Goniometrie

Zdeněk Halas

KDM MFF UK

2021

Co je matematika

Matematika

Anatolius, biskup v Laodiceji kol. roku 280 po Kr.
podle citátu „Héróna“, Definitiones 138,3

Na základě čeho byla matematika pojmenována?
Peripatetikové říkají, že rétorice a poetice s celým provozováním hudby můžeme porozumět bez zvláštního vyškolení (mé mathonta); nikdo však nemůže dosáhnout znalosti předmětů příznačně nazvaných „matematika“ (mathématiké), pokud v nich předem neprošel školením (mathésis). Proto bylo pěstování těchto předmětů nazváno matematikou.

Matematické disciplíny v antice

Pýthagorejci

Pýthagorejec Archýtás (dle Profyria, kom. k Ptolemaiovým Harmonikám):

Ve své knize *O matematice* píše hned na začátku:
„Zdá se, že matematikové dosáhli správného poznání a nelze se divit, že pochopili podstatu každé jednotlivé věci; neboť když pronikli k poznání celku, tak vidí v pravém světle také všechny jednotlivé části. Předali nám jasné poznání rychlosti hvězd, jejich východů a západů, také o geometrii, aritmetice a sférické geometrii a v neposlední řadě také o hudbě; neboť tyto nauky (mathémata) považujeme za příbuzné.“

aritmetika geometrie
músika astronomie

Počátek goniometrie

Antická astronomie

Přehled I

- počátek – Metón pozoroval letní slunovrat 27. 6. 432 př. Kr.
- údaj dále používán pro určení přesnější délky roku
- Metón a Euktemón zpozorovali, že roční období netrvají stejně dlouho
- přejímání babylónských výsledků pozorování (aritmetická tradice)
- nejednotné kalendáře
- 4. stol. – důk. kulatosti Země a odhady velikosti
- už čistá věda, nevychází z potřeb praxe
- Eudoxos z Knidu – první pokus popsat pohyb planet

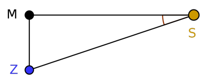
Antická astronomie

Aristarchos ze Samu (kol. 280 př. Kr.)

- pokusil se určit poměr vzdáleností Slunce a Měsíce
- heliocentrická hypotéza

spis *O velikostech a vzdálenostech Slunce a Měsíce*

$$ZM = ZS \cdot \sin(ZSM) = ZS \cdot \sin(3^\circ)$$



$$ZS = 19,1 \cdot ZM$$

Všechny výpočty provedeny bez goniometrie,
jen pomocí elementární geometrie (složitý postup)

Antická astronomie

Přehled II

- období 3 velkých geometrů: Eukleidés, Archimédés, Apollónios
- Apollónios (225) – zkoumal deferenty a epicykly
- chtěl vysvětlit pohyby S, M i planet
- neměl dostatek údajů pro konkrétní výsledky
- stále vliv Aristotela (jednoduchost, pravidelnost, symetrie)

Zásadní výsledky ve 2. stol. př. Kr.

- objev/rozvoj goniometrie
- příliv výsledků (pozorování i výpočtů) babylónské astronomie
- postupuje geometrizace – astronomie se stává matematickou disciplínou

Eudoxovy modely

Deferent, epicykl a excentr

Apollónios (225 př. Kr.) ukázal, že oba přístupy jsou při aplikaci na Slunce ekvivalentní.

Antická astronomie

Hipparchos (2. stol. př. Kr.)

Hipparchos kolem roku 130 př. Kr. provedl vlastní pozorování:

- jaro $94\frac{1}{2}$
- léto $92\frac{1}{2}$
- podzim $88\frac{1}{8}$
- zima $90\frac{1}{8}$

Dnes je nejdelší léto.

Hipparchův model poskytoval velmi přesné předpovědi – používán až do 16. stol.

Přesnost: $\frac{1}{2}$ stupně

Kdybychom dosadili přesné parametry podle současných pozorování, tak bychom dosáhli přesnosti 1' (což je hluboko pod hranicí možností pozorování pouhým okem).

Antická astronomie

Hipparchos (2. stol. př. Kr.)

