Matice přechodu

Základní úkol: *Určete matici přechodu od báze M k bázi N.*
Každou bázi napíšeme do sloupců matice, např. u příkladu 7 (v $\mathbb{Z}_5^3$) dostaneme:

$$M := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}; N: = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix};$$

Nyní bychom mohli postupovat jako u matice homomorfismu vzhledem k bázím M, N, naším homomorfismem by však nyní byla identita (identický automorfismus), která nedělá nic, každý vektor zobrazí na sebe sama. Jeho maticí je jednotková matice *E* (skutečně: $E \cdot u = u$ pro jakýkoli vektor *u* z příslušného prostoru). Maticí přechodu od báze M k bázi N by tedy měla být matice, v jejíchž sloupcích budou souřadnice vektorů staré báze M vzhledem k nové bázi N.

Ukážeme si nyní postup ekvivalentní, teoreticky však vysvětlený jinak – bez použití homomorfismů.
Co je to vlastně matice přechodu od báze M k bázi N?
Označme ji *P*. Je to matice, která „přemění" souřadnice vektoru *u* vzhledem ke „staré" bázi M na jeho souřadnice vzhledem k „nové" bázi N, tedy umožní přechod od „staré" báze M k „nové" bázi N.

$$\langle u \rangle_N = P \cdot \langle u \rangle_M$$

Označme prvky hledané matice *P* takto:

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Její sloupce budou tedy vektory $a = \left(a_1,\ a_2,\ a_3 \right)$, $b = \left(b_1,\ b_2,\ b_3 \right)$, $c = \left(c_1,\ c_2,\ c_3 \right)$.

Pozorování 1. (souřadnice vektorů báze M vzhledem k bázi M)

Máme-li bázi M a její prvky označíme $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, tak:
Jaké jsou souřadnice prvního vektoru m_1 z báze M vzhledem k bázi M?
$m_1 = 1 \cdot m_1 + 0 \cdot m_2 + 0 \cdot m_3$, takže $\langle m_1 \rangle_M = (1, 0, 0)$
Jaké jsou souřadnice druhého vektoru m_2 z báze M vzhledem k bázi M?
$m_2 = 0 \cdot m_1 + 1 \cdot m_2 + 0 \cdot m_3$, takže $\langle m_2 \rangle_M = (0, 1, 0)$
Jaké jsou souřadnice třetího vektoru m_3 z báze M vzhledem k bázi M?
$m_3 = 0 \cdot m_1 + 0 \cdot m_2 + 1 \cdot m_3$, takže $\langle m_3 \rangle_M = (0, 0, 1)$

To jsou velmi hezké výsledky, jistě se s nimi bude dobře počítat, tak se nyní pokusme do vztahu

$$\langle u \rangle_N = P \cdot \langle u \rangle_M$$

dosadit za *u* postupně vektory báze M, tj. vektory m_1, m_2, m_3. Dopadne to takto:

Pozorování 2.

$P \cdot \langle m_1 \rangle_M = P \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$ první sloupec matice *P*, tj. $P \cdot \langle m_1 \rangle_M = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, což je však $\langle m_1 \rangle_N$

$P \cdot \langle m_2 \rangle_M = P \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$ druhý sloupec matice P, tj. $P \cdot \langle m_2 \rangle_M = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, což je však $\langle m_2 \rangle_N$

$P \cdot \langle m_3 \rangle_M = P \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$ třetí sloupec matice P, tj. $P \cdot \langle m_3 \rangle_M = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, což je však $\langle m_3 \rangle_N$

Z definice matice přechodu

$$\langle u \rangle_N = P \cdot \langle u \rangle_M$$

tedy dostáváme, že

Maticí přechodu od báze M k bázi N je matice, v jejíchž sloupcích jsou souřadnice vektorů „staré“ báze M vzhledem k „nové“ bázi N.

Poslední pozorování za účelem konkrétního výpočtu matice přechodu:
Jaká by byla matice přechodu od báze M ke kanonické bázi?

Pozorování 3.

