Aritmetika a algebra II

Osnova předmětu

1. Lineární rovnice, řešení v tělesech $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$, počet řešení v okruhu $\mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{P}$.
2. Kvadratická rovnice. Didaktický postup, řešení speciálních případů, odvození Viétových vzorců. Odvození vzorce pro kořeny: klasické doplnění na čtverec, mezopotámské řešení na základě Viétových vzorců, řešení soustavy z Vietových vět. Geometrické znázornění reálných a komplexních kořenů rovnice s reálnými koeficienty.
3. Kubická rovnice. Substituce pro odstranění členu obsahujícího x^2, Cardanův postup řešení (substituce $y = u + v$), kvadratická resolventa, diskriminant kubické rovnice, význam výrazu $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Získání všech kořenů pomocí $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$. Vlastnosti u, v. Vietovy vzorce. Casus irreducibilis – řešení pomocí goniometrické substituce.
4. Rovnice binomické, trinomické, bikvadratické.
5. Reciproká rovnice 1. druhu ($a_k = a_{n-k}$, stupně $n = 2k + 1$ a $n = 2k$) a 2. druhu ($a_k = -a_{n-k}$), vlastnosti, kořeny, řešení.
6. Základní věta algebry a její důsledky.

7. Konstrukce oboru celých a racionálních čísel, abstraktní podstata obou konstrukcí: rozšíření komutativního monoidu na grupu. Podílové pole oboru integrity celých čísel.
8. Iracionální čísla. Důkaz iracionality odmocnin přirozených čísel, která nejsou čtverci. Čísla algebraická a transcendentní. Mohutnost množiny všech algebraických čísel. Liouvilleovo číslo, mohutnost množiny všech transcendentních čísel. Bez důkazu: věta Gelfandova–Schneiderova. Důkaz iracionality čísla e. Pro zajímavost: důkaz iracionality čísla π (nezkouší se). Konstrukce druhých odmocnin.
9. Pole reálných čísel – zavedení: 1) desetinné rozvoje, 2) Dedekindovy řezy, 3) axiomatické zavedení reálných čísel, 4) základní myšlenka zúplnění $\mathbb{Q}$, cauchyovské posloupnosti.
10. Pole komplexních čísel: zavedení (problémy se zavedením), vlastnosti, geometrie v komplexní souřadnici.
11. Hyperkomplexní čísla: neúspěšné snahy o aritmetizaci bodů (třírozměrného) prostoru, tj. rozšíření $\mathbb{C}$ o jednu další imaginární jednotku; kvaterniony (základní myšlenka).

12. Řetězové zlomky: konečné, nekonečné, periodické; výpočet článků řetězového zlomku čísel racionálních, iracionálních, druhých odmocnin. Aproximace racionálních a iracionálních čísel řetězovými zlomky, přesnost aproximace, chování posloupnosti konvergentů (věta „o cikcaku“). Řešení lineární diofantické rovnice a Pellovy rovnice pomocí řetězových zlomků.
13. Průměry: harmonický, geometrický, aritmetický, kvadratický. Geometrické znázornění, úloha o pohybu a harmonický průměr.
14. Grupy, homomorfismy grup, faktorizace. Relace kongruence, normální podgrupa, jádro homomorfismu je normální podgrupou. Lagrangeova věta. Cyklické grupy.
15. Dělitelnost, prvočinitel, ireducibilní prvek, nsn, NSD, eukleidovské obory integrity.

Literatura k předmětu:

[BeDla] Bečvář J., Dlab V.: *Od aritmetiky k abstraktní algebře.* Serifa, Praha, 2016.

