Kuželosečky

Zdeněk Halas

KDM MFF UK

Různé přístupy ke kuželosečkám

Kuželosečky jako řezy kuželové plochy

vedeme řezy kuželovou plochou, vzniknou speciální křivky
Proč chceme zkoumat takovéto řezy?

Planimetrické definice kuželoseček

Jak souvisí tyto definice s řezy kuželové plochy?
Odkud se vzaly názvy: „elipsa, parabola, hyperbola“?
výhoda: pohodlněji se s těmito definicemi pracuje

Analytická vyjádření kuželoseček

odvodí se na základě planimetrických definic
skvělé pro výpočty analytickou metodou

Problémy...

Co vedlo ke zkoumání kuželoseček

Původ názvů: elipsa, parabola, hyperbola

Kuželosečky jako řezy kuželové plochy

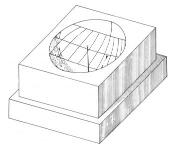
Zajímavé problémy, konstrukce

Co vedlo ke zkoumání řezů kuželové plochy?

Kuželosečky a sluneční hodiny

starší typy slunečních hodin

gnómón (svislý obelisk): délka stínu – velmi nepřesné
(délka stínu se v průběhu roku mění)
Egypt + Mezopotámie → Řecko



skafé: horizontální duté polokulové sluneční hodiny
Řecko 7. stol. př. Kr.
zemská rotace
náročná výroba

rovinné sluneční hodiny
snadná výroba
problém: datové čáry

Rovinné sluneční hodiny – datové čáry

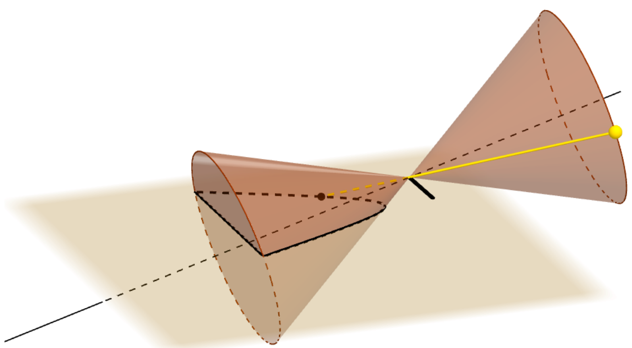
První rovinné sluneční hodiny – Egypt, 4. stol. př. Kr.
(vytvářeny experimentálně)

Problém datové čáry: po jaké křivce se pohybuje konec stínu ukazatele v průběhu daného dne v roce?

- Slunce se v průběhu dne zdánlivě pohybuje po kružnici
- špička ukazatele – bod
- spojením vznikne kuželová plocha
- jejím průnikem s rovinou číselníku je tedy nutně kuželosečka

V našich zeměpisných šířkách vesměs hyperboly.

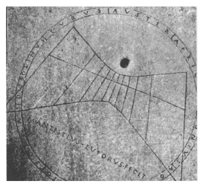
Rovinné sluneční hodiny – datové čáry



Rovinné sluneční hodiny – datové čáry

Výška Slunce se na obloze v průběhu roku mění
⇒
je možno postupně pozorovat soustavu hyperbol.

(výjimka: rovnodennosti – přímky)



Hyperboly:

- umožňují odečítat datum
- usnadňují přesné narýsování hodinových čar

Rovinné sluneční hodiny s datovými čarami
se v antice objevily poté, co se rozšířila základní znalost kuželoseček.
Skafé vzhledem k náročné výrobě ustoupilo.