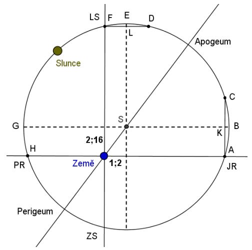
$\widehat{AF} \sim 94,5$ dne $\sim 93°9'$
$\widehat{FH} \sim 92,5$ dne $\sim 91°11'$

$\widehat{AFH} \sim 184°20'$
$\widehat{AB} + \widehat{GH} = 4°20'$

tj. $\widehat{ABC} = 2\widehat{AB} = 4°20'$

$\overline{AC} = \mathrm{crd}\, 4°20'$
$\quad = 60 \cdot 2 \sin 2°10' = 4;32$
$\overline{AK} = 2;16$

$\widehat{AF} = \widehat{AB} + 90° + \widehat{EF}$
$93°9' = 2°10' + 90° + \widehat{EF}$
$\widehat{EF} = 59'$
$\overline{LF} = \mathrm{crd}\, 59' = 60 \cdot 2 \sin 29'30'' = 1;2$



Antická astronomie

Hipparchos (2. stol. př. Kr.)

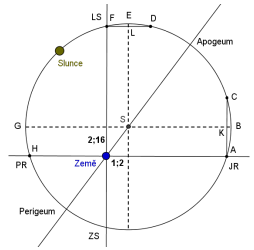
$\widehat{AF} \sim 94,5$ dne $\sim 93°9'$
$\widehat{FH} \sim 92,5$ dne $\sim 91°11'$

$\widehat{AFH} \sim 184°20'$
$\widehat{AB} + \widehat{GH} = 4°20'$

tj. $\widehat{ABC} = 2\widehat{AB} = 4°20'$

$\overline{AC} = \mathrm{crd}\, 4°20'$
$\quad = 60 \cdot 2 \sin 2°10' = 4;32$
$\overline{AK} = 2;16$

$\widehat{AF} = \widehat{AB} + 90° + \widehat{EF}$
$93°9' = 2°10' + 90° + \widehat{EF}$
$\widehat{EF} = 59'$
$\overline{LF} = \mathrm{crd}\, 59' = 60 \cdot 2 \sin 29'30'' = 1;2$



Antická astronomie

Hipparchos (2. stol. př. Kr.)

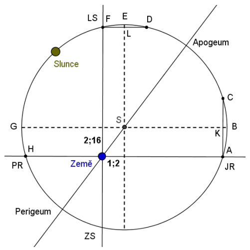
$\widehat{AF} \sim 94,5$ dne $\sim 93°9'$
$\widehat{FH} \sim 92,5$ dne $\sim 91°11'$

$\widehat{AFH} \sim 184°20'$
$\widehat{AB} + \widehat{GH} = 4°20'$

tj. $\widehat{ABC} = 2\widehat{AB} = 4°20'$

$\overline{AC} = \mathrm{crd}\, 4°20'$
$\quad = 60 \cdot 2 \sin 2°10' = 4;32$
$\overline{AK} = 2;16$

$\widehat{AF} = \widehat{AB} + 90° + \widehat{EF}$
$93°9' = 2°10' + 90° + \widehat{EF}$
$\widehat{EF} = 59'$
$\overline{LF} = \mathrm{crd}\, 59' = 60 \cdot 2 \sin 29'30'' = 1;2$



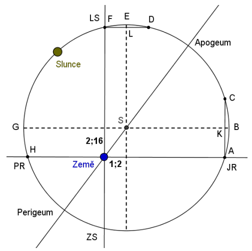
Antická astronomie

Hipparchos (2. stol. př. Kr.)

Excentricita e dle Pýthagorovy věty:

$e^2 = 2;16^2 + 1;2^2 = 6;12$
$e = 2;29\frac{1}{2}$

Zaokrouhlená hodnota $2;30 = \frac{60}{24}$,
excentricita $e = \frac{1}{24}$ poloměru excentru.



Antická astronomie

Stupně v antickém Řecku

$360°$ Řekové převzali ze starobabylonské astronomie

60ková soustava se v Řecku poprvé objevila v polovině 3. stol.
v zeměpisném spisu Eratosthena z Kyrény
rozdělil Zemi na 5 klimat (tropické, 2 mírná a 2 chladná)
poledník rozdělil na 60 částí a každému klimatu z nich přiřadil jistý počet

kruh rozdělený na $360°$ nacházíme v Řecku poprvé na jednom nápisu ze 2. stol. př. Kr. (nalezen na Rhodu): mezi astronomickými údaji tam nacházíme větu:

Kruh obsahuje 360 stupňů, neboli 9720 bodů; stupeň obsahuje [27] bodů.

body se už jinde neobjevují; mohly vzniknout rozdělením poloměru Slunce a Měsíce na 15 stejných dílů

Antická astronomie

Stupně

2. stol. př. Kr. – Hypsiklés z Alexandrie (autor 14. knihy Eukleidových *Základů*)

O východech dvanácti znamení zvěrokruhu

Obvod zvěrokruhu byl rozdělen na 360 stejných oblouků; nazývejme každý z těchto oblouků prostorový stupeň;

podobně pokud čas, v němž se zvěrokruh vrátí do pozice, v níž byl, rozdělíme na 360 stejných dob, nazývejme každou z těchto dob časový stupeň.

