Kapitola 3

Systémy obyčejných diferenciálních rovnic

3.1 Kvalitativní teorie

Dosud jsme se zabývali jedinou diferenciální rovnicí o jedné neznámé funkci. V této závěrečné kapitole si všimneme případu n diferenciálních rovnic o n neznámých, kde $n \geq 1$ je přirozené číslo. Pro jednoduchost se omezíme jen na systémy v explicitním tvaru. Dále se omezíme na rovnice obsahující pouze první derivace neznámých funkcí, což, jak naznačíme níže v poznámce 3.1, není na újmu obecnosti.

Uvažujme n funkcí $f_1(x, z_1, \ldots, z_n)$, $f_2(x, z_1, \ldots, z_n), \ldots, f_n(x, z_1, \ldots, z_n)$, které jsou definované na otevřené množině $\Omega \subset R^{n+1}$. *Systémem n diferenciálních rovnic prvního řádu* o n neznámých funkcích $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ nazýváme soustavu tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Definice 3.1 Nechť $(h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x))$ je n-tice funkcí definovaných na otevřeném intervalu J. Tato n-tice se nazývá *řešením* systému (3.1), jestliže každá funkce $h_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, má derivaci na J, pro každé $x \in J$ je splněno $(x, h_1(x), \ldots, h_n(x)) \in \Omega$ a platí

$$
\begin{aligned}
h_1'(x) &= f_1\left[x, h_1(x), \ldots, h_n(x)\right], \\
h_2'(x) &= f_2\left[x, h_1(x), \ldots, h_n(x)\right], \\
&\vdots \\
h_n'(x) &= f_n\left[x, h_1(x), \ldots, h_n(x)\right]
\end{aligned}
$$

pro každé $x \in J$.

Zdůrazněme ještě jednou, že *jedním* řešením systému (3.1) je n-tice funkcí; za každou neznámou y_i musíme dosadit jednu funkci $h_i(x)$.

Dalším pojmem, který zavedeme, bude počáteční úloha.

Definice 3.2 Nechť je dána $(n+1)$-tice $(x_0, c_1, \ldots, c_n) \in \Omega$. Pak úloha najít řešení $(y_1(x), \ldots, y_n(x))$ systému (3.1), které je definované na nějakém intervalu I obsahujícím x_0 a takové, že

$$y_1(x_0) = c_1, \ y_2(x_0) = c_2, \ \ldots, \ y_n(x_0) = c_n,$$

se nazývá *Cauchyova počáteční úloha* pro systém (3.1).

V daném bodě x_0 tedy předepisujeme hodnotu každé složky řešení.

Zápis systému (3.1) je dost těžkopádný. Proto budeme používat následující vektorovou symboliku. Označme

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T \quad \text{a} \quad \boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)^T;$$

zde ^{T} značí transponovanou matici, tj. řádek se mění na sloupec a naopak. Tedy $\boldsymbol{f}$ chápeme jako zobrazení Ω do R^n, které $(n+1)$-tici čísel $(x, y_1, \ldots, y_n) = (x, \boldsymbol{y})$ přiřadí n-tici čísel

$$\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \boldsymbol{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \boldsymbol{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Dále derivací matice, jejíž prvky jsou funkce, budeme rozumět matici, jejíž prvky jsou derivace prvků původní matice, tj. např.

$$\boldsymbol{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

Nyní je možné systém (3.1) zapsat velice snadně jako

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}). \tag{3.2}$$

Na obou stranách této vektorové rovnice jsou sloupce. Porovnáme-li jejich prvky, dostaneme právě systém (3.1).

Všimněte si, že formálně vypadá zápis (3.2) jako jedna rovnice prvního řádu v explicitním tvaru — viz (1.2) na str. 2. To je obrovská přednost, která nesmírně usnadňuje zápis systémů diferenciálních rovnic.