Podmínky udělení zápočtu:

- portfolio: je třeba jej přinést ke zkoušce (praktická část), ověřuje se samostatné vypracovávání domácích úkolů (úlohy označené hvězdičkou) v průběhu semestru
- úspěšné napsání testíku s úlohami (tzv. praktická část) na kterémkoli vypsaném termínu zkoušky (je možno používat samostatný kalkulátor; ne v mobilu, ne grafický)

Požadavky ke zkoušce:
zkouškový testík (tzv. teoretická část) cca 90 min., ověřuje se dobrá znalost teorie (definice, věty, důkazy) v rozsahu probíraném na seminářích (včetně úloh zadávaných k samostatnému rozmyšlení)

Materiály k jednotlivým tématům

- lineární a kvadratická rovnice: zde
- kubická rovnice: zde
- casus irreducibilis, binomické a trinomické rovnice: zde
- odmocniny a reciproké rovnice: zde
- tzv. základní věta algebry: zde

- text o konstrukci $(\mathbb{Z}, +)$ na základě $(\mathbb{N}, +)$, rozšíření komutativního monoidu na grupu a o zavedení $\mathbb{Q}$: zde
- tabule ke konstrukci podílového pole: zde
- tabule k iracionálním číslům (a také algebraickým a transcendentním): zde
- tabule k důkazu iracionality e a π: zde (důkaz iracionality π se nezkouší)
- reálná čísla: v příslušné kapitole
- komplexní a hyperkomplexní čísla: zde
- pro zájemce: hyperkomplexní čísla – scan z knihy: zde

- řetězové zlomky, lineární diofantická rovnice a Pellova rovnice: zde (kromě poslední strany věnované souvislosti ŘZ s řadami)
- průměry: zde
- faktorizace grup (základní idea) a Lagrangeova věta: zde

1 Kvadratická rovnice

1. * Najděte všechna řešení rovnice v $\mathbb{Z}_3$ (tj. v poli):
   a) $x^2 + 2 = 0$ b) $x^2 + x + 1 = 0$ c) $x^2 + x + 2 = 0$ d) $x^3 + 2x = 0$

   A pro zajímavost – kořenů může být více, než je stupeň rovnice
   a) $x^3 + 5x$ v $\mathbb{Z}_6$ b) $x^3 + 5x + 1$ v $\mathbb{Z}_6$

2. * Vyřešte mezopotámským způsobem kvadratickou rovnici
   $$x^2 + 2 = 3x\,.$$

3. * Najděte souřadnice vrcholu V paraboly $y = ax^2 + bx + c$.

4. Pomocí prostředků matematické analýzy objevte diskriminant: najděte extrém funkce $f : y = ax^2 + bx + c$ a rozeberte následující případy:
   - f má dva různé průsečíky s osou x (f je konvexní a hodnota extrému je záporná, f je konkávní a hodnota extrému je kladná),
   - f se dotýká osy x (hodnota extrému je nulová),
   - f nemá průsečíky s osou x (f je konvexní a hodnota extrému je kladná, f je konkávní a hodnota extrému je záporná).

5. Pro nadšence: Pokuste se odvodit, jak by bylo možno znázornit kořeny kvadratické rovnice s reálnými koeficienty, které jsou komplexní.

1.1 Komplexní kořeny kvadratické rovnice

Uvažujme kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Má-li tato rovnice

- 2 různé reálné kořeny, jsou rovny x-ovým souřadnicím průsečíků paraboly

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

  s osou x,

- 1 dvojnásobný kořen, je roven x-ové souřadnici společného bodu paraboly (1) s osou x,

- 2 různé komplexní kořeny (tj. komplexně sdružené), jak je lze znázornit?

Návod:
Uvažujme parabolu

$$y = (x - \alpha)^2 + \beta^2 \,,$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Souřadnice vrcholu V této paraboly jsou: $\quad V = [\alpha, \beta^2]$.
Hledejme nulové body; dostaneme rovnici

$$(x - \alpha)^2 = -\beta^2 \,,$$

jejímiž kořeny jsou

$$\boxed{z_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta \,.}$$

Porovnejte tento výsledek se znázorněním kořenů rovnice, která má kořeny reálné:

$$y = (x - \alpha)^2 - \beta^2 \,,$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$. Souřadnice vrcholu V této paraboly jsou: $\quad V = [\alpha, -\beta^2]$.
Hledejme kořeny; dostaneme rovnici

$$(x - \alpha)^2 = \beta^2 \,,$$

jejímiž kořeny jsou

$$\boxed{z_{1,2} = \alpha \pm \beta \,.}$$

Závěr

- Reálné kořeny leží na ose x *ve vzdálenosti* β *od* x*-ové souřadnice* α *vrcholu* V*.*