Počátky zkoumání kuželoseček

Tři slavné problémy antické matematiky

- kvadratura kruhu
- trisekce úhlu
- zdvojení krychle

Zdvojení krychle:

krétský král Mínós ukládající do hrobu svého syna Glauka
byl nespokojen, že je hrobka malá, a tak ji nechal zdvojnásobit,
tj. „zvětšit v tomto poměru ve všech směrech“

geometrům se stále nedařilo takový poměr najít
$\sqrt[3]{2}$ totiž nelze eukleidovsky zkonstruovat

později jistým lidem z ostrova Délos věštba uložila zdvojnásobit jejich oltář

Objev kuželoseček – Menaichmos

Hippokratés z Chiu (2. pol. 5. stol. př. Kr.)
převedl problém *zdvojení krychle* na nalezení **dvou středních úměrných**:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

volbou $a = 2b$ dostaneme

$$y^3 = 2b^3 .$$

Menaichmos (1. polovina 4. stol. př. Kr.)

řešil problém nalezení dvou středních úměrných pomocí kuželoseček:

$$xy = ab, \qquad y^2 = bx ,$$

nebo

$$x^2 = ay, \qquad y^2 = bx .$$

(pokročilá práce s kuželosečkami)

Objev kuželoseček – Menaichmos

Hippokratés z Chiu (2. pol. 5. stol. př. Kr.)
převedl problém *zdvojení krychle* na nalezení **dvou středních úměrných**:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

volbou $a = 2b$ dostaneme

$$y^3 = 2b^3 .$$

Menaichmos (1. polovina 4. stol. př. Kr.)

řešil problém nalezení dvou středních úměrných pomocí kuželoseček:

$$xy = ab, \qquad y^2 = bx ,$$

nebo

$$x^2 = ay, \qquad y^2 = bx .$$

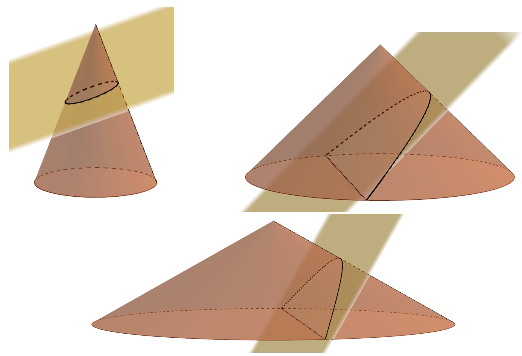
(pokročilá práce s kuželosečkami)

Dvě teorie kuželoseček

1. Starší (např. Archimédés)
   řezy pláště kuželu rovinou kolmou na površku
   volbou úhlu při vrcholu dostaneme:
   - elipsa – *řez ostroúhlého kuželu*
   - parabola – *řez pravoúhlého kuželu*
   - hyperbola – *řez tupoúhlého kuželu*
2. Mladší (Apollónios)
   řezy jedné kuželové plochy
   současné názvy – Apollónios z Pergé (kol. 200 př. Kr.)
   Kónika
   řezy obecně kosé kuželové plochy

Starší teorie kuželoseček (Archimédés)

řezy pláště kuželu rovinou kolmou na površku

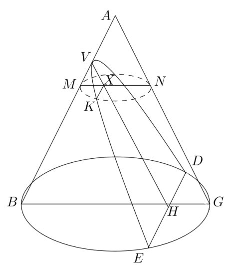


Názvy kuželoseček

Parabola dle Apollónia z Pergé (200 př. Kr.)

podle Eukleidovy věty o výšce:

$$|KX|^2 = |XN| \cdot |MX|$$



- rovnoběžnost $\Rightarrow$ $|XN| = |HG| = \text{konst.}$
- vyjádříme $|MX|$ pomocí $|VX|$

$\triangle VMX \sim \triangle VBH \Rightarrow \quad \dfrac{|MX|}{|VX|} = \dfrac{|BH|}{|VH|}$

tj.: $\quad |MX| = \dfrac{|BH|}{|VH|}\,|VX|$

celkem tedy:

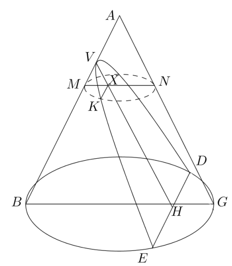
$$|KX|^2 = |XN| \cdot |MX| = |HG|\,\frac{|BH|}{|VH|} \cdot |VX| \cdot$$

$$y^2 = p \cdot x$$

Parabola dle Apollónia z Pergé (200 př. Kr.)