Konec antiky

V antice:

- pěstování čisté geometrie – uměli si čistou matematiku vychutnat
- jiné společenské klima, ne „k čemu mi to bude"
- věnování se praktickým oborům (díky dobrému vzdělání, ne jen kvalifikaci)
- opravdu zajímavé a reálné projekty

později se vše „praktizuje": teorie upadá a praxe vzápětí také

Geometria practica

Hipparchos

Hipparchos

Hodnoty „goniometrických funkcí“ důležité zejména pro astronomii.

Nejranější doklady jejich užívání zatím sahají do starověkého Řecka.

ŘEKOVÉ

Používali délku tětivy $\operatorname{crd}\alpha$, což je délka tětivy dané středovým úhlem o velikosti α, tj. platí

$$\operatorname{crd}\alpha = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$$

Jako první sestavil tabulky **Hipparchos** (180 – 125 př. Kr.). Jeho dílo se nám téměř nedochovalo, a tak jsme odkázáni jen na pozdější svědectví.

Hipparchovy tabulky

Má se za to, že Hipparchovy tabulky byly členěny s krokem $7°30'$ (odpovídá $\frac{1}{24}$ půlkruhu), což je však, jak se zdá, spíše rekonstrukce založená na indické matematice.

Na Hipparchovo dílo navázal kolem roku 150 po Kr.
Klaudios Ptolemaios

Výsledky studia Ptolemaiova díla naznačují, že Hipparchos potřeboval a používal tabulky $\operatorname{crd}\alpha$ např. při studiu pohybu Měsíce.

Rozsáhlé **Ptolemaiovo** dílo se nám zachovalo – obsahuje tedy **první dochované tabulky** $\operatorname{crd}\alpha$

Klaudios Ptolemaios

Klaudios Ptolemaios (přibližně 90 – 165)

Velmi plodný autor:

- Almagest
- Kanopská poznámka – předběžný výklad, shrnutí parametrů Ptolemaiovy soustavy; cca 9 stran
- Tetrabiblos – astrologická příručka, zajistilo mu proslulost ve středověku
- Geografická příručka – topografický popis + 27 map (Súdéta oré, Ebúron – jižně od Brna)
- Optika – o odrazu paprsků od lesklých povrchů (katoptrika; katoptron – zrcadlo)
- Planetární hypotézy
- Příruční tabulky
- Fáze nehybných hvězd
- …

Klaudios Ptolemaios – Almagest

Mathématiké syntaxis, Μαθηματικὴ σύνταξις
Monumentální (1 154 stran) astronomické kompendium, geocentrická soustava

Také nazýváno Megalé syntaxis (Velká skladba)
Arabové zaměnili na Megisté syntaxis (Největší skladba), zkomolením vzniklo Al-Magisti, odtud Almagest.

V úvodní kapitole vypracoval tabulky délek tětiv – jsou to nejstarší známé tabulky tohoto typu.

Nejspíš však navazoval na dřívější astronomy, je téměř jisté, že Hipparchos (2. stol. př. Kr.) a Menelaos (1. stol. po Kr.) používali také podobné tabulky.

Idea tětivy pochází nejspíše už od Hipparcha.

Později byl tento pojem nahrazen sinem – poprvé u indického matematika jménem Áryabhata (499 po Kr.)

Klaudios Ptolemaios – Almagest

Obsah první knihy, jak je shrnut v jejím úvodu:

1. Úvod.
2. O řazení vět.
3. Že vesmír (úranos) je kulatý.
4. Že i Země je kulatá.
5. Že ve středu vesmíru je Země.
6. Že Země je vůči vesmíru jako bod.
7. Že se Země nepohybuje.
8. Že na nebi jsou dva druhy pohybů.
9. O postupné výstavbě.
10. O délce tětiv v kružnici.
11. Tabulka tětiv v kružnici.
12. O pásu mezi obratníky.