- Pokud bychom se na rovinu xy dočasně dívali jako na Gaussovu rovinu, tak komplexně sdružené kořeny kvadratické rovnice s reálnými koeficienty leží na kolmici k reálné ose (ose x) *ve vzdálenosti* β *od reálné části* α *(*x*-ové souřadnice vrcholu* V*).*

Důkladnější výpočet
Určeme reálnou a imaginární část nulových bodů funkce komplexní proměnné $x \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} y(x) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 &= (x_1 + \mathrm{i}x_2 - \alpha)^2 + \beta^2 = [(x_1 - \alpha) + \mathrm{i}x_2]^2 + \beta^2 \\ &= (x_1 - \alpha)^2 - x_2^2 + \beta^2 \quad + \quad 2\mathrm{i}x_2\,(x_1 - \alpha)\,. \end{aligned}$$

Nulové body lze tedy najít snadno: $y(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Re\, y(x) = 0$ a $\Im\, y(x) = 0$. Imaginární část se rovná nule právě tehdy, když $x_1 - \alpha = 0$ ($x_2 \neq 0$, neboť by pak rovnice měla jen reálné kořeny). Reálná část x_1 obou kořenů je tedy $x_1 = \alpha$.

Reálná část funkce $y(x)$ se rovná nule právě tehdy, když $(x_1-\alpha)^2+\beta^2 = x_2^2$, tj. $\beta^2 = x_2^2$. Imaginární část x_2 obou kořenů je proto $x_2 = \pm\beta$. Celkově má tedy funkce $y(x)$ nulové body $x_1 + \mathrm{i}x_2 = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$.

Otázka pro zájemce. Existuje podobná souvislost komplexních kořenů s vrcholy také u kubické rovnice?

2 Kubická rovnice – Cardanův postup

stačí vypracovávat pouze úlohy označené hvězdičkou

1. Najděte jeden kořen následující kubické rovnice Cardanovým postupem.

$$x^3 + 6x - 20 = 0$$

   Ostatní kořeny najděte tak, že levou stranu vydělíte známým kořenovým činitelem a vyřešíte vzniklou kvadratickou rovnici.

2. * Najděte jeden kořen následující kubické rovnice Cardanovým postupem.

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$$

   Následně najděte i ostatní kořeny této rovnice.
   (pro kontrolu: $y^3 - 2y - 4 = 0$, kvadratická resolventa je $t^2 - 4t + \frac{8}{27} = 0$)

3. Vyřešte binomickou rovnici (v $\mathbb{C}$): $z^3 = 1$. Řešení zapište v goniometrickém i algebraickém tvaru.

4. * Ukažte, že všechny komplexní kořeny binomické rovnice $z^3 = a$, $a \in \mathbb{R}$, lze zapsat ve tvaru:

$$x_1 = \sqrt[3]{a}\,, \qquad x_2 = \varepsilon \cdot \sqrt[3]{a}\,, \qquad x_3 = \varepsilon^2 \cdot \sqrt[3]{a}\,.$$

   Je předpoklad $a \in \mathbb{R}$ nutný?

5. Všimněte si, že právě v tomto tvaru

$$\sqrt[3]{t_1} = \{u\,, \quad \varepsilon \cdot u\,, \quad \varepsilon^2 \cdot u\}\,, \qquad \sqrt[3]{t_2} = \{v\,, \quad \varepsilon \cdot v\,, \quad \varepsilon^2 \cdot v\}\,,$$

   jsou komponenty kořenů

$$x_1 = u + v\,,$$
$$x_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v\,,$$
$$x_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v\,.$$

   kubické rovnice

$$x^3 + px + q = 0\,.$$

6. Dle Vietových vět platí: $x_1+x_2+x_3 = 0$; pozorujme, že koeficienty ε a ε^2 jsou skutečně umístěny tak, že $x_1 + x_2 + x_3 = 0$:

$$x_1 + x_2 + x_3 \quad = \quad u + \varepsilon u + \varepsilon^2 u \quad + \quad v + \varepsilon^2 v + \varepsilon v$$
$$= (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) \cdot u + (1 + \varepsilon + \varepsilon^2) \cdot v \;=\; 0 \cdot u + 0 \cdot v = 0\,.$$