podle Eukleidovy věty o výšce:

$$|KX|^2 = |XN| \cdot |MX|$$



- rovnoběžnost $\Rightarrow$ $|XN| = |HG| = \text{konst.}$
- vyjádříme $|MX|$ pomocí $|VX|$

$\triangle VMX \sim \triangle VBH \Rightarrow \quad \dfrac{|MX|}{|VX|} = \dfrac{|BH|}{|VH|}$

tj.: $\quad |MX| = \dfrac{|BH|}{|VH|}\,|VX|$

celkem tedy:

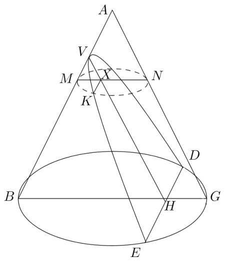
$$|KX|^2 = |XN| \cdot |MX| = |HG|\,\frac{|BH|}{|VH|} \cdot |VX| \cdot$$

$$y^2 = p \cdot x$$

Parabola dle Apollónia z Pergé (200 př. Kr.)

podle Eukleidovy věty o výšce:

$$|KX|^2 = |XN| \cdot |MX|$$



• rovnoběžnost $\Rightarrow$ $|XN| = |HG| =$ konst.

• vyjádřeme $|MX|$ pomocí $|VX|$

$\triangle VMX \sim \triangle VBH \Rightarrow \dfrac{|MX|}{|VX|} = \dfrac{|BH|}{|VH|}$

tj.: $|MX| = \dfrac{|BH|}{|VH|}\,|VX|$

celkem tedy:

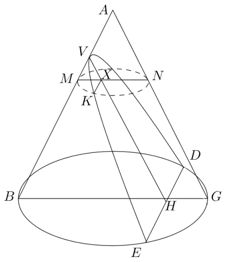
$$|KX|^2 = |XN| \cdot |MX| = |HG|\,\frac{|BH|}{|VH|} \cdot |VX| \cdot$$

$$y^2 = p \cdot x$$

Parabola dle Apollónia z Pergé (200 př. Kr.)

podle Eukleidovy věty o výšce:

$$|KX|^2 = |XN| \cdot |MX|$$



• rovnoběžnost $\Rightarrow$ $|XN| = |HG| =$ konst.

• vyjádřeme $|MX|$ pomocí $|VX|$

$\triangle VMX \sim \triangle VBH \Rightarrow \dfrac{|MX|}{|VX|} = \dfrac{|BH|}{|VH|}$

tj.: $|MX| = \dfrac{|BH|}{|VH|}\,|VX|$

celkem tedy:

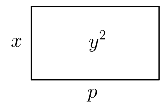
$$|KX|^2 = |XN| \cdot |MX| = |HG|\,\frac{|BH|}{|VH|} \cdot |VX| \cdot$$

$$y^2 = p \cdot x$$

Parabola dle Apollónia (200 př. Kr.)

Přikládání ploch

$$y^2 = p\,x$$



Interpretace:
úloha nalézt k zadané úsečce délky p úsečku délky x takovou, aby měl obdélník s těmito stranami stejný obsah, jako čtverec předepsaného obsahu y^2

přikládání ploch (řecky paraballó), odtud parabolé – parabola

Eukleidovy *Základy*, I, 44

Elipsa a hyperbola

Apollónios I, 12 a 13

Rovnice elipsy/hyperboly (vrchol v počátku):

$$\frac{(x \mp a)^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

vyjádříme-li y^2:

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}\,x \mp \frac{b^2}{a^2}\,x^2$$

Označme $p = \frac{2b^2}{a}$, pak

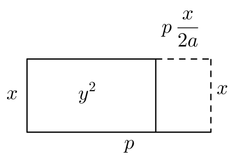
$$y^2 = p\,x \mp \frac{p}{2a}\,x^2$$

minus – elleipsis plus – hyperbolé

Přikládání ploch – elipsa

$$y^2 = p\,x - \frac{p}{2a}\,x^2$$

minus – úloha přiložit k zadané úsečce délky p úsečku délky x takovou, aby výsledný obdélník obsahoval menší obdélník (plnou čarou) se stranou x, který by měl stejný obsah, jako předepsaný čtverec y^2, a zároveň byl **menší o čárkovaný obdélník** podobný zadanému obdélníku se stranami $2a$, p.
Velkému obdélníku tedy chybí (řecky elleipó) čárkovaný obdélník.
Odtud má elipsa svůj název (elleipsis).