Podobně, označíme-li $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$, lze Cauchyovu počáteční úlohu stručně zapsat takto:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{c}. \tag{3.3}$$

Dále si ukážeme, že diferenciální rovnici n-tého řádu v explicitním tvaru lze chápat jako speciální případ (3.1). Jde o rovnici

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{3.4}$$

Označme

$$y_1 = y, \; y_2 = y', \; \dots \; , y_n = y^{(n-1)}.$$

Platí tudíž

$$\begin{aligned}
y_1' &= y' &&= y_2, \\
y_2' &= y'' &&= y_3, \\
&\vdots \\
y_{n-1}' &= y^{(n-1)} &&= y_n, \\
y_n' &= y^{(n)} &&= f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n),
\end{aligned}$$

což vede k systému

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2, \\
y_2' &= y_3, \\
&\vdots \\
y_{n-1}' &= y_n, \\
y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

To je systém tvaru (3.1), kde

$$\begin{aligned}
f_1(x, y_1, \dots, y_n) &= y_2, \\
f_2(x, y_1, \dots, y_n) &= y_3, \\
&\vdots \\
f_{n-1}(x, y_1, \dots, y_n) &= y_n, \\
f_n(x, y_1, \dots, y_n) &= f(x, y_1, \dots, y_n).
\end{aligned}$$

Zřejmě platí

Věta 3.1 *Funkce* $y(x)$, $x \in I$, *je řešením rovnice* (3.4) *právě tehdy, když* $\left(y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right)$ *je řešením systému* (3.5).

Tedy z výsledků týkajících se systému (3.1), které jsou uvedeny dále, plynou mimo jiné i výsledky o rovnici (3.4), které jsou ve druhé kapitole, ale i výsledky o rovnici (3.2), kde $n = 1$, tj. výsledky první kapitoly. Všimněte si, že i počáteční úlohy pro rovnici (3.4) a systém (3.5) si odpovídají.

Poznámka 3.1 Analogicky je možné i systémy vyššího řádu s osamostatněnými nejvyššími derivacemi převést na systémy prvního řádu s větším počtem neznámých.

Definice 3.3 Řekneme, že počáteční úloha (3.3) má *právě jedno řešení*, jestliže pro každou dvojici řešení

$$\boldsymbol{h}(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x))^T, \ x \in I, \quad \boldsymbol{k}(x) = (k_1(x), \dots, k_n(x))^T, \ x \in J,$$

této úlohy existuje okolí O bodu x_0, $O \subset I \cap J$, tak, že

$$\boldsymbol{h}(x) = \boldsymbol{k}(x), \quad \text{tj.} \quad h_1(x) = k_1(x), \dots, h_n(x) = k_n(x) \quad \text{pro } x \in O.$$

Řekneme, že vektorová funkce $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ splňuje Lipschitzovu podmínku, jestliže každá její složka $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n$, splňuje Lipschitzovu podmínku ve smyslu uvedeném na str. 49. Podobně spojitostí $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ rozumíme, že každá složka $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ je spojitá.

Nyní lze dokázat

Věta 3.2 (O existenci a jednoznačnosti) *Nechť $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ je spojitá na Ω. Pak pro každé $(x_0, \boldsymbol{c}) \in \Omega$ má počáteční úloha*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{c}$$

alespoň jedno řešení.

Splňuje-li navíc $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ v každém bodě Ω lokálně Lipschitzovu podmínku, je toto řešení jediné.

Předchozí věta nám zaručuje, že za jistých podmínek prochází každým bodem $(x_0, \boldsymbol{c})$ množiny Ω (aspoň jedno) řešení, které je definované na jistém intervalu, jenž je okolím bodu x_0. Doposud jsme se však nezajímali (ani pro jednu rovnici) otázkou, jak moc velký může tento interval být. To vzápětí napravíme. Vzhledem k tomu, že jedna rovnice (i vyššího řádu) je speciálním případem systému (3.2), budou následující výsledky platit i pro rovnice vyšetřované v kapitolách 1 a 2.

Definice 3.4 Nechť $\boldsymbol{y}_1(x)$, $x \in I_1$, a $\boldsymbol{y}_2(x)$, $x \in I_2$, jsou dvě řešení systému (3.2).

Řekneme, že $\boldsymbol{y}_1(x)$ je *prodloužením* $\boldsymbol{y}_2(x)$, jestliže $I_1 \supset I_2$ a pro každé $x \in I_2$ je $\boldsymbol{y}_1(x) = \boldsymbol{y}_2(x)$.

Řešení $\boldsymbol{y}_1(x)$ nazveme *vlastním* prodloužením $\boldsymbol{y}_2(x)$, jestliže je jeho prodloužením a přitom $I_1 \neq I_2$.

Řešení $\boldsymbol{y}(x)$ systému (3.2) se nazývá *úplné*, jestliže neexistuje jeho vlastní prodloužení (říkáme též, že je neprodloužitelné).