7. * Označme jednu z třetích odmocnin z jedné řeckým písmenem ε:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,.$$

   Ukažte, že

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0\,.$$

8. * Ukažte, že předchozí tvrzení lze snadno zobecnit: označíme-li

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\,,$$

   tak platí:

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0\,.$$

9. * a) Ukažte, že platí následující tvrzení: jsou-li komplexní čísla $u = r\cdot(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ a $v = r\cdot(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)$ komplexně sdružená, jsou komplexně sdruženými také jejich třetí mocniny.
   b) Platí analogické tvrzení pro druhé mocniny?

3 Kubická rovnice – diskriminant

1. * U kvadratické rovnice jsme objevili diskriminant prostředky matematické analýzy. Pokuste se provést totéž u kubické rovnice (uvažujte funkci $y = x^3 + px + q$).

2. * Najděte všechny kořeny rovnice $x^3 - 3x - 2 = 0$ standardním Cardanovým postupem. Vyšetřete průběh funkce $y = x^3 - 3x - 2$ (najděte extrémy, inflexní body, intervaly, kde je tato funkce rostoucí, klesající, konvexní, konkávní) a načrtněte její graf.

3. Zopakujte si: diskriminantem kubické rovnice $x^3 + px + q = 0$ rozumíme výraz:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 .$$

   Pokud jsou $p, q \in \mathbb{R}$, má tato kubická rovnice v případě, že:

   - $D < 0$, všechny tři kořeny reálné (tzv. *casus irreducibilis*),
   - $D > 0$, jeden reálný a dva komplexně sdružené kořeny,
   - $D = 0$, násobné kořeny.

4. *Zajímavost.* Pro rozhodování, zda nastává casus irreducibilis, používáme výraz

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 ,$$

   což je modifikovaný diskriminant kvadratické resolventy. Přesně tento výraz se vyskytuje v Cardanových vzorcích pod druhou odmocninou. Pozor: ani diskriminant kvadratické resolventy, ani uvedený výraz D přísně vzato *není* diskriminantem kubické rovnice. Diskriminant D_n polynomiální rovnice stupně n je pojem, který bude důkladně zaveden v 5. ročníku. U kubické rovnice pak odvodíme, že jejím diskriminantem je výraz

$$\boxed{D_3 = -27\cdot 4\cdot\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right),}$$

   který se od námi používaného D liší nejen faktorem $27\cdot 4$, ale i znaménkem (což je celkem nepříjemnost).

4 Kubická rovnice – casus irreducibilis

1. * Pokuste se najít jeden kořen následující kubické rovnice Cardanovým postupem.

$$x^3 - 13x + 12 = 0$$

Alespoň jeden kořen dopočítejte až „do konce“. (Tato rovnice má tři reálné kořeny, všechny jsou celými čísly. Aspoň jeden kořen vyjádřený pomocí třetích odmocnin komplexních čísel z Cardanových vzorců tedy dopočítejte až do podoby celého čísla. Třetí odmocniny komplexních čísel můžete hledat např. pomocí goniometrického tvaru a Moiverovy věty.)

2. * U následujících rovnic ověřte (pomocí diskriminantu), že nastává casus irreducibilis, následně najděte všechny jejich kořeny pomocí goniometrických substitucí.
a) $x^3 - 13x + 12 = 0$ b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

5 Rovnice binomická, trinomická a bikvadratická

1. * Najděte v komplexním oboru všechny třetí odmocniny z čísla -8:
a) řešte v $\mathbb{C}$ binomickou rovnici $z^3 = -8$;
b) pokuste se získaná řešení zapsat pomocí $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$.

2. * Napište čtvrtou odmocninu čísla 16 v $\mathbb{R}$ a v $\mathbb{C}$.

3. * Řešte v $\mathbb{C}$ binomickou rovnici

$$z^4 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\,.$$

4. * Řešte v $\mathbb{C}$ bikvadratickou rovnici

$$x^4 + x^2 - 20 = 0\,.$$

5. * Řešte v $\mathbb{C}$ rovnici

$$x^3 \cdot (x^3 - 7) = 12 \cdot (18 + x^3)\,.$$

6. * Najděte v $\mathbb{C}$ všechny kořeny následujících trinomických rovnic.

   a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$
   b) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$ [$3, -\frac{3}{2}(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}), -2, 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}$]

Reciproká rovnice

* **Pozorování**, která jsou zásadní (viz též přednáška):

1. Rovnici

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

vydělte kořenovým činitelem $x + 1$.