Přikládání ploch – hyperbola

$$y^2 = p\,x + \frac{p}{2a}\,x^2$$

plus – obdélník o obsahu y^2 **přesahuje** (řecky hyperballó) obdélník se stranami p, x.

Odtud má hyperbola svůj název (hyperbolé).

Planimetrické definice kuželoseček

a

řezy kuželové plochy

Planimetrická definice elipsy

Elipsa:

množina všech bodů X v rovině, pro něž platí, že součet vzdáleností od dvou pevně zadaných bodů F_1, F_2 je konstantní:

$$|XF_1| + |XF_2| = \text{konst.}$$

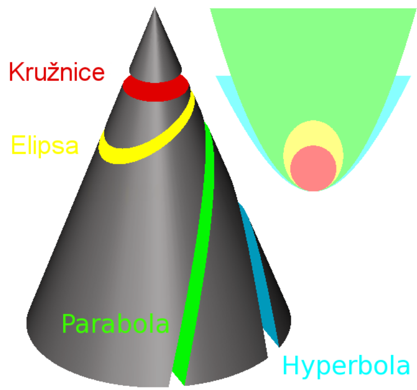
Zvolíme-li KSS tak, aby $F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$, $X = [x, y]$:

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \text{konst.}$$

Při vhodném označení a po úpravách:

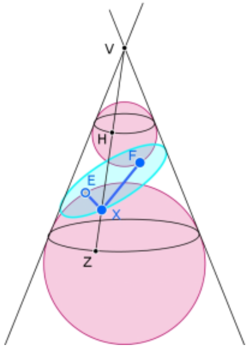
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Kuželosečky jako řezy kuželové plochy

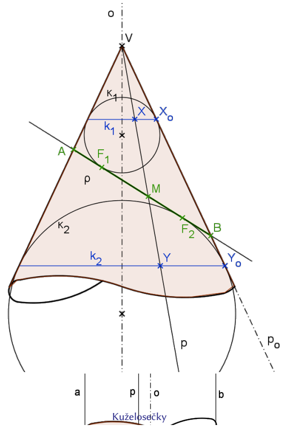


Queteletova--Dandelinova věta (elipsa)

$$|XE| = |XZ|, \quad |XF| = |XH| \quad \Longrightarrow \quad |XE| + |XF| = |XZ| + |XH| = |HZ| = \text{konst.}$$



