„Jako slunce zastiňuje hvězdy svým jasem,
tak i vzdělaný člověk může zastínit slávu
druhých lidí ze společnosti, bude-li předkládat
matematické úlohy, a dosáhne ještě víc,
bude-li je řešit.“
Brahmagupta

1. Opakování: úpravy algebraických výrazů, rovnice a nerovnice

1. Upravte daný výraz a určete podmínky, za kterých má daný výraz smysl:

   a) $\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{x^2}{y}+x+y\right):\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}\right)$ $\qquad [x\neq 0, y\neq 0,\ x\neq \pm y;\ \frac{x^2}{x-y}]$

   b) $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x+2}\cdot\left(\frac{2}{25}\right)^{1-2x}\cdot 10^{-2x}$ $\qquad [x\in\mathbb{R};\ 2^5\cdot 5^{-4}]$

   c) $\sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt{8^3}}}\cdot\sqrt{\frac{8}{\sqrt[3]{2}}}$. $\qquad [\sqrt[6]{2}]$

2. Řešte v $\mathbb{R}$ následující rovnice a nerovnice:

   a) $|x+1|<0,01$ $\qquad [x\in(-1,01;-0,99)]$

   b) $|2x-1|<|x-1|$ $\qquad [x\in(0;\frac{2}{3})]$

   c) $2^{|x-3|}=16$ $\qquad [x\in\{-1;7\}]$

   d) $\frac{|x|+2}{|x|-2}=5$ $\qquad [x\in\{\pm 3\}]$

   e) $|x^2+3x+2|=2x+4$ $\qquad [x\in\{-2;1\}]$

   f) $|x|+|2-x|=2$ $\qquad [x\in\langle 0;2\rangle]$

   g) $\sin x=\frac{1}{2}$ $\qquad [x\in\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5}{6}\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}]$

   h) $3+|2x-1|<0$ $\qquad [\emptyset]$

   i) $\frac{x-1}{x+2}\geq 0$ $\qquad [x\in(-\infty;-2)\bigcup\langle 1;+\infty)]$

   j) $\sqrt{5-x}\leq 2$ $\qquad [x\in\langle 1;5\rangle]$

   k) $2+\frac{1}{\ln x}=0$ $\qquad [x=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{e}}}]$

3. Řešte v $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$ následující soustavy rovnic:

   a) $$\begin{array}{rcrcl} 9x & + & 12y & = & 7\\ 3x & + & 4y & = & 1\end{array}$$

   b) $$\begin{array}{rcrcl} \frac{2}{x} & + & \frac{3}{y} & = & 2\\ -\frac{4}{x} & + & \frac{1}{y} & = & 3\end{array}$$

   c) $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & 1\\ x & + & 2y & + & z & = & 5\\ x & - & 6y & - & z & = & -9\end{array}$$

4. Určete definiční obor funkce:

   a) $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{|x-4|-2}}$ $\qquad [x\in(-\infty;2)\bigcup(6;+\infty)]$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}}$ $[x \in (-1; 0\rangle \bigcup (1; +\infty)]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+5x+6}}$ $[x \in (-\infty; -3) \bigcup (-2; +\infty)]$

d) $f(x) = \ln(12 - 4x - x^2)$ $[x \in (-6; 2)]$

2. Komplexní čísla

1. Určete reálnou a imaginární část komplexních čísel:

   a) $z = \dfrac{1+i}{1-2i} + \dfrac{i}{1+i}$ $[z = \frac{3}{10} + \frac{11}{10}i]$

   b) $z = \dfrac{2+i}{3-i} + (i-2)(4-i)$ $[z = -\frac{13}{2} + \frac{13}{2}i]$

   c) $z = \dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i}$ $[z = 1 - i]$

2. Vypočítejte:

   a) $\left|\dfrac{1-3i}{2i+5}\right| =$ $[\sqrt{\frac{10}{29}}]$

   b) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{25}$ $[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i]$

3. Vypočítejte $(1+i)^{-6}$ pomocí a) Moivreovy věty b) binomické věty. $[\frac{1}{8}i]$

4. Převeďte komplexní číslo na goniometrický tvar:

   a) $z = 1 + \sqrt{3}i.$ $[2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})]$

   b) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $[\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi]$

   c) $z = \dfrac{i-3}{2+i}.$ $[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)]$

5. Řešte v $\mathbb{C}$ rovnici $z^3 = 1 + i$.