2. Rovnici

$$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0$$

vydělte kořenovým činitelem $x - 1$.

6 Reciproké rovnice – teorie

Nechť je dána rovnice ve tvaru

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0\,,$$

kde $a_n \neq 0$.

Reciproká rovnice 1. druhu: $a_i = a_{n-i}$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$

- lichého stupně: má kořen $x_1 = -1$
  po vydělení kořenovým činitelem $x + 1$ zbude reciproká rovnice 1. druhu sudého stupně
- sudého stupně: „prostřední“ koeficient $a_{\frac{n}{2}}$ může být libovolný
  řešíme pomocí substituce $z = x + \frac{1}{x}$

Reciproká rovnice 2. druhu: $a_i = -a_{n-i}$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, n$
- má vždy kořen $x_1 = 1$ (nezávisí na paritě stupně)
- po vydělení kořenovým činitelem $x - 1$ zbude reciproká rovnice 1. druhu (snadno se ověří vydělením $x - 1$)

Pozorování: Reciproká rovnice 2. druhu sudého stupně má jediný „prostřední“ koeficient $a_{\frac{n}{2}}$. Jak vypadá? Jelikož musí platit $a_i = -a_{n-i}$, tak musí být nulový: $a_{\frac{n}{2}} = 0$.

Proč se takové rovnice nazývají reciproké? Pro reciproké rovnice 1. i 2. druhu platí: je-li α kořenem této rovnice, pak je jejím kořenem také $\frac{1}{\alpha}$. A převrácená hodnota se také nazývá *reciproká hodnota*.
Jak tvrzení dokázat: Stačí předpokládat, že reciproká rovnice má kořen α, pak do ní dosadit $\frac{1}{\alpha}$ a ihned bude zřejmé, že je také kořenem.

Reciprokosti lze využít při hledání kořenů: Máme-li zadánu reciprokou rovnici 1. či 2. druhu s celočíselnými koeficienty, můžeme se pokusit hledat její kořeny pomocí Vietových vět. Je-li absolutní člen roven přirozenému číslu, můžeme zkusit všechny jeho dělitele. Výhodou je, že najdeme-li jeden kořen x_0, máme automaticky i další kořen, který je jeho převrácenou hodnotou: $\frac{1}{x_0}$.

Jaké reciproké rovnice lze vyřešit v radikálech? Reciproké rovnice jsou ve speciálním tvaru; díky symetričnosti (či antisymetričnosti) koeficientů stačí znát jen polovinu koeficientů. Podobné je to i s kořeny: také stačí znát jen polovinu kořenů, zbylé totiž jsou jejich převrácenými hodnotami. Díky tomuto speciálnímu tvaru tedy můžeme vždy řešit v radikálech (tj. „vzorečkem“ pro kořeny obsahujícím pouze $+, -, \cdot, :$ a k-té odmocniny) rovnice nejen stupně nižšího než pátého, ale až do stupně „dvojnásobného“, tj. do stupně devátého včetně.

1. Příklad reciproké rovnice, která je řešitelná i po redukci na rovnici polovičního stupně, přestože je to rovnice pátého stupně:

   $$x^{10} + 5\,x^8 + 10\,x^6 + x^5 + 10\,x^4 + 5\,x^2 + 1 = 0\,.$$

   Určete všechny její kořeny v $\mathbb{C}$. Platí i pro její komplexní kořeny, že je-li jejím kořenem $\alpha \in \mathbb{C}$, je také jejím kořenem $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{C}$?

2. Příklad reciproké rovnice, která po redukci na rovnici polovičního stupně není řešitelná:

   $$x^{10} + 5\,x^8 + 11\,x^6 + x^5 + 11\,x^4 + 5\,x^2 + 1 = 0\,.$$

   Proveďte redukci na rovnici polovičního stupně. Platí přesto pro každý z jejích deseti kořenů, že je-li jejím kořenem $\alpha \in \mathbb{C}$, je také jejím kořenem $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{C}$?