…

Ptolemaiova goniometrie

Ptolemaiova goniometrie

V první knize Almagestu je vyložena rovinná trigonometrie

Pracuje se však s tětivami ($\operatorname{crd}\alpha = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$)

Ptolemaios používá babylonské dělení kružnice na $360°$ a počítá také v šedesátkové soustavě

průměr rozdělí na 120 stejně dlouhých dílů (tj. $2\cdot 60$)

Ptolemaiova goniometrie

Předpokládá se základní poznatek: $\operatorname{crd}60° = 60$

1. Určí se hodnota $\operatorname{crd}72°$ a $\operatorname{crd}36°$
   Z geometrické konstrukce pravidelného 5úhelníku a 10úhelníku a užitím Pýthagorovy věty se dostane
   $$\operatorname{crd}72° = 70\ 32\ 3 \qquad \operatorname{crd}36° = 37\ 4\ 55$$
2. Ptolemaiova věta – pro libovolný tětivový čtyřúhelník *ABCD*:
   $$ac + bd = ef$$
3. $\operatorname{crd}(\alpha-\beta)$ — tj. lze odvodit $\operatorname{crd}12° = \operatorname{crd}(72° - 60°)$
4. $\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}$ — odtud se odvodí $\operatorname{crd}6°$, $\operatorname{crd}3°$, $\operatorname{crd}\frac{3}{2}°$, $\operatorname{crd}\frac{3}{4}°$
5. $\operatorname{crd}1°$ — najdou se hranice, odtud $\operatorname{crd}\frac{1}{2}°$
   $$\operatorname{crd}1° = 1\ 2\ 50 \qquad \operatorname{crd}\frac{1}{2}° = 0\ 31\ 25$$

Ptolemaiova goniometrie

posledním krokem je:

6. sestavení tabulky po $\frac{1}{2}^\circ$ s využitím předchozích poznatků

   umíme-li crd $(\alpha - \beta)$, umíme též crd $(\alpha + \beta)$

Část Ptolemaiovy tabulky – 1538 (1. vyd.)

Grynaeus, 1538 (Editio princeps)

περιφερειῶν	εὐθειῶν			ἑξηκοστῶν			
με∠	μϛ	κδ	ιθ	ο	ο	νζ	νδ
μϛ	μϛ	νγ	ιε	ο	ο	νζ	μζ
μϛ∠	μζ	κβ	θ	ο	ο	νζ	μζ
μζ	μζ	να	δ	ο	ο	νζ	λδ
μζ∠	μη	ιθ	μζ	ο	ο	νζ	κζ
μη	μη	μη	λ	ο	ο	νζ	κα

Část Ptolemaiovy tabulky – 1538 (1. vyd.)

crd 60°

νθ	νθ	ε	κζ	ο	ο	νδ	λζ
νθ∠	νθ	λβ	με	ο	ο	νδ	κθ
ξ	ξ	ο	ο	ο	ο	νδ	κα

Poslední sloupec

V Ptolemaiových tabulkách je uveden ještě jeden (třetí) sloupec, který obsahuje interpolační údaj:

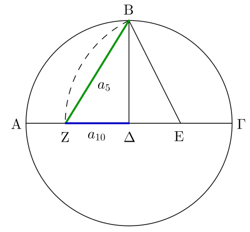
$$\frac{\text{crd}\,(\alpha + \frac{1}{2}) - \text{crd}\,(\alpha)}{30}$$

Rozdíl hodnot s krokem $\frac{1}{2}^\circ$ se dělí 30, což odpovídá kroku 1 minuta.

Tento údaj tedy umožňuje rozšířit tabulky (alespoň přibližně, pomocí lineární interpolace) na hodnoty počítané s krokem 1 minuta.

Dělení třiceti se v šedesátkové soustavě zajistí vynásobením dvěma a posunem řádu.

Pravidelný pětiúhelník – krok 1 (crd 72° = a_5)



z Pýthagorovy věty aplikované na trojúhelník BΔE

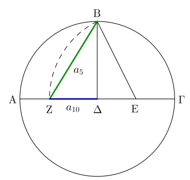
$$\text{EB} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = r\,\frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

Pravidelný pětiúhelník – krok 1 (crd 72° = a_5)

$$r\,\frac{\sqrt{5}}{2} = \text{EB} = \text{EZ} = a_{10} + \frac{r}{2}\,,$$

tj.

