 x} = -R(\sin x, \cos x).$$

Jedná se tedy o typ (A) a můžeme volit substituci $t = \sin x$. Snadno odvodíme $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$ a derivací dostaneme

$$\frac{dt}{dx} = \cos x, \text{ a tedy } dy = \cos x dx.$$

Podle věty o substituci tedy dostáváme

$$\int \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} \cos x dx = \int \frac{1}{(1-t^2)t^2} dt.$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{(1-t^2)t^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t-1} + \frac{d}{t+1}.$$

Hodnotu neznámých koeficientů spočítáme obvyklým způsobem a dostáváme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx &= \int \frac{1}{t^2} dt - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t-1} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1} dt \\ &= -\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2} \log |1 - \sin x| + \frac{1}{2} \log |1 + \sin x|. \end{aligned}$$

Vezmeme-li do úvahy definiční obor integrované funkce, tak snadno dostaneme, že tato funkce je primitivní na intervalech $(k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2})$ pro $k \in \mathbb{Z}$. ♣

1.27. Příklad. Spočítejte

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx.$$

Řešení. Pro naši racionální funkci dvou proměnných $R(x, y) = \frac{1}{1+3y^2}$ platí

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{1+3(-\cos x)^2} = \frac{1}{1+3\cos^2 x} = R(\sin x, \cos x).$$

Jedná se tedy o typ (A) a můžeme volit substituci $t = \tan x$. Nejprve si záměrně předvedeme rychlý neformální postup, který nebude zcela správně. Potom si vysvětlíme, v čem není postup korektní a jak to napravit.

Podle návodu z části (C): máme $\cos^2 x = \frac{1}{t^2+1}$ a $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx &= \int \frac{1}{1+3\frac{1}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t^2+4} dt \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{\tan x}{2}. \end{aligned}$$

Nyní bychom mohli zkusit 'mechanickým způsobem' dosadit do určitého integrálu a dostaneme

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+3\cos^2 x} dx = \left[\frac{1}{2} \arctan \frac{\tan x}{2} \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \arctan \frac{\tan \pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan \frac{\tan 0}{2} = 0.$$

Dostali bychom, že integrál nezáporné nenulové funkce je roven nule. To by nás mělo trochu znervóznit a přinutit zamyslet se, kde udělali soudruzi z NDR chybu :-).

Při použití substituce druhého druhu totiž musíme ověřit, že zadané funkce je prostá a na. Funkce

$$\frac{1}{2} \arctan \frac{\tan x}{2} + C$$

je tedy primitivní k zadané funkci na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a je primitivní na intervalu $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, ale není primitivní na celém intervalu $(0, \pi)$. Zadaná funkce je spojitá, a proto podle Věty ??? existuje její primitivní funkce na celém intervalu $(0, \pi)$. Na nalezení primitivní funkce na celém intervalu $(0, \pi)$ použijeme metodu lepení. Primitivní funkci budeme hledat ve tvaru

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \arctan \frac{\tan x}{2} + C_1 & \text{na } [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{1}{2} \arctan \frac{\tan x}{2} + C_2 & \text{na } [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Konstantu C_1 můžeme zvolit libovolně například $C_1 = 0$. Podle Věty ??? víme, že hledaná primitivní funkce musí být spojitá, a proto se musí rovnat následující limity

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{2} \arctan \frac{\tan x}{2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \arctan t = \frac{\pi}{4} \quad \text{a} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{2} \arctan \frac{\tan x}{2} + C_2 = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \arctan t + C_2 = -\frac{\pi}{4} + C_2. \end{aligned}$$

Z rovnosti těchto limit dostaneme, že musí nutně platit $C_2 = \frac{\pi}{2}$. Primitivní funkce existuje, musí být spojitá a jiný než hledaný tvar mít nemůže. Proto je funkce

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \arctan \frac{\tan x}{2} & \text{na } [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{1}{2} \arctan \frac{\tan x}{2} + \frac{\pi}{2} & \text{na } [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

primitivní na celém $(0, \pi)$. Nyní již korektně dostáváme

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + 3 \cos^2 x} dx = F(\pi) - F(0) = 0 + \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