Dokažte následující tvrzení (viz též přednáška).

1. Jestliže je n liché a $a_k = a_{n-k}$ pro každé $k = 0, 1, \ldots, n$, pak má tato rovnice kořen $x_1 = -1$.
2. Jestliže $a_k = -a_{n-k}$ pro každé $k = 0, 1, \ldots, n$, pak má tato rovnice kořen $x_1 = 1$.
3. V obou předchozích případech platí: je-li α kořenem této rovnice, pak má také kořen $\frac{1}{\alpha}$.

Pozorování, která jsou zásadní (viz též přednáška):

1. Rovnici
   $$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$
   vydělte kořenovým činitelem $x + 1$.
2. Rovnici
   $$a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0$$
   vydělte kořenovým činitelem $x - 1$.

6.1 Reciproké rovnice – ukázkový příklad

Řešte v $\mathbb{R}$ následující rovnici.

$$6x^5 + 11x^4 - 33x^3 - 33x^2 + 11x + 6 = 0$$

Řešení:

- Jedná se o reciprokou rovnici 1. druhu. Je lichého stupně, tj. jeden kořen je $x_0 = -1$. Vydělíme tedy kořenovým činitelem $x + 1$, dostaneme:

  $$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$$

- Máme tedy reciprokou rovnici (opět 1. druhu, na tom se nic nemění) sudého stupně. Je-li stupeň $2n$, vydělíme rovnici x^n. Toto je klíčový trik vedoucí k řešení. Dostaneme:

  $$6x^2 + \frac{6}{x^2} \quad + 5x + \frac{5}{x} \quad - 38 = 0.$$

- Zavedeme substituci $z = x + \frac{1}{x}$. Uvědomíme si, že $z^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, tj. $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$. Podobně příznivá situace nastane i v případě vyšších mocnin z (což bychom potřebovali, pokud bychom řešili reciprokou rovnici vyššího stupně).

- Rovnice přejde po substituci na tvar:

  $$6(z^2 - 2) \quad + 5z \quad - 38 = 0.$$

- Tuto kvadratickou rovnici ($6z^2 + 5z - 50 = 0$) snadno vyřešíme: $z_1 = -\frac{10}{3}$, $z_2 = \frac{5}{2}$.
- Vrátíme se k původní neznámé x (pomocí substitučního vztahu $z = x + \frac{1}{x}$). První dva kořeny reciproké rovnice tedy získáme řešením rovnice $-\frac{10}{3} = x + \frac{1}{x}$, druhé dva kořeny z rovnice $\frac{5}{2} = x + \frac{1}{x}$. Jsou to vlastně kvadratické rovnice (po vynásobení $x \neq 0$).
- Rovnice $-\frac{10}{3} = x + \frac{1}{x}$, tj. $3x^2 + 10x + 3 = 0$ má kořeny $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$,
rovnice $\frac{5}{2} = x + \frac{1}{x}$, tj. $2x^2 - 5x + 2 = 0$ má kořeny $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$.
- Všechny kořeny zadané reciproké rovnice tedy jsou:

$$-1,\ -3,\ -\frac{1}{3},\ 2,\ \frac{1}{2}\,.$$

6.2 Reciproké rovnice – praxe

1. * Určete typ následujících reciprokých rovnic a najděte všechny jejich kořeny v $\mathbb{R}$.

   a) $6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0$ $[1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}]$

   b) $10x^4 - 77x^3 + 150x^2 - 77x + 10 = 0$ $[2, \frac{1}{2}, 5, \frac{1}{5}]$

   c) $8x^5 - 6x^4 - 83x^3 - 83x^2 - 6x + 8 = 0$ $[-1, -2, -\frac{1}{2}, 4, \frac{1}{4}]$

   d) $6\,x^5 + 11\,x^4 - 33\,x^3 - 33\,x^2 + 11\,x + 6 = 0$

7 Tzv. Základní věta algebry

Pozor: tzv. základní věta algebry sice na první pohled vypadá, že se týká hlavně polynomů, ale v podstatě jde spíše o vlastnost pole komplexních čísel: *je algebraicky uzavřené*.