6. Vypočítejte reálný parametr c tak, aby rovnice $x^2 - 6x + c = 0$ měla komplexní kořen, jehož imaginární část je rovna -2.
   Určete oba kořeny rovnice. $[c = 13;\ x_1 = 3 - 2i,\ x_2 = 3 + 2i]$

7. Určete všechna reálná čísla b tak, aby pro komplexní čísla $z = 3 - bi$ platilo $|z| > \sqrt{10}$. Tato čísla znázorněte v Gaussově rovině.

8. Která komplexní čísla vyhovují rovnici

   a) $z.\bar{z} + z = 6 + 2i$ $[\{1 + 2i, -2 + 2i\}]$

   b) $z^4 = |z|$ $[\{0, \pm 1, \pm i\}]$

   c) $z^2 - 4z + 6 = 0$ $[\{2 \pm \sqrt{2}i\}]$

   d) $z^2 - iz + 6 = 0\,$? $[\{3i, -2i\}]$

3. Důkazy

1. Dokažte, že číslo $\sqrt[n]{2}$ je iracionální pro každé přirozené $n \geq 2$.
2. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.
3. Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.
4. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n je $n^3 - n$ dělitelné šesti.
5. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n je $n^7 - n$ dělitelné sedmi.
6. Dokažte, že pro každé přirozené n je číslo $n^4 + 3n^2$ dělitelné čtyřmi.
7. Dokažte pro všechna přirozená n: jestliže číslo $n^2 + 2$ není dělitelné třemi, pak je třemi dělitelné číslo n.
8. Dokažte binomickou větu:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \,.$$
9. Dokažte, že číslo 21 dělí pro každé přirozené n číslo $4^{n+1} + 5^{2n-1}$.
10. Matematickou indukcí dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

    a) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

    b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

    c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

    d) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, pro $n \geq 2$

    e) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$

    f) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

    g) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

11. Dokažte, že pro $\varphi \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí:
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \,.$$

12. Matematickou indukcí dokažte vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem q. Rozlište případ $q = 1$ a $q \neq 1$.

13. Uvažujte aritmetickou posloupnost $a_{n+1} = a_n + d$, $d \in \mathbb{R}$. Matematickou indukcí dokažte vzorec pro n-tý člen této posloupnosti.

14. Dokažte, že libovolnou částku peněz větší než 4Kč vyjádřenou v celých korunách lze sestavit jen užitím dvoukorun a pětikorun.

15. Fibonacciho posloupnost $\{F_n\} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ je definována rekurentně takto:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ pro } n \in \mathbb{N}\,.$$

Dokažte, že platí identita $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i = F_{i+2} - 1$.

16. Je dáno n navzájem různoběžných přímek v rovině, z nichž žádné tři neprochází jedním bodem. Na kolik částí rozdělí všechny tyto přímky rovinu? Své tvrzení řádně dokažte!

4. Funkce a jejich vlastnosti

1. Načrtněte grafy následujících funkcí:

a) $f_1(x) : y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

b) $f_2(x) : y = |\ln|x||$

c) $f_3(x) : y = (x-3)^2 + 1$

d) $f_4(x) : y = \dfrac{x+2}{|x+2|}$

e) $f_5(x) : y = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$

f) $f_6(x) : y = 2\cos 2x$

g) $f_7(x) : y = \dfrac{1}{x+2} + 1$

h) $f_8(x) : y = \mathrm{tg}\,(x + \pi)$

i) $f_9(x) : y = (x+2)^3 - 4$

j) $f_{10}(x) : y = \log_2(x+1) - 3$

k) $f_{11}(x) : y = |\mathrm{cotg}\, x|$

l) $f_{12}(x) : y = \mathrm{tg}\,|x|$

m) $f_{13}(x) : y = \dfrac{2\cos^2 x}{\cos x - |\cos x|}$

n) $f_{14}(x) : y = \sqrt{\dfrac{\mathrm{cotg}\, x}{|\mathrm{cotg}\, x|}}$

o) $f_{15}(x) : y = \dfrac{\sin x}{|\sin x|}$

p) $f_{16}(x) : y = \sin x + \sin|x|$

q) $f_{17}(x) : y = \ln\sin x$

r) $f_{18}(x) : y = \ln(\ln\sin x)$

2. Rozhodněte, které vlastnosti funkce má a které nemá:
   je/ není periodická/ sudá/ lichá/ omezená.

   a) $f(x): y = \frac{1}{2}x - \cos x$
   b) $f(x): y = \ln(x^2 + 5)$
   c) $f(x): y = \ln(|x| + 5)$
   d) $f(x): y = x + 2x^3$.