Úplné řešení je tedy právě to řešení, jehož definiční obor již není možné zvětšit. Platí pro ně obdoba věty 3.2.

Věta 3.3 *Nechť $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ je spojitá na Ω. Pak pro každé $(x_0, \boldsymbol{c}) \in \Omega$ má počáteční úloha*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{c}$$

alespoň jedno úplné řešení.

Splňuje-li navíc $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ v každém bodě Ω lokálně Lipschitzovu podmínku, je toto úplné řešení jediné.

Výsledky o úplném řešení lze podstatně prohloubit, avšak to je již mimo rámec těchto skript. Zájemce odkazujeme např. na práce [14, str. 22] nebo též [20, str. 36].

3.2 Lineární systémy

Tak jako ve druhé kapitole, i zde se omezíme na studium lineárních systémů. Jejich význam by bylo možné zdůvodnit podobně jako u jedné rovnice vyššího řádu — viz str. 51. I zde lze provést linearizaci, tj. nahradit pravé strany (3.1) totálním diferenciálem se středem v nějakém řešení a pak zanedbat zbytek. Detaily provádět nebudeme. Stejně tak by bylo možné hovořit o spojité závislosti řešení na počátečních podmínkách a parametrech. Literatura uvedená v kapitole 2 na str. 53 se týká převážně i systémů.

A nyní již přejdeme ke studiu lineárních systémů. Systém tvaru

$$\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(x)y_1 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x),\\
y_2' &= a_{21}(x)y_1 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x),\\
&\;\vdots\\
y_{n-1}' &= a_{n-11}(x)y_1 + \cdots + a_{n-1n}(x)y_n + b_{n-1}(x),\\
y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

se nazývá *lineární systém* obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

Tento systém se nazývá *homogenní*, jestliže platí, že $b_i(x) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$. Pokud alespoň jedna funkce $b_i(x)$ není identicky nulová, nazývá se systém *nehomogenní.*

Protože zápis (3.6) je velice komplikovaný, pokusíme se opět použít maticovou symboliku. Označme

$$\boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}.$$

Matici $\boldsymbol{A}(x)$ budeme nazývat maticí koeficientů systému (3.6), $\boldsymbol{B}(x)$ sloupcem pravých stran a $\boldsymbol{y}(x)$ sloupcem neznámých. Nyní lze snadno ověřit, že (3.6) je ekvivalentní zápisu

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}(x), \tag{3.7}$$

kde $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ značí součin dvou matic, + značí součet matic a derivace se provádí po složkách.

Věta 3.4 *Nechť maticové funkce $\boldsymbol{A}(x)$ a $\boldsymbol{B}(x)$ jsou spojité na otevřeném intervalu I. Pak pro každé $x_0 \in I$ a $\boldsymbol{c} \in R^n$ má počáteční úloha*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}(x), \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{c},$$

právě jedno (úplné) řešení, které je definované na celém I.

V dalším budeme automaticky předpokládat (pokud nebude výslovně řečeno jinak), že $\boldsymbol{A}(x)$ a $\boldsymbol{B}(x)$ jsou spojité.

Pro lineární systémy rovněž platí *princip superpozice.* Důkaz je obdobný jako u jedné rovnice prvního řádu.

Věta 3.5 *Nechť $\boldsymbol{y}_1(x)$ je řešení systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}_1(x)$ a $\boldsymbol{y}_2(x)$ je řešení systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}_2(x)$. Nechť $c_1, c_2 \in R$. Pak sloupec $c_1\boldsymbol{y}_1(x) + c_2\boldsymbol{y}_2(x)$ je řešení systému $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + c_1\boldsymbol{B}_1(x) + c_2\boldsymbol{B}_2(x)$.*

Všimněme si vztahu lineární diferenciální rovnice n-tého řádu a systému. Použijeme-li na rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{3.8}$$

postup uvedený na str. 84, má systém odpovídající systému (3.5) tvar

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2, \\
y_2' &= y_3, \\
&\vdots \\
y_{n-1}' &= y_n, \\
y_n' &= -a_0(x)y_1 - a_1(x)y_2 - a_2(x)y_3 - \cdots - a_{n-1}(x)y_n + b(x).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Tedy

$$\boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-2}(x) & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix},$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

Odpovídající systém (3.9) je tudíž rovněž lineární a velice speciálního tvaru. Naopak každému systému tvaru (3.9) odpovídá jedna rovnice n-tého řádu tvaru (3.8). V tomto smyslu jsou tedy (3.8) a (3.9) ekvivalentní.