$$a_{10} = r\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,.$$



Opět z Pýthagorovy věty aplikované na trojúhelník BΔZ obdržíme vztah

$$a_5^2 = a_{10}^2 + r^2 = r^2\left[\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + 1\right] = r^2\,\frac{5 - 2\sqrt{5} + 1 + 4}{4} = r^2\,\frac{5-\sqrt{5}}{2}\,,$$

tedy

$$a_5 = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\,.$$

Pravidelný pětiúhelník – krok 1 (crd 72° = a_5)

$$a_5 = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

Pro $r = 60$ dostaneme

$$\text{crd}\,72^\circ = 70,534\,230\cdots \approx 70\;32\;3 = 70 + \frac{32}{60} + \frac{3}{3\,600}\,.$$

Moderně řečeno:

$$\sin 36^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

$$2r\,\sin\frac{\alpha}{2} = \text{crd}\,\alpha$$

Ptolemaiova věta – krok 2 (součtový vzorec)

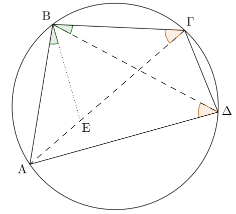
Věta (Ptolemaiova). *V každém tětivovém čtyřúhelníku ABΓΔ platí:*

$$AB \cdot \Gamma\Delta + A\Delta \cdot B\Gamma = A\Gamma \cdot B\Delta\,,$$

neboli

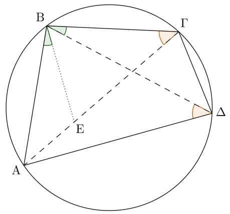
$$ac + bd = ef\,,$$

kde a, b, c, d jsou postupně délky jeho stran a e, f délky úhlopříček.



Ptolemaiova věta – krok 2 (součtový vzorec)

zelené (volba E)
i oranžově úhly (obvodové $\angle$) jsou si rovny



$$\triangle \mathrm{E B \Gamma} \sim \triangle \mathrm{AB\Delta}$$

$$\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{E\Gamma}} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{A\Delta}},$$

$$\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{E\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta}.$$

a analogicky $\triangle \mathrm{ABE} \sim \triangle \mathrm{\Delta B \Gamma}$

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EA}} = \frac{\mathrm{\Delta B}}{\mathrm{\Gamma\Delta}},$$

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{\Gamma\Delta} = \mathrm{EA} \cdot \mathrm{B\Delta}.$$

Součtem

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{\Gamma\Delta} + \mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{B\Gamma} = (\mathrm{AE} + \mathrm{E\Gamma}) \cdot \mathrm{B\Delta} = \mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta},$$

Základní hodnoty dnes

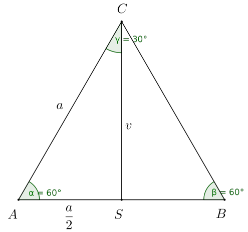
Základem je rovnostranný trojúhelník ABC.

$$\cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\sin\gamma = \sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\sin\alpha = \sin 60^\circ = \frac{v}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

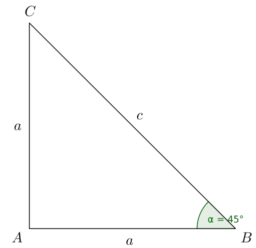
$$\cos\gamma = \cos 30^\circ = \frac{v}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



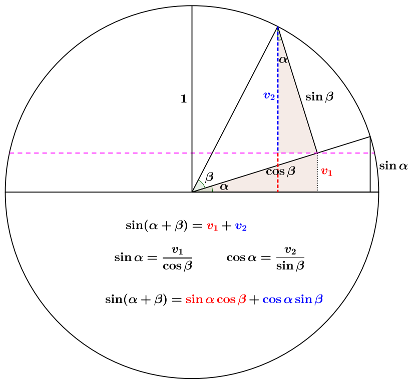
Základní hodnoty dnes

Pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník:

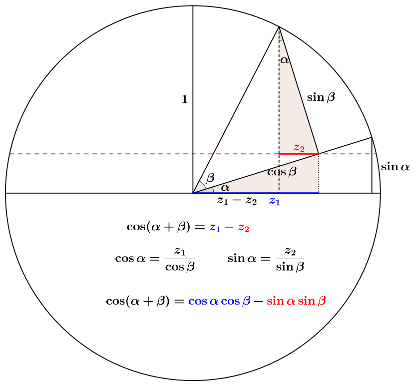
$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Součtové vzorce dnes – sinus



Součtové vzorce dnes – kosinus



Součtové vzorce

jsou klíčové...