3. Rozhodněte, které vlastnosti funkce má a které nemá:
   je/ není rostoucí/ klesající/ nerostoucí/ neklesající.

   a) $y = \mathrm{e}^{2x+1}$
   b) $y = \ln(1 - \sqrt{x})$
   c) $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 3,\ x \in (2; \infty)$.

4. Rozhodněte, které funkce jsou na svém definičním oboru prosté:

   a) $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{2x} + 1}$ [ano, $x \in \mathbb{R}$]
   b) $f(x) = 1 + \log\sqrt{x}$ [ano, $x > 0$]
   c) $f(x) = 1 + |x|$. [ne, $x \in \mathbb{R}$]

5. K následujícím funkcím (na příslušném definičním oboru) stanovte inverzní funkci:

   a) $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^{2x} + 1},\ x \in \mathbb{R}$; [$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 1);\ x \in (1; \infty)$]
   b) $f(x) = 1 + \log\sqrt{x},\ x > 0$; [$f^{-1}(x) = 10^{2x-2};\ x \in \mathbb{R}$]
   c) $f(x) = 1 + |x|,\ x \leq 0$; [$f^{-1}(x) = 1 - x;\ x \geq 1$]
   d) $f(x) = x^2 + 1,\ x \geq 0$; [$f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1};\ x \geq 1$]
   e) $f(x) = \ln(2 - \sqrt{x}),\ x \in D(f)$; [$f^{-1}(x) = (2 - \mathrm{e}^x)^2;\ x \in (-\infty; \ln 2\rangle$]
   f) $f(x) = 2\ln(1 - 5x),\ x \in D(f)$; [$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(1 - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}});\ x \in \mathbb{R}$]

6. Rozhodněte, které funkce jsou na svém definičním oboru periodické:

   a) $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$
   b) $f(x) = 3\cos 4x$
   c) $f(x) = 5 + 5\sin\left(\frac{x}{2} - 2\right)$
   d) $f(x) = \cos \mathrm{e}^x$. [a) b) c) periodické]

7. U periodických funkcí z předchozího příkladu tohoto odstavce určete jejich primitivní (nejmenší kladnou) periodu. [a) $p = 2\pi$ b) $p = \frac{\pi}{2}$ c) $p = 4\pi$]

„Látce rozumíte bezpečně teprve tehdy,
když jste schopný ji vysvětlit vlastní babičce."
A. Einstein

5. Cyklometrické funkce

1. Určete následující hodnoty:

   a) $\arcsin 60^\circ$, $\arcsin 0$, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$

   b) $\arccos \pi$, $\arccos 1$, $\arccos \frac{1}{2}$

   c) $\operatorname{arctg} 0$, $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$

   d) $\operatorname{arccotg}(-1)$, $\operatorname{arccotg} 0$, $\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3})$.

2. Nakreslete grafy funkcí:

   a) $\arcsin(\sin x)$

   b) $\cos(\arccos x)$.

3. Určete definiční obor a obor hodnot funkcí:

   a) $f(x) : y = 2\arccos(\frac{x}{2} - 1)$ $[D(f) = \langle 0; 4\rangle, \quad H(f) = \langle 0; 2\pi\rangle]$

   b) $f(x) : y = 2\arccos\sqrt{1 - x^2} + 5$ $[D(f) = \langle -1; 1\rangle, \quad H(f) = \langle 5; 5 + \pi\rangle]$

   c) $f(x) : y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ $[D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad H(f) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})\backslash\{0\}]$

   d) $f(x) : y = \ln(\operatorname{arctg}(1 - 2x))$ $[D(f) = (-\infty; \frac{1}{2}), \quad H(f) = (-\infty; \ln\frac{\pi}{2})]$

   e) $f(x) : y = \arcsin(\ln x)$ $[D(f) = \langle \frac{1}{e}; e\rangle, \quad H(f) = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle]$

   f) $f(x) : y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{x}}}$. $[D(f) = \langle 0; 1), \quad H(f) = \langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})]$