♣

1.28. Příklad. Spočítejte

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

Řešení. Opět snadno zjistíme, že se jedná o typ (A) a můžeme tedy volit substituci $t = \tan x$. Podle návodu z části (C): máme $\sin^2 x = \frac{2t}{1+t^2}$ a $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$. Dostáváme tedy

$$\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{t^2}{(t^2 + 1)(2t^2 + 1)} dt.$$

Standardním způsobem rozložíme na parciální zlomky a ty zintegrujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{(t^2 + 1)(2t^2 + 1)} dt &= \int \left(\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{1}{2t^2 + 1} \right) dt = \arctan t - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}t) \\ &= \arctan(\tan x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x). \end{aligned}$$

Nalezená funkce je tedy primitivní na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Primitivní funkci na intervalu $(0, 2\pi)$ budeme tedy hledat ve tvaru

$$F(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) & \text{na } [0, \frac{\pi}{2}] \\ x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C_1 & \text{na } [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \\ x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C_2 & \text{na } [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}.$$

Primitivní funkce musí být spojitá, a proto lepením zjistíme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} \text{ a} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} F(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} + C_1. \end{aligned}$$

Z rovnosti těchto limit snadno odvodíme $C_1 = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Lepením v $\frac{3\pi}{2}$ dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} + C_1 \text{ a}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x) + C_2 = \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} + C_2 .$$

Z rovnosti těchto limit snadno odvodíme $C_2 = C_1 - \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$. Nyní spočteme zadaný určitý integrál jako

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx = F(2\pi) - F(0) = 2\pi - \sqrt{2}\pi .$$

♣

1.29. Příklad. Spočítejte

$$\int \frac{1}{1 + \sin x} dx .$$

Řešení. Nejprve si všimněme, že integrovaná funkce je definována na libovolném intervalu neobsahujícím body $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$. Není obtížné ověřit, že se nejedná o typ (A), (B), nebo (C), a proto bude potřeba použít substituci $t = \tan \frac{x}{2}$ typu (D). Podle návodu části (D): máme $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ a $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$. Dostáváme tedy

$$\int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{(t+1)^2} dt = -\frac{2}{t+1} = -\frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} .$$

Jedná se o substituci druhého druhu a ta je obecně korektní na intervalech typu $(-pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, ale nesmíme také zapomenout na body $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, které vadí definičnímu oboru. Pro $k \in \mathbb{Z}$ máme tedy na intervalu $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ primitivní funkci

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} & \text{na } (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \\ -\frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} + C_1 & \text{na } (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi) \end{cases} .$$

Snadno zjistíme, že pro $C_1 = 0$ platí

$$\lim_{x \rightarrow \pi + 2k\pi^-} F(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \pi + 2k\pi^+} F(x) .$$

Funkce

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\tan \frac{x}{2} + 1} & \text{pro } x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi) \cup (\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi) \\ 0 & \text{pro } x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

je tedy primitivní na celém intervalu $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

♣

1.30. Příklad. Spočítejte

$$\int_0^{100\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 - \sin x} dx .$$

Řešení. Opět se jedná se o integrál typu (D) a použijeme substituci $t = \tan \frac{x}{2}$. Podle návodu části (D): máme $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ a $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ a dostaneme

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2 - \sin x} dx &= \int \frac{1}{2 - \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{t^2 - t + 1} dt \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2 \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

Nejsou žádné problémy s definičním oborem, a proto je tato funkce primitivní na každém z intervalů $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hledejme tedy primitivní funkci ve tvaru

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2 \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} \right) & \text{na } [-\pi, \pi] \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2 \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} \right) + C_1 & \text{na } [\pi, 3\pi] \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2 \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} \right) + C_k & \text{na } [-\pi + k2\pi, \pi + 2k\pi] \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2 \tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{3}} \right) + C_{50} & \text{na } [99\pi, 101\pi] \end{cases}$$