Předně: souřadnice vektorů báze M jsou zadány vždy vzhledem ke kanonické bázi, takže to, co čteme v zadání, jsou souřadnice báze M vzhledem ke kanonické bázi.
Z definice $\langle u \rangle_{KB} = P \cdot \langle u \rangle_M$ matice přechodu (od báze M ke kanonické bázi) dostáváme:

$P \cdot \langle m_1 \rangle_M = P \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \langle m_1 \rangle_{KB}$, $\langle m_1 \rangle_{KB}$ je však přímo napsáno v zadání

$P \cdot \langle m_2 \rangle_M = P \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \langle m_2 \rangle_{KB}$, $\langle m_2 \rangle_{KB}$ je však přímo napsáno v zadání

$P \cdot \langle m_3 \rangle_M = P \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \langle m_3 \rangle_{KB}$, $\langle m_3 \rangle_{KB}$ je však přímo napsáno v zadání

Takže:
Matice přechodu od báze M ke kanonické bázi je přímo matice *M*, která má ve sloupcích zapsány vektory báze M.
(Neboli: ve sloupcích matice M jsou souřadnice vektorů báze M vzhledem ke kanonické bázi – a to je přesně to, čím je báze M vždy zadána.)
Stručně zapsáno:

$$P_{M,\,KB} = M$$

neboli

$$\langle u \rangle_{KB} = M \cdot \langle u \rangle_M$$

Zjistěme nyní, jak lze přejít od kanonické báze k nějaké jiné bázi, např. k bázi M.

Počítání 1.

Hledáme tedy matici $P_{KB,\,M}$, což je v jistém smyslu inverzní úloha k té předchozí.
Zatím víme: $\langle u \rangle_{KB} = M \cdot \langle u \rangle_M$ a do této rovnosti dosaďme tentokráte vektory kanonické báze E,
$E = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
Obdržíme:

$\langle e_1\rangle_{KB} = M\cdot\langle e_1\rangle_M$, neboli $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = M\cdot\langle e_1\rangle_M$

$\langle e_2\rangle_{KB} = M\cdot\langle e_2\rangle_M$, neboli $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = M\cdot\langle e_2\rangle_M$

$\langle e_3\rangle_{KB} = M\cdot\langle e_3\rangle_M$, neboli $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = M\cdot\langle e_3\rangle_M$

Jedná se o tři soustavy, které je potřeba vyřešit. Matici *M* totiž známe (ve sloupcích je zadaná báze M), pravé strany jsou vektory kanonické báze. Neznáme pouze souřadnice $\langle e_i\rangle_M$ vektorů kanonické báze vzhledem k bázi M. Vypočteme je řešením soustav. A všechny tyto tři soustavy mají tutéž matici *M*, je tedy efektivní je řešit najednou. Vznikne tak soustava se třemi pravými stranami. Pro konkrétní bázi M z příkladu 7 to dopadne takto:

$M := \begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\3 & 2 & 4\\0 & 4 & 3\end{bmatrix}$

tj.
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0\\0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

stručně zapsáno $(M|E)$. Tuto soustavu řešíme obvyklým způsobem: Gaussovou eliminační metodou.

Cílem je upravit levou část na tvar $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, odkud potom v pravé části přímo čteme v jednotlivých sloupcích řešení – v prvním sloupci jsou tedy souřadnice prvního vektoru kanonické báze (1, 0, 0) vzhledem k bázi M, ve druhém sloupci $\langle e_2\rangle_M$ a ve třetím sloupci se nachází $\langle e_3\rangle_M$.

Matice, která má ve sloupcích souřadnice vektorů kanonické báze vzhledem k bázi M je maticí přechodu od kanonické báze k bázi M, tj. získali jsme přímo $P_{KB,\,M}$. Stručně zapsáno:

$$(M|E) \sim \ldots \sim (E|P_{KB,\,M})$$

V konkrétním zadaném případě (počítáme v $\mathbb{Z}_5^3$) dostaneme:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0\\0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4\\0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 4\\0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0\end{array}\right]$$

Dostali jsme tedy $P_{KB,\,M} = \begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\3 & 2 & 4\\1 & 4 & 0\end{bmatrix}$.

Završení – libovolná matice přechodu

Když jsme chtěli matici přechodu od kanonické báze k bázi M, tak jsme řešili soustavu s třemi pravými stranami $(M|E)$. Vidíme, že obě báze jsou napsány vedle sebe (v opačném pořadí, souvisí se schématy, která také kreslíme obráceně).