3.2.1 Homogenní systémy

Jde o systémy tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n, \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n, \end{aligned} \qquad \text{tj. maticově} \quad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}. \tag{3.10}$$

Z věty 3.4 a z principu superpozice bezprostředně snadno vyplývá volbou $\boldsymbol{B}_1(x) = \boldsymbol{B}_2(x) \equiv 0$ následující věta.

Věta 3.6 *Jsou-li* $\boldsymbol{y}_1(x)$ *a* $\boldsymbol{y}_2(x)$ *dvě řešení systému* (3.10) *a* $c \in R$*, pak také* $\boldsymbol{y}_1(x) + \boldsymbol{y}_2(x)$ *a* $c\boldsymbol{y}_1(x)$ *jsou řešení tohoto systému.*
Tedy řešení systému (3.10) *tvoří vektorový prostor. Jeho dimenze je* n.

Poznámka 3.2 Označíme-li $\mathscr{L}$ zobrazení, které n-tici funkcí (ve sloupci) $\boldsymbol{y}(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))^T$ majících spojité první derivace přiřadí novou n-tici funkcí $\boldsymbol{y}'(x) - \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x)$, tj. $\mathscr{L}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}' - \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, snadno se ověří, že jde o lineární zobrazení vektorového prostoru V_1 n-tic funkcí se spojitou první derivací do vektorového prostoru V_2 n-tic spojitých funkcí. Tedy $\boldsymbol{y}(x)$ je řešení (3.10) právě tehdy, když $\mathscr{L}(\boldsymbol{y}) = 0$, tj. když $\boldsymbol{y}$ je prvkem jádra $\mathscr{L}$. Předchozí věta říká, že defekt $\mathscr{L}$ je n. Z věty 3.4 pak dále plyne, že ke každému spojitému sloupci $\boldsymbol{B}(x) \in V_2$ existuje $\boldsymbol{y}(x) \in V_1$ tak, že $\mathscr{L}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{B}(x)$. Tedy $\mathscr{L}$ je zobrazení V_1 na V_2, tj. tzv. *surjekce.*

Zvolme nyní nějakou bázi $\boldsymbol{y}_1(x), \ldots, \boldsymbol{y}_n(x)$ v prostoru řešení rovnice (3.10). Označme

$$\boldsymbol{y}_i(x) = (y_{1i}(x), y_{2i}(x), \ldots, y_{ni}(x))^T, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Tuto bázi nazýváme *fundamentální systém* soustavy (3.10). Matice

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

sestavená ze sloupců $\boldsymbol{y}_1(x), \ldots, \boldsymbol{y}_n(x)$, se nazývá *fundamentální matice* systému (3.10).

Dále pro libovolnou n-tici řešení $\boldsymbol{y}_1(x), \ldots, \boldsymbol{y}_n(x)$ definujeme

$$W(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Tento determinant nazýváme *wronskián*. Platí

Věta 3.7 *Buď je $W(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n) \equiv 0$ na I, nebo je $W(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n) \neq 0$ na I.*

Tento výsledek dává smysl následující větě.

Věta 3.8 *Množina n řešení $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ systému* (3.10) *je lineárně nezávislá právě tehdy, když $W(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n) \neq 0$ na I.*

K ověření této podmínky tedy podobně jako u rovnice n-tého řádu stačí ověřit, že v jednom konkrétním $x_0 \in I$ je $W[\boldsymbol{y}_1(x_0), \ldots, \boldsymbol{y}_n(x_0)] \neq 0$. Z předchozí věty dále plyne

Věta 3.9 *Fundamentální matice $\boldsymbol{Y}(x)$ je regulární, tj. existuje k ní inverzní matice $\boldsymbol{Y}^{-1}(x)$.*

Z věty 3.6 dostáváme rovněž následující důležité tvrzení.

Věta 3.10 *Je-li $\boldsymbol{y}_1(x), \ldots, \boldsymbol{y}_n(x)$ fundamentální systém soustavy* (3.10), *je obecné řešení* (3.10) *tvaru*

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}_n(x), \qquad c_1, \ldots, c_n \in R. \tag{3.11}$$

Označíme-li $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, lze obecné řešení zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{c}, \tag{3.12}$$

kde $\boldsymbol{Y}(x)$ je fundamentální matice.