Lepení v π zjistíme

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} \text{ a } \lim_{x \rightarrow \pi^+} F(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} + C_1,$$

odkud snadno odvodíme $C_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Analogicky lepením v bodě $\pi + 2k\pi$ dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow \pi + 2k\pi^-} F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} + C_k \text{ a } \lim_{x \rightarrow \pi + 2k\pi^+} F(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{2} + C_{k+1},$$

odkud dostáváme $C_{k+1} = C_k + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = (k+1) \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Hodnotu určitého integrálu nyní spočteme jako

$$\int_0^{100\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 - \sin x} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2 \tan \frac{\pi}{8} - 1}{\sqrt{3}} \right) + 50 \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right).$$

♣

1.5. Aplikace integrálů

Nechť $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ je spojitá funkce. Obsah plochy mezi grafem f a osou x se dá spočítat jako

$$\text{obsah}(\{[x, y] : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}) = \int_a^b f(x) dx. \quad (10)$$

1.31. Příklad. Spočítejte obsah plochy mezi grafy funkcí

$$y = \frac{x^2}{2} \quad \text{a} \quad y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Řešení. Průsečíky grafů těchto dvou funkcí snadno zjistíme z rovnice

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Snadno spočítáme, že této rovnici vyhovují dva kořeny $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$. Jediná omezená plocha mezi grafy těchto funkcí tedy leží v intervalu $[-1, 1]$ nad grafem funkce $\frac{x^2}{2}$ a pod grafem funkce $y = \frac{1}{1+x^2}$. Díky vzorci (10) víme, že obsah plochy pod grafem nezáporné funkce je vyjádřen pomocí určitého integrálu. Proto námi hledaný obsah je roven obsahu pod grafem funkce $y = \frac{1}{1+x^2}$ minus obsah pod grafem funkce $\frac{x^2}{2}$. Dostáváme tedy

$$S = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx - \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} dx = [\arctan x]_{-1}^1 - \left[\frac{x^3}{6} \right]_{-1}^1 = 2 \arctan 1 - 2 \frac{1}{6}.$$

♣

Délka křivky zadané pomocí grafu C^1 funkce f se dá spočítat

$$\text{délka}(\{[x, y] : x \in [a, b], y = f(x)\}) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (11)$$

1.32. Příklad. Spočítejte délku grafu funkce

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \quad \text{pro} \quad x \in [0, 4].$$

Řešení. Snadno si spočteme derivaci zadané funkce jako

$$f'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{x}.$$

Podle vzorečku (11) tedy spočteme hledanou délku jako

$$\text{délka} = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} \sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} = \left[\frac{2}{3} \frac{4}{9} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{8}{27} (10^{\frac{3}{2}} - 1).$$

♣

Objem tělesa vzniklého rotací spojité funkce $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ okolo osy x se dá spočítat pomocí vzorce

$$\text{objem}(\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}) = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (12)$$

1.33. Příklad. Spočítejte objem jednotkové koule v \mathbb{R}^3 .

Řešení. Jednotková koule je zřejmě rotační těleso, neboť si ji můžeme napsat jako

$$B(0, 1) = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \in [-1, 1], y^2 + z^2 \leq 1 - x^2\}.$$

Tedy použitím vzorce (12) pro $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ dostáváme

$$\text{objem}(B(0, 1)) = \pi \int_{-1}^1 (\sqrt{1 - x^2})^2 dx = \pi [x - \frac{1}{3}x^3]_{-1}^1 = \pi (1 - \frac{1}{3} - (-1 + \frac{1}{3})) = \frac{4}{3}\pi.$$

♣

Obsah povrchu tělesa vzniklého rotací C^1 funkce $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ okolo osy x se dá spočítat pomocí vzorce

$$\text{obsah}(\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 = f^2(x)\}) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (13)$$

1.34. Příklad. Spočítejte obsah jednotkové sféry v \mathbb{R}^3 .

Řešení. Jak jsme viděli u minulého příkladu, tak jednotková koule vznikne rotací funkce

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{pro } x \in [-1, 1]$$

okolo osy x . Snadno spočteme derivaci této funkce jako

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} (-2x).$$

Podle vzorce (13) dostáváme

$$\text{obsah}(S(0, 1)) = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}} dx = 4\pi.$$

♣