Budeme-li chtít obecně matici přechodu od báze N k bázi M, budeme řešit podobnou soustavu se třemi pravými stranami: $(M|N)$.

$$(M|N) \sim \ldots \sim (E|P_{N,\,M})$$

V našem případě, kdy

$M := \begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\3 & 2 & 4\\0 & 4 & 3\end{bmatrix}; N := \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\2 & 1 & 4\end{bmatrix};$

počítáme:

$$\left(M|N\right)\sim\ldots\sim\left(E|P_{N,\,M}\right)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&2&0&1&2&3\\3&2&4&0&1&2\\0&4&3&2&1&4\end{array}\right]\sim\ldots\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&1&0\\0&1&0&1&2&4\\0&0&1&1&1&1\end{array}\right]\quad \text{odkud máme } P_{N,\,M}=\begin{bmatrix}3&1&0\\1&2&4\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Podobně můžeme snadno spočítat matici přechodu od báze M k bázi N.

$$\left(N|M\right)\sim\ldots\sim\left(E|P_{M,\,N}\right)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&3&2&0\\0&1&2&3&2&4\\2&1&4&0&4&3\end{array}\right]\sim\ldots\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&4&2&2\\0&1&0&4&4&4\\0&0&1&2&4&0\end{array}\right]\quad \text{odkud máme } P_{M,\,N}=\begin{bmatrix}4&2&2\\4&4&4\\2&4&0\end{bmatrix}$$

K zamyšlení: soustava pro matici přechodu od báze N k bázi M vypadá takto: $\left(M|N\right)\sim\ldots\sim\left(E|P_{N,\,M}\right)$.
Jak bude vypadat soustava pro nalezení matice přechodu od báze M ke kanonické bázi?
V Pozorování 3 nám však tato matice přechodu vyšla, aniž bychom museli cokoli řešit, byla to přímo matice *M*. Jak to jde dohromady?

Propojení 1.

Vynásobíme-li rovnost

$$\langle u\rangle_{KB}=M\cdot\langle u\rangle_M$$

inverzní maticí zleva, dostaneme

$$M^{-1}\cdot\langle u\rangle_{KB}=M^{-1}\cdot M\cdot\langle u\rangle_M$$

neboli $M^{-1}\cdot\langle u\rangle_{KB}=E\cdot\langle u\rangle_M$, tj. $M^{-1}\cdot\langle u\rangle_{KB}=\langle u\rangle_M$. Vidíme tedy, že matice přechodu $P_{KB,\,M}=M^{-1}$.
Inverzní matici tedy získáme řešením soustavy se třemi pravými stranami, které jsou tvořeny jednotkovou maticí:

$$\left(M|E\right)\sim\ldots\sim\left(E|M^{-1}\right)$$

Propojení 2.

Předchozí výsledek lze zobecnit: matice přechodu od jedné báze ke druhé je inverzní k matici přechodu od druhé bázi k první:

$$P_{M,\,N}=P_{N,\,M}^{-1}$$

Skutečně, uvážíme-li, že $P_{M,\,N}=N^{-1}\cdot M$ a $P_{N,\,M}=M^{-1}\cdot N$, dostaneme vynásobením

$$P_{M,\,N}\cdot P_{N,\,M}^{-1}=N^{-1}\cdot M\cdot M^{-1}\cdot N=N^{-1}\cdot E\cdot N\ \ =N^{-1}\cdot N=E$$

obě matice přechodu jsou tedy k sobě inverzní.
A přes zobrazení: složením dvou přechodů: od báze M k bázi N a pak zpět od báze N k bázi M vlastně neudělám vůbec nic, složením tedy bude identické zobrazení, jehož maticí je jednotková matice *E*. Maticově lze složení těchto dvou přechodů zapsat $P_{M,\,N}\cdot P_{N,\,M}=E$, odkud je zřejmé, že jsou obě matice k sobě inverzní.

Propojení 3.

Dosadíme-li rovnost $\langle u\rangle_{KB}=M\cdot\langle u\rangle_M$ do rovnosti $N^{-1}\cdot\langle u\rangle_{KB}=\langle u\rangle_N$, obdržíme

$$\langle u\rangle_N=N^{-1}\cdot\langle u\rangle_{KB}=N^{-1}\cdot M\cdot\langle u\rangle_M$$

tj. matice přechodu od báze M k bázi N je

$$P_{M,\,N}=N^{-1}\cdot M$$

Tento vztah reprezentuje složení dvou změn báze (složení těchto dvou zobrazení je reprezentováno násobením matic). První je proveden (maticí *M*) přechod od báze M ke kanonické a poté (maticí N^{-1}) přechod od kanonické báze k bázi N. Symbolicky zapsáno: $P_{M,\,N}\cdot u=N^{-1}\cdot(M\cdot u)$.