Zbývá tedy určit nějaký fundamentální systém. Bohužel, výsledek je obdobný jako u jedné lineární rovnice řádu $n \geq 2$. Obecně neumíme najít fundamentální systém složený z elementárních funkcí, i když koeficienty $a_{ij}(x)$ jsou elementární funkce. Tuto úlohu jsme v podstatě schopni zvládnout, pokud jsou $a_{ij}(x)$ konstanty. Tím se budeme zabývat později.

3.2.2 Nehomogenní systémy

Jde o systém tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}(x). \tag{3.13}$$

Použitím principu superpozice z věty 3.5 se snadno ověří (podobně jako v důkazu věty 1.7, která se týká jedné rovnice prvního řádu), že platí

Věta 3.11 *Nechť* $\boldsymbol{y}_1(x), \dots, \boldsymbol{y}_n(x)$ *je fundamentální systém homogenní soustavy* $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ *a* $\boldsymbol{y}_0(x)$ *je partikulární řešení systému* (3.13). *Pak obecné řešení systému* (3.13) *má tvar*

$$\boldsymbol{y}(x) = c_1\boldsymbol{y}_1(x) + \dots + c_n\boldsymbol{y}_n(x) + \boldsymbol{y}_0(x), \qquad c_1, \dots, c_n \in R.$$

To lze maticově zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{c} + \boldsymbol{y}_0(x),$$

kde $\boldsymbol{Y}(x)$ je fundamentální matice a $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$. Opět tedy platí důležitý princip, se kterým jsme se již dvakrát setkali. Označme

OŘHSLDR........ obecné řešení homog. syst. lineár. dif. rovnic
PŘHSLDR........ partikulární řešení homog. syst. lineár. dif. rovnic
OŘNSLDR........ obecné řešení nehomog. syst. lineár. dif. rovnic
PŘNSLDR........ partikulární řešení nehomog. syst. lineár. dif. rovnic

Pak

$$\boxed{\text{OŘNSLDR=OŘHSLDR+PŘNSLDR}}$$

Předpokládáme-li, že známe fundamentální systém příslušné homogenní soustavy, zbývá popsat, jak najdeme partikulární řešení nehomogenního systému. Univerzální metodou je znovu variace konstant.

Variace konstant

Myšlenka je obdobná jako u jedné rovnice, tj. nahradit v obecném řešení (3.11) konstanty $c_1, \dots, c_n$ vhodnými funkcemi $K_1(x), \dots, K_n(x)$ a najít partikulární řešení rovnice (3.13) ve tvaru

$$\boldsymbol{y}_0(x) = K_1(x)\boldsymbol{y}_1(x) + \dots + K_n(x)\boldsymbol{y}_n(x).$$

Dosadíme tento tvar do rovnice (3.13). K tomu nejprve určíme $\boldsymbol{y}_0'(x)$. Vzhledem k tomu, že derivace matice se provádějí po složkách, ověří se velmi snadno, že pro derivaci součtu a součinu dvou matic platí naprosto obdobné vzorce jako pro derivaci součtu a součinu dvou funkcí. Podrobněji, jsou-li $\boldsymbol{M}(x)$ a $\boldsymbol{N}(x)$ dvě matice, které lze sečítat resp. násobit a jejichž prvky mají derivace, platí

$$(\boldsymbol{M}(x)+\boldsymbol{N}(x))' = \boldsymbol{M}'(x)+\boldsymbol{N}'(x), \quad (\boldsymbol{M}(x)\boldsymbol{N}(x))' = \boldsymbol{M}'(x)\boldsymbol{N}(x)+\boldsymbol{M}(x)\boldsymbol{N}'(x).$$

Označme ještě $\boldsymbol{K}(x) = (K_1(x), \ldots, K_n(x))^T$. Pak

$$\boldsymbol{y}_0(x) = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{K}(x) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{y}_0'(x) = \boldsymbol{Y}'(x)\boldsymbol{K}(x) + \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{K}'(x),$$

kde $\boldsymbol{Y}(x)$ je fundamentální matice. Po dosazení do (3.13) vychází

$$\boldsymbol{Y}'(x)\boldsymbol{K}(x) + \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{K}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{K}(x) + \boldsymbol{B}(x),$$

tj. (vynecháme x)

$$\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{K} + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{B}.$$