Existuje právě jedna dvojice funkcí $s(x)$ a $c(x)$, které splňují na $\mathbb{R}$ soustavu funkcionálních rovnic

$$s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y)$$

$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)$$

a podmínku

$$\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1$$

Tětiva odpovídající jednomu stupni

Chceme $\mathrm{crd}\, 1^\circ$, známe jen $\mathrm{crd}\, \frac{3}{2}^\circ$, $\mathrm{crd}\, \frac{3}{4}^\circ$...
Bylo by zapotřebí provést trisekci úhlu, a tak hledá Ptolemaios dostatečně dobrou aproximaci.
Postupuje geometricky:

$$\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\mathrm{crd}\,\alpha}{\mathrm{crd}\,\beta} > \frac{\alpha}{\beta} \tag{1}$$

Tuto nerovnost používali před ním Aristarchos, Eukleidés, Archimédés

$$\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\mathrm{crd}\,\alpha}{\alpha} > \frac{\mathrm{crd}\,\beta}{\beta} \tag{2}$$

Nerovnost (2) lze snadno vidět i intuitivně: u většího oblouku je větší rozdíl mezi délkou tětivy a oblouku.
S použitím (2) dostaneme:

$$\frac{\mathrm{crd}\,\frac{3}{2}^\circ}{\frac{3}{2}} < \frac{\mathrm{crd}\,1^\circ}{1} < \frac{\mathrm{crd}\,\frac{3}{4}^\circ}{\frac{3}{4}} \tag{3}$$

Tětiva odpovídající jednomu stupni

$$\frac{\mathrm{crd}\,\frac{3}{2}^\circ}{\frac{3}{2}} < \frac{\mathrm{crd}\,1^\circ}{1} < \frac{\mathrm{crd}\,\frac{3}{4}^\circ}{\frac{3}{4}} \tag{4}$$

Dosazením známých hodnot $\mathrm{crd}\,\frac{3}{2}^\circ = 1\ 34\ 15$, $\mathrm{crd}\,\frac{3}{4}^\circ = 0\ 47\ 8$ dostaneme

$$1\ 34\ 15 \ \cdot \frac{2}{3} < \frac{\mathrm{crd}\,1^\circ}{1} < 0\ 47\ 8 \ \cdot \frac{4}{3} \tag{5}$$

$$1\ 2\ 50 < \mathrm{crd}\,1^\circ < 1\ 2\ 50\frac{2}{3}, \tag{6}$$

odkud máme $\mathrm{crd}\,1^\circ = 1\ 2\ 50$.

al-Káší

V Samarkandu byla ve 20. letech 15. stol. zřízena observatoř vybavená nejlepšími přístroji té doby. Tam byly sestaveny velmi přesné astronomické tabulky Zídž Guragání, které obsahovaly tabulky sinů (s krokem 1 minuty) a tangent, obojí s přesností na 5 šedesátinných míst.

Al-Káší popisuje v dopise **Rísalat al-watar wa-l-džajb**
(Dopis o tětivě a sinu, kol. 1400), jak získat jiným způsobem než Ptolemaios hodnotu $\mathrm{Sin}\,1^\circ$. Ptolemaiův postup pomocí odhadu už totiž nelze výrazně zpřesňovat.

Původní al-Kášího práce se sice nenašla, jeho postup však máme zaznamenán:

Traktát o určení sinu jednoho stupně – Qádí-záde, který pracoval v Samarkandu podobně jako al-Káší.

Pravidla operací a oprava tabulek – komentář k astronomickým tabulkám, Marjám Šelebí (kol. 1500), vnuk Qádí-záde.

V době al-Kášího byla již známa hodnota $\mathrm{Sin}\,3^\circ = 60 \cdot \sin 3^\circ$.
Zapsáno v šedesátkové soustavě:

$$\mathrm{Sin}\,3^\circ = 3; 8, 24, 33, 59, 34, 28, 15,$$

což odpovídá hodnotě $\sin 3^\circ = 0,052\,335\,956\,242\,94|4$.

Základem al-Kášího postupu je vztah

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.}$$

$\mathrm{Sin}\,1^\circ$ se zde bere jako „věc“, která není známa, celý problém se tak převede na řešení kubické rovnice

$$\mathrm{Sin}\,3^\circ = 3x - 4x^3\,,$$

kde hledáme $x = \mathrm{Sin}\,1^\circ$.