Rekapitulace na příkladu

Buďte dány báze M a N prostoru $\mathbb{Z}_3^3$.

$M = \{(1, 2, 0), (2, 1, 1), (1, 0, 1)\}$
$N = \{(2, 2, 1), (1, 2, 1), (0, 0, 2)\}$
Určete následující matice přechodu.

1. od báze M ke kanonické bázi
2. od báze N ke kanonické bázi
3. od kanonické báze k bázi M
4. od kanonické báze k bázi N
5. od báze N k bázi M
6. od báze M k bázi N

Řešení.

1. Matice přechodu je matice, která má ve sloupcích souřadnice vektorů „staré“ báze M vzhledem k „nové“ bázi kanonické. Tyto souřadnice máme přímo v zadání, takže matice přechodu bude obsahovat ve sloupcích přímo zadané souřadnice vektorů báze M.

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}:$$

2. Opět snadné, do sloupců zapíšeme souřadnice vektorů báze N. Pozor, přesně v pořadí, ve kterém jsou zadány.

$$N := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}:$$

3. Nyní je to náročnější, ve sloupcích hledané matice přechodu mají být souřadnice vektorů „staré“ báze kanonické vzhledem k „nové“ bázi M. Tyto souřadnice musíme dopočítat ze soustavy, tři soustavy pro tři vektory, matice soustavy je stále týž, je to matice M. Takže řešíme soustavu se třemi pravými stranami, pravé strany jsou vektory kanonické báze, tj.:

$$(M|E) \sim \ldots \sim (E|P_{KB, M})$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

4. Podobně jako v předchozím příkladě budeme řešit soustavu s maticí N a se třemi pravými stranami, pravé strany jsou vektory kanonické báze, tj.:

$$(N|E) \sim \ldots \sim (E|P_{KB, N})$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

5. Ve sloupcích hledané matice přechodu mají být souřadnice vektorů „staré“ báze N vzhledem k „nové“ bázi M, viz případ 3. Tyto souřadnice musíme dopočítat ze soustavy, tři soustavy pro tři vektory, matice soustavy je stále týž, je to matice M. Takže řešíme soustavu se třemi pravými stranami, pravé strany jsou vektory báze N, tj.:

$$(M|N) \sim \ldots \sim (E|P_{N, M})$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Matice přechodu od báze N k bázi M je tedy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Máme dvě možnosti. Můžeme řešit soustavu

$$(N|M) \sim \ldots \sim (E|P_{M,N})$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

a matice přechodu od báze M k bázi N vyjde $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Nebo můžeme využít toho, že matice přechodu od báze M k bázi N je inverzní k matici přechodu od báze N k bázi M, tj.

$$P_{M,N} = P_{N,M}^{-1}$$

Takže stačí určit inverzní matici k již zjištěné matici $P_{N,M}$, což provedeme opět řešením soustavy se třemi pravými stranami (viz též 3 a 4):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Hledanou maticí přechodu je tedy $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Podněty k dalšímu zamyšlení

1. Mějme zadánu nějakou bázi $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ v $\mathbb{R}^3$. Záměnou pořadí bázových vektorů vznikne nová báze $M' = \{m_2, m_3, m_1\}$.
Jak bude vypadat matice přechodu od báze M k bázi M′?
(Lze si to ujasnit na konkrétním číselném příkladě.)

2. Zakresleme v $\mathbb{R}^2$ vektor $u = (3, 4)$.
Nyní mějme bázi $M = \{(1, 1), (2, 3)\}$ v $\mathbb{R}^2$. Zakresleme tyto bázové vektory jinou barvou.
Určeme souřadnice vektoru *u* vzhledem k bázi M.
Matice přechodu od kanonické báze k bázi M je inverzní matice k matici

$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$: tj. $M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Souřadnice vektoru *u* vzhledem k bázi M budou $M^{-1} \cdot u$, tj. $\langle u \rangle_M = (1, 1)$.
Vektor *u* je tedy součtem obou vektorů báze M, naznačíme-li do obrázku k bázovým vektorům příslušný rovnoběžník, bude to vidět.

Podobně se pokusme určit souřadnice vektoru $v = (4, 5)$. Vzhledem k bázi M bude mít souřadnice $M^{-1} \cdot v = (2, 1)$. Pokusme se i toto znázornit do obrázku.