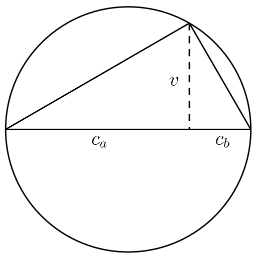
Queteletova--Dandelinova věta



Konstrukce paraboly

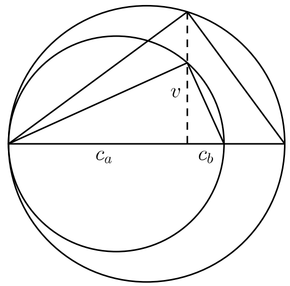
Eukleidova věta o výšce

$$v^2 = c_a \cdot c_b$$



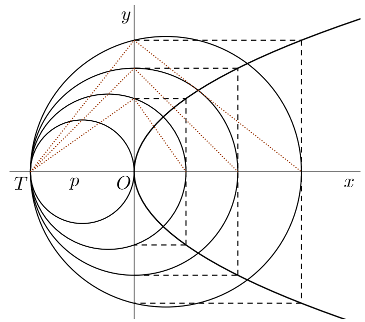
Eukleidova věta o výšce

$$v^2 = c_a \cdot c_b$$
$$y^2 = 2p \cdot x$$



Konstrukce paraboly

$v^2 = c_a \cdot c_b \qquad y^2 = 2p \cdot x \qquad 2p = |TO|$

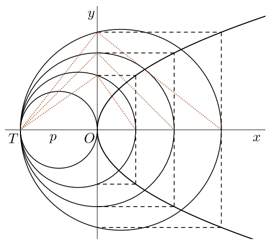


Konstrukce paraboly – Avicenna

aplikace Eukleidovy věty o výšce $\quad v^2 = c_a \cdot c_b$

Poprvé v komentáři k Apollóniovým *Kónikám*
sepsal perský lékař, astronom a matematik ibn Síná (asi 980--1037)

Zakresleme řezy kuželové plochy i parabolu do jedné roviny
označme p poloměr kružnice dotýkající se osy y: $\quad 2p = |TO|$
dostaneme ihned rovnici paraboly: $\quad y^2 = 2p \cdot x$.

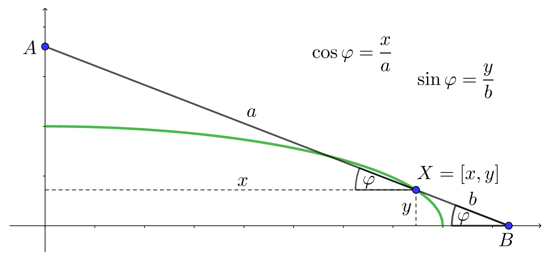


Elipsa – konstrukce a obsah

Konstrukce elipsy – proužková součtová

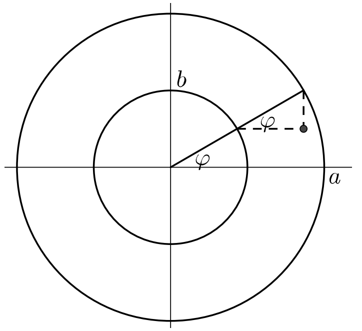
Úloha o klouzajícím žebříku

$$X = [a \cos\varphi, b \sin\varphi], \qquad \varphi \in [0, \pi/2)$$



Pravoúhlý trojúhelník v mezikruží

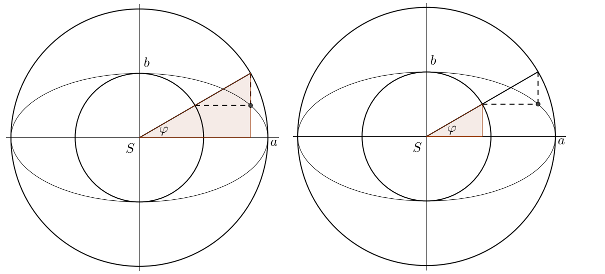
$$\cos\varphi = \frac{x}{a} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{b}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi)$$



Konstrukce elipsy – trojúhelníková

$$\cos\varphi = \frac{x}{a} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{b}$$

$$x = a\cos\varphi \qquad y = b\sin\varphi$$

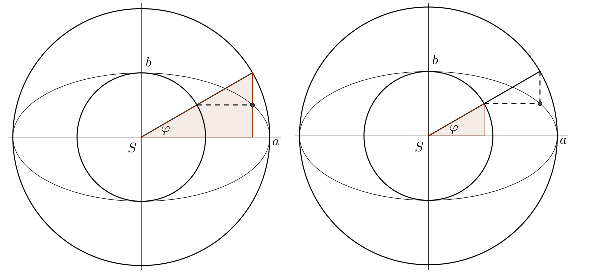


Konstrukce elipsy – trojúhelníková

$$\cos\varphi = \frac{x}{a} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{b}$$

tj.