4. K daným funkcím najděte funkci inverzní:

   a) $f(x) : y = 2\arccos(\frac{x}{2} - 1)$ $[f^{-1}(x) = 2\cos\frac{x}{2} + 2, \quad D(f^{-1}) = \langle 0; 2\pi\rangle]$

   b) $f(x) : y = 2\arccos\sqrt{1 - x^2} + 5$ [$f^{-1}(x)$ neexistuje, $f(x)$ není prostá]

   c) $f(x) : y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ $[f^{-1}(x) = \operatorname{cotg} x, \quad D(f^{-1}) = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})\backslash\{0\}]$

   d) $f(x) : y = \ln(\operatorname{arctg}(1 - 2x))$ $[f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{tg} \mathrm{e}^x), \quad D(f^{-1}) = (-\infty; \ln\frac{\pi}{2})]$

   e) $f(x) : y = \arcsin(\ln x)$ $[f^{-1}(x) = \mathrm{e}^{\sin x}, \quad D(f^{-1}) = \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle]$

   f) $f(x) : y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sqrt{x}}}$. $[f^{-1}(x) = (1 - \operatorname{cotg}^2 x)^2, \quad D(f^{-1}) = \langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})]$

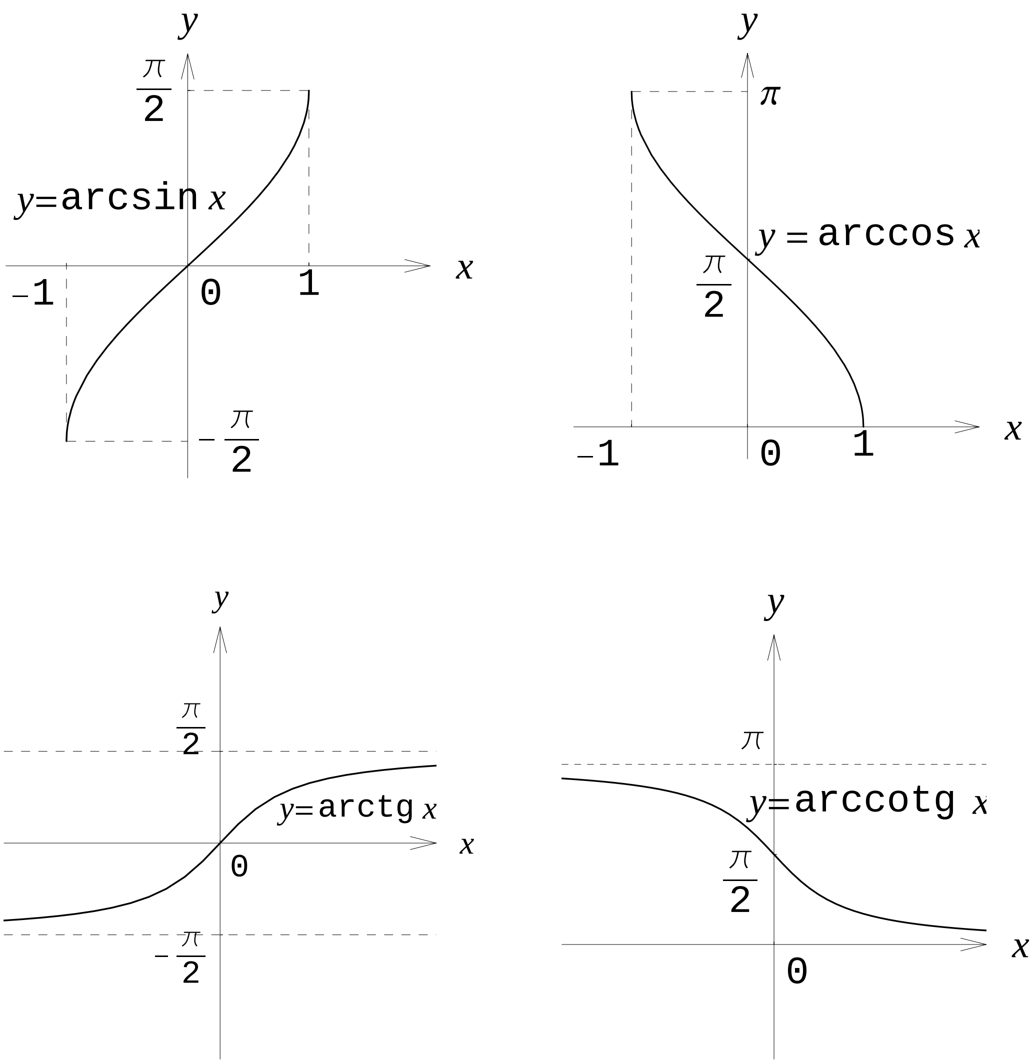
5. Ověřte platnost následujících identit:

a) $\forall x \in \langle 0; 1\rangle$ $\quad \arcsin\sqrt{1-x^2} = \arccos x$

b) $\forall x \in \langle -1; 1\rangle$ $\quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x$

d) $\forall x \in (-1; 1)$ $\quad \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\,.$



„Látce rozumíte bezpečně teprve tehdy,
když jste schopný ji vysvětlit vlastní babičce.“
A. Einstein

1. Supremum a infimum

1. Zjistěte, zda množina M je omezená (resp. omezená shora nebo zdola) a určete její infimum a supremum. Zjistěte, zda existuje maximum a minimum dané množiny:

   a) $M = \{4\}$
   b) $M = \{-3, 9, \sqrt{3}, \pi, -\frac{11}{3}, \ln 2\}$
   c) $M = \langle -5, 5\pi \rangle$
   d) $M = (-5, 5\pi)$
   e) $M = \langle -5, 5\pi)$
   f) $M = \mathbb{N}$
   g) $M = (-\infty; \pi)$
   h) $M = \mathbb{Q}$
   i) $M = \mathbb{R}$
   j) $M = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$
   k) $M = \{\frac{1}{n^2}; n \in \mathbb{N}\}$
   l) $M = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots; n \in \mathbb{N}\}$
   m) $M = \{n^2 - m^2; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$
   n) $M = \{n^2 - m^2; m \in \mathbb{N}, n > m\}$

2. Vyšetřete existenci suprema a infima množiny A:

   a) $A = \{2 \sin x, x \in \mathbb{R}\}$
   b) $A = \{\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}\}$
   c) $A = \{\operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}\}$
   d) $A = \{\arccos x, x \in \langle -1; 1 \rangle\}$
   e) $A = \{\arccos x, x \in (-1; 1)\}$
   f) $A = \{\arccos x, x \in \langle 0; 1)\}$

3. Vyšetřete existenci suprema a infima množiny M a podle definice dokažte, že jde skutečně o infimum/ supremum:

   a) $M = \{\frac{n}{n+2}, n \in \mathbb{N}\}$ $[\sup M = 1, \quad \inf M = \frac{1}{3}]$
   b) $M = \{\frac{n+3}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ $[\sup M = 2, \quad \inf M = 1]$
   c) $M = \{\frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. $[\sup M = \frac{1}{2}, \quad \inf M = -1]$

4. Uveďte příklad množiny, která má supremum, ale nemá maximum.

5. Uveďte příklad množiny, která má infimum, ale nemá minimum.

2. Limita posloupnosti

1. Dokažte podle definice, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$.

2. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ 1 & a = 1 \\ \infty & a > 1 \\ \text{neexistuje} & a \leq (-1)\,. \end{cases}$$

3. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{n\to 2} \dfrac{100n}{n^3+1}$. [Limita posl. ve vlastním bodě nemá smysl!]