Toto přeformulování problému trisekce úhlu na rovnici třetího stupně se podařilo v 11. stol. Celou rovnici píše al-Káší ve tvaru

$$3x = 4x^3 + \mathrm{Sin}\,3^\circ\,,$$

což je základem iteračního předpisu.

$$3x = 4x^3 + \mathrm{Sin}\,3^\circ \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = \frac{4x_n^3 + \mathrm{Sin}\,3^\circ}{3}\,, \quad x_0 = \frac{1}{60}\,.$$

Přesněji hledal al-Káší neznámou ve formě součtu

$$x = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_9\,,$$

kde jednotlivá a_i reprezentují příslušné cifry v šedesátkové soustavě. Např.

$$a_2 = \frac{(a_0 + a_1)^3 + \mathrm{Sin}\,3^\circ}{3} - (a_0 + a_1) \approx 0; 0, 49\,.$$

Po devíti takových krocích tedy obdržel hodnotu

$$\mathrm{Sin}\,1^\circ = 1; 2, 49, 43, 11, 14, 44, 16, 26, 17\,.$$

To odpovídá

$$\sin 1^\circ = 0,01745\ 24064\ 37283\ 51|0371\,.$$

Správná hodnota je

$$\sin 1^\circ = 0,01745\ 24064\ 37283\ 51281\ldots$$

Indové – Áryabhata

Indové

Indičtí matematikové začali používat polovinu délky tětivy, což odpovídalo našim sinům. Pro kružnici o poloměru 60 máme

$$\mathrm{Sin}\,\alpha = 60 \cdot \sin \alpha.$$

Áryabhata

476 – 550, významný a hojně komentovaný matematik.
Ve svých 23 letech napsal matematicko-astronomickou báseň **Áryabhatíya**, ve které jsou mj. tabulky sinů.

Kružnici rozdělil na 21 600 (čili $60 \cdot 360 = 225 \cdot 96$),
1 dílek tedy odpovídá 1 minutě
tj. poloměr 3438 jednotek ($191 \cdot 18$)

tabulka s krokem 225 dílků $\qquad 225$ dílků $\sim 3^\circ 45'$

Áryabhatíya 1,12

मखि भखि फखि धखि णखि ञखि ङखि हस्झ स्ककि किष्ग श्घकि किघ्व ।
घ्लकि किग्र हक्य धकि किच स्ग झश ङ्व क्ल प्त फ छ कलार्धज्याः ॥१०॥

makhi bhakhi phakhi dhakhi ṇakhi ñakhi
ṇakhi hasjha skaki kiṣga śghaki kighva |

ghlaki kigra hakya dhaki kica
sga jhaśa ṇva kla pta pha cha kaládhejyáḥ ||

25+200 24+200 22+200 19+200 15+200 10+200
5+200 100+90+9 90+1+100 100+80+3 70+4+100 100+4+60 |

4+50+100 100+3+40 100+1+30 19+100 100+6
90+3 70+9 5+60 1+50 21+16 22 7, což je polovina tětivy. ||

(Áryabhaṭíya 1,10)

Nº	stupně	difer.	součet	součet / 3438	sinus
1	3,75	225	225	0,0654450	0,0654031
2	7,5	224	449	0,1305991	0,1305261
3	11,25	222	671	0,1951716	0,1950903
4	15	219	890	0,2588714	0,2588190
5	18,75	215	1105	0,3214077	0,3214394
6	22,5	210	1315	0,3824898	0,3826834
7	26,25	205	1520	0,4421175	0,442288
8	30	199	1719	0,5	0,5
9	33,75	191	1910	0,5555555	0,5555702
10	37,5	183	2093	0,6087841	0,6087614
11	41,25	174	2267	0,6593949	0,6593458
12	45	164	2431	0,7070971	0,7071067
13	48,75	154	2585	0,7518906	0,7518398
14	52,5	143	2728	0,7934845	0,7933533
15	56,25	131	2859	0,8315881	0,8314696
16	60	119	2978	0,8662012	0,8660254
20	75	65	3321	0,9659685	0,9659258
21	78,75	51	3372	0,9808027	0,980785
22	82,5	37	3409	0,9915648	0,9914448
23	86,25	22	3431	0,9979639	0,9978589
24	90	7	3438	1	1

Sinus – původ slova

Sinus nacházíme také v indických sidhántách, anonymních astronomických dílech ze 4. nebo 5. stol.

Nazývá se ardha-jya (polovina tětivy luku). Pro jednoduchost se to zkracovalo na jya. Při překladu do arabštiny to přepsali jako jiba (psáno jb), což nemá v arabštině žádný význam. Pozdější autoři to tedy v 9. stol. začali nahrazovat jaib (záliv, zátoka). Když pak ve 12. stol. Gherardo z Cremony přeložil tyto spisy do latiny, nahradil jaib latinským ekvivalentem sinus (záhyb, zátoka).