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$



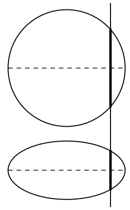
Obsah elipsy

Cavalieriho princip

délka řezu: $2 \cdot y$

poměr délek řezů: $\dfrac{2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}}{2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} = \dfrac{b}{a}$ $\implies$ poměr obsahů: $\dfrac{S_e}{S_k} = \dfrac{b}{a}$

kruh	elipsa
$x^2 + y^2 = a^2$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
$y = \sqrt{a^2 - x^2}$	$y = b \cdot \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}} = \dfrac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$
$S_k = \pi a^2$	$S_e = \dfrac{b}{a} \cdot S_k = \dfrac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi ab$



Rovnice elipsy v polárních souřadnicích

$$|F_1X| = \varrho, \quad |F_1F_2| = 2e; \qquad |F_1X| + |F_2X| = 2a$$

$$\boxed{|F_2X|^2 = \varrho^2 + (2e)^2 - 2\varrho \cdot 2e \cdot \cos\varphi}$$

$$(2a - \varrho)^2 = \varrho^2 + 4e^2 - 4\varrho e\cos\varphi$$

$$4a^2 - 4a\varrho + \varrho^2 = \varrho^2 + 4e^2 - 4\varrho e\cos\varphi$$

$$a^2 - a\varrho = e^2 - \varrho e\cos\varphi$$

$$a^2 - e^2 = a\varrho - \varrho e\cos\varphi$$

$$b^2 = \varrho \cdot (a - e\cos\varphi)$$

$$\varrho = \frac{b^2}{a - e\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 - \frac{e}{a}\cos\varphi}$$

označme $\quad p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{e}{a}$

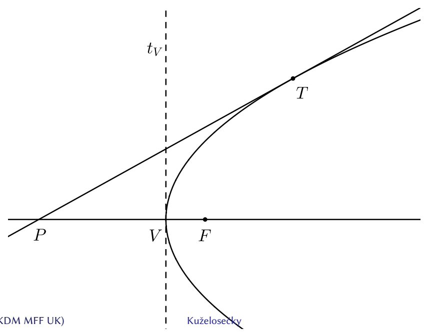
$$\boxed{\varrho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}}$$

Tečna paraboly

Tečna paraboly

Zajímavost: vzdálenost bodu dotyku T od vrcholové tečny a vzdálenost průsečíku P s osou od vrcholové tečny je stejná.

$$|T\,t_V| = |V\,P|$$



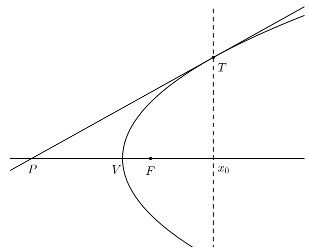
Tečna paraboly

$y^2 = 2px$

$t: y\,y_0 = p\,(x + x_0)$

$V = O, \ T = [x_0, y_0]$

$P = [?, 0]$



Tečna paraboly

$y^2 = 2px$

$t: y\,y_0 = p\,(x + x_0)$

$V = O, \ T = [x_0, y_0]$

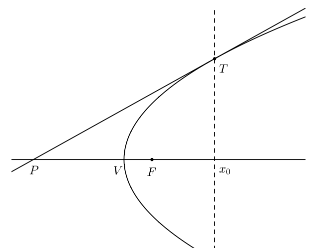
$P = [?, 0]$

$y\,y_0 = p\,(x + x_0)$

$0 = p\,(x + x_0)$

$x = -x_0$

$P = [-x_0, 0]$

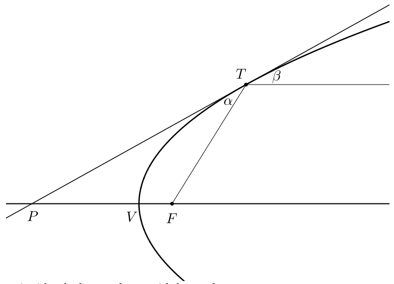


Ohnisková vlastnost paraboly

Ohnisková vlastnost paraboly

Paprsek vycházející z ohniska se od paraboly odrazí tak, že bude pokračovat rovnoběžně s její osou. (a naopak)

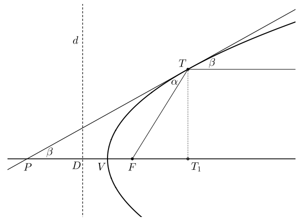
$$\boxed{\alpha = \beta}$$



Pro připomenutí: úhel dopadu = úhlu odrazu

Ohnisková vlastnost paraboly

Stačí ukázat, že $\triangle TPF$ je rovnoramenný (tj. máme dokázat: $|PF| = |FT|$).
Potom totiž platí $\alpha = \beta$.