4. Ověřte, že

$$\lim_{n\to\infty} n^m = 0 \qquad \text{pro } m \in \mathbb{Q}^-$$
$$\lim_{n\to\infty} n^m = +\infty \qquad \text{pro } m \in \mathbb{Q}^+.$$

5. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000}{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1000n}{\frac{1}{1000}n^2+1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}\cdot\sin(n!)}{n+1}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

[a) 0 b) 0 c) 0 d) 0 e) $\frac{1}{3}$]

6. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^3-n^2+2n-1)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^4-2n^3-n^5+4)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2n}{2n^3+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n-3}{n^3-1}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^2+1}\right)^2$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-2n+1}{\sqrt{5}n-2}$

[a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $\frac{1}{2}$ d) 0 e) 4 f) $+\infty$]

7. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-3)^{20}(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+6n}{n^2-7n+7}$

[a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $+\infty$ d) $\frac{1}{4}$ e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$ f) $+\infty$]

8. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n!}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 4^n}{5^n}$

9. Dokažte pomocí věty o limitě vybrané posloupnosti, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ neexistuje.

10. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}{\sqrt{n+1}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{2n+1}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n(n+a)}-n)$, $a \in \mathbb{R}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

[a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0 d) $\frac{a}{2}$ e) 0 f) neexistuje]

11. Důležité příklady limit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \qquad a > 1, k \in \mathbb{N};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0 \qquad a > 0, k \in \mathbb{N};$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad a > 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

12. Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. [návod: aplikace věty "o dvou policajtech"]

13. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

14. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A^n+B^n+C^n}$, $A, B, C > 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sgn}(n^3-1000n^2+1)}{n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n + n^3 + \frac{1}{n} + \mathrm{e}^n + 5^n}{\log n + n^4 + 5^n + n^3 4^n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

15. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n^2+1)\cdots(n^m+1)}{[(mn)^m+1]^{\frac{m+1}{2}}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin(\ln(n+1)) - \sin(\ln n))$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2+\mathrm{e}^{3n})}{\ln(3+\mathrm{e}^{3n})}$

[a) $m^{-\frac{m}{2}(m+1)}$ b) 0 c) 0 d) 1]

16. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+\sqrt{n}+\sqrt[3]{n})}{\ln(1+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n})}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+3n-1}-n^2}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2-1}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3\cos(2n)}{2n^3+1}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n^2+1)\sin n}{3n^3}$

17. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{8n+7}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{3}-\sin n-\cos n)\dfrac{n^5}{\sqrt[n]{2}-1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+\sqrt{n}}-\sqrt[3]{n^3-1}\right)\sqrt{3n^3+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\lfloor kx \rfloor}{n^2}, \quad x\in\mathbb{R}$

18. Najděte limitu posloupnosti zadané rekurentně:

a) $a_1=\sqrt{2},\ a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ldots,a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$

b) $a_1>0,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$

c) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}\,.$

19. Vypočtěte limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_0\left(1+0,85\cdot\dfrac{p}{100}\cdot\dfrac{1}{n}\right)^{kn}, \quad k\in\mathbb{N}, \quad a_0>0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left\{365+\left|\cos\dfrac{2NR}{4}\right|^n-\left|\cos\dfrac{2NR}{100}\right|^n+\left|\cos\dfrac{2NR}{400}\right|^n\right\}, \quad R=90, \quad N\geq 1582.$

„Bez příkladů, pouček a cvičení
se ničemu neučí, leda nesprávně."
Jan Ámos Komenský

1. Limita funkce

V následujících úlohách vypočtěte limity:

1. a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1} - x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$ d) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x^2-2x} - \dfrac{x}{x^2-4}\right).$

[a) $\frac{2}{3}$ b) 0 c) $\frac{12}{5}$ d) $-\frac{3}{8}$]

2. a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+x^3+\cdots+x^n-n}{x-1}$ [a) $\frac{49}{24}$ b) $\frac{n}{2}(n+1)$]

3. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)\dots(1+nx)-1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{m}{1-x^m} - \dfrac{n}{1-x^n}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1} - \dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

[a) 6 b), f) $\frac{n}{2}(n+1)$ c) $\frac{mn}{2}(n-m)$ d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ e) $\frac{m}{n}$ g) $\frac{1}{2}(m-n)$ h) $\frac{1}{4}$]

4. a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{3x^4-6x^2+5}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^3}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$ f) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to a_+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1-x)}{x}$

[a) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ b), 1 c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{4}$ e) $-\frac{1}{4}$ f) 1 g) $\frac{1}{2}$ h) $\frac{1}{n}$ i) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ j) 0]

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+x}-\sqrt[n]{1+x}}{x^\alpha}$ $\left[\begin{array}{ll} \alpha = 1 & \frac{1}{m}-\frac{1}{n} \\ \alpha < 1 & 0 \\ \alpha > 1 & m > n \ldots -\infty, m < n \ldots +\infty \end{array}\right]$

6. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

[a) $\frac{a}{m}-\frac{b}{n}$ b) $\frac{3}{2}$]

7. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\cos x}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$

[a) neexistuje b) $-\frac{1}{\pi}$ c) 1 d) $1+\operatorname{tg}^2 a$]

8. a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sin x$ b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

c) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin nx}{\sin mx}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\sin a}}{x-a}$

[a) neexistuje b) 0 c) $\pm\frac{n}{m}$ (v závislosti na paritě n, m) d) $-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$]

9. a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

[a) $-\frac{1}{12}$ b) $\sqrt{2}$ c) 14 d) 0]

10. a) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\log_a x-\log_x a}{x-a}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (1-x)\log_x 2$

[a) 0 b) $\frac{a^2}{b^2}$ c) $\frac{2}{a\log a}$ d) $-\log 2$]

11. a) $\displaystyle\lim_{x\to 1_+} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}(\ln x)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x^2$ d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arccotg}\frac{1}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^{\frac{1}{x}}-2^{-x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}\operatorname{arctg}x$

g) $\lim\limits_{x\to1}\ln\dfrac{1}{(1-x)^2}$ h) $\lim\limits_{x\to0_-}\dfrac{x+1}{\operatorname{tg}x}$

[a) $+\infty$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) 1 d) $\frac{\pi}{2}$ e) 1 f) 0 g) $+\infty$ h) $-\infty$]

12. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccotg}(\mathrm{e}^{x})$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccotg}(\mathrm{e}^{x})$

c) $\lim\limits_{x\to0_+}\dfrac{1}{\operatorname{arctg}(\sin x)}$ d) $\lim\limits_{x\to1_+}\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

[a) $\frac{\pi}{2}$ b) 0 c) $+\infty$ d) $\frac{\pi}{2}$]

13. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$

[a) e^{-1} b) 1 c) 1 d) e^{2a}]

14. a) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}-\frac{\pi}{4}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\ln(1+x)}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\operatorname{arctg}x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

[a) 1 b) $-\frac{1}{2}$ c) 1 d) -1]

15. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log^{\alpha}x}{x^{\beta}},\quad \alpha,\beta>0$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{\mathrm{e}^{\beta x}},\quad \alpha,\beta>0$

c) $\lim\limits_{x\to0+}x^{\alpha}\log^{\beta}x,\quad \alpha,\beta>0$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^{x})}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{1+\ln x}}{\ln(\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{-3x})}$

[a) 0 b) 0 c) 0 d) 1 e) $\frac{\mathrm{e}}{3}$]

16. a) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{\ln(1-x)}$

c) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$ d) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x\cos x}+\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{arccotg}(\mathrm{e}^{-x}\sin x)$ f) $\lim\limits_{x\to0}\sin\left(\ln\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}}\right)$

[a) $\frac{15}{2}$ b) neexistuje c) 4 d) 2 e) $\frac{\pi}{2}$ f) 0]

17. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^x$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1-2x}{5-2x}\right)^x$ d) $\lim\limits_{x\to 0_+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

[a) 0 b) e^{-1} c) e^2 d) e]

18. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}, \quad a>0$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x + x}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\log x - \log 10}{\log \frac{10}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

[a) $\frac{1}{a}$ b) $+\infty$ c) -1 d) neexistuje]

19. a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{\ln \dfrac{x+4}{x+3}}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\operatorname{arctg} \mathrm{e}^{-2x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$ d) $\lim\limits_{x\to 0_+} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{9x^2+(2x-1)} - \sqrt{9x^2-(2x-1)}\right)$

[a) 0 b) $-\infty$ c) -1 d) $\frac{1}{2}$ e) 1 f) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ g) $-\frac{2}{3}$]

20. a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{9x+2x^2} - x\sqrt{2}}$ b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)}$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{\arcsin 2^x}{\pi + \operatorname{arccotg} x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$

[a) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{21}$ d) 3]

21. a) $\lim\limits_{x\to 0} x \dfrac{\mathrm{e}^{\sin x} - 1}{1-\cos x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

[a) 2 b) 4 c) -3]

„Matematika nám neslúži len na poznávanie prírody, ale je tiež mohutným nástrojom na jej ovládnutie.“
Štefan Schwarz

1. Derivace funkce jedné reálné proměnné

1. Vypočtěte následující derivace:
   a) $f'(\pi)$, $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$
   b) $f'(0)$, $f(x) = \operatorname{tg}(\sin x)$
   c) $f'(x)$, $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$
   d) $f'(x)$, $f(x) = 10^{\sqrt{x}}$
   e) $f'(-3)$, $f(x) = |x + 3|$
   f) $f'(x)$, $f(x) = \mathrm{e}^{\ln x^2}$
   g) $f'(x)$, $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x}}$
   h) $f'(x)$, $f(x) = x^x$.