Počet kořenů polynomu

Jeden z důsledků ZVA je, že polynom stupně $n \geq 1$ nad $\mathbb{C}$ má v $\mathbb{C}$ právě n kořenů (počítáno včetně násobnosti). Tohle však nad jinými poli neplatí. Na začátku semestru jsme na to měli příklady. Pro připomenutí:

Následující rovnice lze řešit zkusmo – dosazením všech hodnot z konečné množiny $\mathbb{Z}_n$.

1. * Najděte v poli $\mathbb{Z}_3$ všechna řešení rovnice $x^2 + x + 2 = 0\,.$
2. * Najděte v okruhu $\mathbb{Z}_6$ všechna řešení rovnice $x^3 + 5x = 0\,.$

8 Racionální čísla

1. * Dokažte, že násobení racionálních čísel je asociativní.

2. * Dokažte, že zobrazení $f\colon (\mathbb{Z},+,\cdot) \to (\mathbb{Q},+,\cdot)$ přiřazující celým číslům třídy ekvivalence dle následujícího předpisu je homomorfismus. Pro každé $n \in \mathbb{Z}$ definujeme

$$f(n) = T([n,1])\,.$$

   Je tedy třeba dokázat, že pro každé $k, n \in \mathbb{Z}$ platí:

$$f(n+k) = f(n) + f(k) \qquad \text{a} \qquad f(n \cdot k) = f(n) \cdot f(k)\,.$$

   Tento homomorfismus realizuje *vnoření* $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ je tedy rozšířením $\mathbb{Z}$.

3. Připomeňte si, jaké struktury tvoří následující množiny s binárními operacemi:

$$(\mathbb{N},+) \quad \text{a} \quad (\mathbb{Z},+)$$

$$(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot) \quad \text{a} \quad (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$$

4. Zkuste si rozmyslet, jak byste na úrovni druhého stupně ZŠ vyložili sčítání zlomků.

9 Iracionální čísla

1. Zopakujte si důkazy tvrzení:
   - mohutnost množiny racionálních čísel je spočetná,
   - mohutnost množiny reálných čísel je nespočetná.

2. * Uměli byste dokázat, že $\log_5 2$ je iracionálním číslem?

3. * Zkonstruujte úsečku délky $\sqrt{3}$ cm.

4. * Převeďte desetinné číslo $0,12$ na zlomek.

5. * Převeďte zlomek $\frac{23}{30}$ na desetinné číslo.

6. * Která z následujících čísel jsou transcendentní? Užijte Gelfandovu–Schneiderovu větu, ověřte splnění jejích předpokladů.

$$\sqrt{5} \quad 2^{\frac{1}{3}} \quad 2^{\sqrt{2}} \quad (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \quad 1^{\pi} \quad e^{\pi} \quad \pi^{e}$$

10 Reálná čísla

Opakování:

1. Připomeňte si zavedení reálných čísel pomocí desetinných rozvojů.

2. Připomeňte si větu o supremu a Cantorův princip uzavřených do sebe vložených intervalů. (Matematická analýza I)

10.1 Různé způsoby zavedení $\mathbb{R}$

Reálná čísla je možno zavést různými způsoby, např.:

1. pomocí desetinných rozvojů (je nutno vyloučit periodu 9 a ošetřit periodu 0),
2. zúplněním $\mathbb{Q}$ (pomocí cauchyovských posloupností).
3. axiomaticky: zde v pdf (pouze pasáže označené svislým červeným pruhem),
4. pomocí Dedekindových řezů: zde v pdf,
   studovat pouze: Def. 1.7, V 1.10, Pozn. 1.11, V 1.12, Úml. 1.13, Def. 1.14, Def. 1.15, V 1.18 + Důsl., Def. 1.21, V 1.22 a 1.23,

Pro zájemce: Vývoj představ o reálných číslech

Mít s sebou na příštím semináři (19. 4.):

- zavedení reálných čísel axiomaticky: zde v pdf (pouze pasáže označené svislým červeným pruhem),
- zavedení reálných čísel pomocí Dedekindových řezů: zde v pdf