- vrchol V je středem úseček PT_1 i DF, proto $|PD| = |FT_1|$
  odtud plyne: $|DT_1| = |PF|$
- planimetrická definice paraboly: $|FT| = |DT_1|$

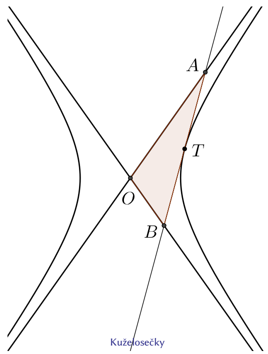
z obou předchozích bodů plyne: $|FT| = |DT_1| = |PF|$ □

Asymptoty a tečna hyperboly

Asymptoty hyperboly

obsah trojúhelníku ohraničeného asymptotami a tečnou

Překvapivá zajímavost: tento trojúhelník má stále stejný obsah, ať je tečna vedena v kterémkoli bodě T.



Asymptoty hyperboly

obsah trojúhelníku ohraničeného asymptotami a tečnou

$$t: \frac{x\,x_0}{a^2} - \frac{y\,y_0}{b^2} = 1$$

$$a_{1,2}: y = \mp\frac{b}{a}x$$

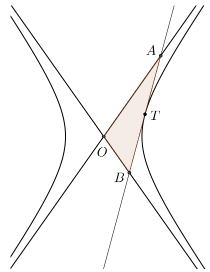
průsečíky: $$\frac{x\,x_0}{a^2} \pm \frac{\frac{b}{a}x\,y_0}{b^2} = 1$$

$$\frac{x}{a}\cdot\left(\frac{x_0}{a} \pm \frac{y_0}{b}\right) = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{a}{\frac{x_0}{a} \pm \frac{y_0}{b}}$$

$$x_1 = \frac{a}{\oplus} \qquad x_2 = \frac{a}{\ominus}$$

$$y_{1,2} = \pm\frac{b}{a}x; \qquad y_1 = \frac{b}{\oplus} \qquad y_2 = \frac{-b}{\ominus}$$



Asymptoty hyperboly

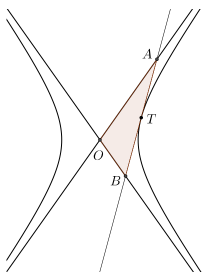
obsah trojúhelníku ohraničeného asymptotami a tečnou: $S_{\triangle ABO} = ab$

$$A = [\frac{a}{\oplus}, \frac{b}{\oplus}] \qquad B = [\frac{a}{\ominus}, \frac{-b}{\ominus}]$$

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{a}{\ominus} & \frac{-b}{\ominus} \\ \frac{a}{\oplus} & \frac{b}{\oplus} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{\oplus\ominus} + \frac{ab}{\oplus\ominus}\right)$$

$$\oplus\ominus = \left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)\cdot\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right) = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}ab(1+1) = ab$$



Inspirace kuželosečkami

počátek (sluneční hodiny, zdvojení krychle)

kuželo-sečky (Queteletova-Dandelinova věta)

konstrukce kuželoseček
- elipsa: bodová, zahradnická, proužková a elipsograf, trojúhelníková

název jednotlivých kuželoseček

rovnice (parametrické, polární souřadnice, ohniskové, vrcholové)

tečna

obsahy, objemy (Archimédés, objemy paraboloidu a elipsoidu)

aplikace
- elipsa: planety, klenby
- parabola: ohnisková vlastnost, šikmý vrh
- hyperbola: zvukoměřičská úloha