2. Ve kterých bodech mají křivky o rovnicích
$$y = x^3 - x - 1 \text{ a } y = 3x^2 - 4x + 1$$
rovnoběžné tečny? $[(1, -1), (1, 0)]$

3. Dokažte, že funkce
$$f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{\frac{1}{x+1}}$$
je pro $x \in (0; \infty)$ konstantní a určete hodnotu této konstanty.

4. Dokažte, že funkce
$$f(x) = \arcsin \sqrt{1 - 4x} + \frac{1}{2} \arcsin(8x - 1)$$
je konstantní. Určete hodnotu této konstanty a definiční obor funkce f.

5. Vypočtěte derivace následujících funkcí ve všech bodech definičního oboru:
   a) $f(x) = \arcsin x - \frac{1}{2} \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2})$
   b) $f(x) = 3x - 3\sqrt[3]{(x - 1)^2}$
   c) $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2} \arccos x$
   d) $f(x) = |1 + x|^{|1-x|}$.

2. L'Hospitalovo pravidlo

Vypočtěte limity:

1. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8^x - 2^x}{15^x - 3^x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi - 2\mathrm{arctg}\, x}{\ln(1+\frac{1}{x})}$

c) $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}, \quad a, b > 0$ d) $\lim\limits_{x\to 0_+} x\ln x^2$

[a) $\frac{\ln 4}{\ln 5}$ b) 2 c) 1 d) 0]

2. a) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\mathrm{e}^{2x})\mathrm{cotg}\, x$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{\mathrm{cotg}\, x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x}{x - \sin x}$

[a) -2 b) $\frac{1}{2}$ c) -1 d) 1, ale l'H nelze použít]

3. a) $\lim\limits_{x\to 1_-} (\sin\pi x)^{\ln x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0_+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\mathrm{e}^x$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$

[a) 1 b) e c) 0 d) $\frac{1}{2}$]

4. a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\mathrm{cotg}\, x - \dfrac{1}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\, x\right)^x$

c) $\lim\limits_{x\to 0_+} x^x$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - \cos x}{x^2}$

[a) 0 b) 1 c) 1 d) 1]

5. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0_+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\{\frac{\alpha}{\ln x} + \frac{1}{x}\}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, x - x}{x - \sin x}$

[a) 2 b) 1 c) e^α d) 2]

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)^4 - 4x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^4}{6\sin x - 6x + x^3}$ [16]

Příklady ke cvičením z matematické analýzy pro informatiky
ZS 2009/2010 - Série VIII.

„To, co stojí za sdělení, se vejde do dvou tří řádků.
Zbytek jsou vysvětlivky k nejasným formulacím.“

1. Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce postupujte podle těchto kroků:

1. definiční obor;
2. průsečíky grafu s osami souřadnými;
3. spojitost v bodech definičního oboru; sudost, lichost;
4. limity v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti, pokud existují;
5. asymptoty v ∞ a v $-\infty$, vertikální asymptoty;
6. existence a hodnota oboustranné derivace, resp. jednostranných derivací;
7. maximální intervaly, na nichž je funkce monotónní;
8. extrémy a lokální extrémy;
9. maximální intervaly, na nichž je funkce konkávní, resp. konvexní, inflexní body;
10. nakreslete graf funkce a určete obor hodnot.

Vyšetřete průběhy následujících funkcí:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

c) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$

d) $f(x) = x^2 \ln^2 x$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

g) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x} - 1$

h) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$

i) $f(x) = \operatorname{arctg}(\ln x)$

j) $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$

k) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

l) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

m) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{1+x}$

n) $f(x) = |2-x|\mathrm{e}^{x-1}$