Áryabhata určil obvod Země s udivující přesností – jeho údaj je od současné hodnoty jen o cca 100 km menší.

Uvádí také hodnotu $\pi = 3,1416$. Věděl, že to není přesná hodnota („blíží se“); často se mu tak připisuje, že věděl o iracionalitě π.

Áryabhatíya – ohlasy

Citují jej význační arabští matematikové, např. al-Chwárizmí, který dílo Áryabhatía přeložil kol. 820, což hrálo důležitou úlohu na cestě arabských (indických) číslic do Evropy.

Bráhmagupta ve svém astronomickém pojednání Khanda Khádyaka z roku 665 vysvětluje, jak z tabulek získávat interpolací další hodnoty sinů.

CORDIC

CORDIC
Objev

Jack E. Volder v září 1959

CORDIC = Coordinate Rotation on a Digital Computer

vyvinut v oddělení letecké elektroniky v Convair, aby nahradil analogový řešič v navigačním počítači bombardéru B-58

sčítání, odčítání a posun

pokud nemá procesor zabudováno hardwarové násobení, tak je CORDIC obecně rychlejší než jiné algoritmy
jinak jsou však mocninné řady a metody založené na načítání z tabulky a následné interpolaci rychlejší

Volder, J. *The CORDIC Trigonometric Computing Technique.* IRE Transactions on Electronic Computers, **EC-8**(1959), 330–334.

CORDIC
Objev

John Stephen Walther z Hewlett–Packardu
jej později zobecnil tak, že mohl počítat nejen funkční hodnoty goniometrických a hyperbolických funkcí, ale i exponenciálních, druhé odmocniny, logaritmy a násobení i dělení.

Walther, J. *A Unified Algorithm for Elementary Functions.* Spring Joint Computer Conference Proceedings, **38**(1971), 379–385.

Původně byl CORDIC vytvořen pro dvojkovou soustavu,
v sedmdesátých letech modifikace pro desítkovou — většina kapesních kalkulátorů totiž byla konstruována tak, že
dekadické číslice reprezentovala ve dvojkové soustavě
(BCD, binary coded decimal).

CORDIC
Podstata algoritmu

Chceme pro dané α vypočítat $\operatorname{tg}\alpha$.

1. V paměti máme uloženy jednou pro vždy α_i taková, že $\operatorname{tg}\alpha_i = 10^{-i}$, tj.

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = 1\,, \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{10}\,, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{1}{100}\,, \quad \dots$$

2. α napíšeme jako součet těchto α_i:

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i$$

Dostaneme tak

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\right).$$

CORDIC
Podstata algoritmu

3. S použitím součtového vzorce

$$\operatorname{tg}(\alpha_i + \alpha_j) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_i) + \operatorname{tg}(\alpha_j)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha_i) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_j)}$$

dostaneme výsledek. Konkrétně, označme

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{x}\,, \quad \operatorname{tg}(\beta + \alpha_i) = \frac{y'}{x'}\,,$$

dostaneme

$$\operatorname{tg}(\beta + \alpha_i) = \frac{\frac{y}{x} + \operatorname{tg}\alpha_i}{1 - \frac{y}{x} \cdot \operatorname{tg}\alpha_i} = \frac{y + x\operatorname{tg}\alpha_i}{x - y\operatorname{tg}\alpha_i} = \frac{y'}{x'}\,,$$

odkud obdržíme

$$y' = y + x\operatorname{tg}\alpha_i\,, \quad x' = x - y\operatorname{tg}\alpha_i\,.$$


```
alfa = [0.78539816339744830961566084581987572,      # arctg 1
0.09966865249116202737844611987802059,           # arctg 1 / 10
0.00999966668666523820634011620927954,           # arctg 1 / 100
0.000999999666666686666652380963492054,           # arctg 1 / 1 000
0.00009999999996666666668666666665238095,        # arctg 1 / 10 000
0.00000999999999999666666666668666666666]         # arctg 1 / 100 000
uhel = float( input("Zadejte úhel (rad): ") )
a = uhel
x = 1; y = 0; d = 10;

for i in range(6):
   d = d / 10
   while a >= alfa[i]:
      a = a - alfa[i]
      x = x - d*y
      y = y + d*(x + d*y)

print("tg {} = {:.10}".format(uhel, y/x))
```