Protože $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$, je $\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{K}$, a tedy $\boldsymbol{K}'$ musí splňovat rovnici

$$\boldsymbol{Y}\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{B}.$$

Jelikož $\boldsymbol{Y}(x)$ je regulární, existuje inverzní matice $\boldsymbol{Y}^{-1}(x)$, kterou vynásobíme předchozí rovnost zleva. Vyjde

$$\boldsymbol{K}'(x) = \boldsymbol{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{B}(x).$$

Chápeme-li integrál z matice opět tak, že ho provádíme po složkách, lze psát

$$\boldsymbol{K}(x) = \int \boldsymbol{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{B}(x)\,dx \tag{3.14}$$

(určíme jednu konkrétní primitivní funkci, tj. volíme např. nulové integrační konstanty). Pak

$$\boldsymbol{y}_0(x) = \boldsymbol{Y}(x)\int \boldsymbol{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{B}(x)\,dx$$

a obecné řešení rovnice (3.13) má tvar

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{c} + \boldsymbol{Y}(x)\int \boldsymbol{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{B}(x)\,dx, \tag{3.15}$$

kde $\boldsymbol{c}$ je libovolný sloupec konstant.

Postup budeme ilustrovat na příkladu. Nejprve však ještě uvedeme následující celkem samozřejmou poznámku.

Poznámka 3.3 Co se týká praktického řešení počáteční úlohy (homogenního nebo nehomogenního systému), postupujeme jako u jedné rovnice, tj. nejprve najdeme obecné řešení a pak dosadíme počáteční podmínky a určíme konstanty, což vede na řešení lineárního algebraického systému rovnic, který má jediné řešení.

Příklad 3.1 Ověřte, že $\boldsymbol{y}_1(x) = \left(\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}\right)^T$, $\boldsymbol{y}_2(x) = \left(-\frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x}\right)^T$ je fundamentální systém homogenní soustavy příslušné k

$$\begin{aligned} y_1' &= -\frac{y_1}{x} + y_2 + 2\sin x, \\ y_2' &= -y_1 - \frac{y_2}{x} + 2\cos x, \end{aligned} \qquad x > 0,$$

a najděte jeho obecné řešení.

Řešení: Po dosazení do příslušných homogenních rovnic vyjde pro $\boldsymbol{y}_1$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = -\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x},$$

$$\left(\frac{\cos x}{x}\right)' = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2} = -\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{x}\cdot\frac{\cos x}{x}$$

a pro $\boldsymbol{y}_2$

$$\left(\frac{-\cos x}{x}\right)' = \frac{x\sin x + \cos x}{x^2} = -\frac{1}{x}\left(-\frac{\cos x}{x}\right) + \frac{\sin x}{x},$$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = -\left(-\frac{\cos x}{x}\right) - \frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x}{x},$$

tedy $\boldsymbol{y}_1$ i $\boldsymbol{y}_2$ jsou řešení homogenního systému. Označme

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin x}{x} & -\dfrac{\cos x}{x} \\ \dfrac{\cos x}{x} & \dfrac{\sin x}{x} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}(x) = \begin{pmatrix} 2\sin x \\ 2\cos x \end{pmatrix}.$$

Protože $\det \boldsymbol{Y}(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\cos^2 x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \neq 0$ pro $x > 0$, je $\boldsymbol{Y}(x)$ fundamentální matice. Dále vypočteme $\boldsymbol{Y}^{-1}(x)$. Postupně máme (viz např. [32, str. 43])

$$\operatorname{adj} \boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin x}{x} & \dfrac{\cos x}{x} \\ -\dfrac{\cos x}{x} & \dfrac{\sin x}{x} \end{pmatrix}$$

a tedy

$$\boldsymbol{Y}^{-1}(x) = \frac{\operatorname{adj} \boldsymbol{Y}(x)}{\det \boldsymbol{Y}(x)} = x^2 \operatorname{adj} \boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} x\sin x & x\cos x \\ -x\cos x & x\sin x \end{pmatrix}.$$

Nyní podle vzorce (3.15) určíme

$$\boldsymbol{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{B}(x)=\begin{pmatrix} x\sin x & x\cos x \\ -x\cos x & x\sin x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sin x \\ 2\cos x \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2x\sin^2 x+2x\cos^2 x \\ -2x\sin x\cos x+2x\sin x\cos x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$\int \boldsymbol{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{B}(x)\,dx=\begin{pmatrix} \int 2x\,dx \\ \int 0\,dx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Partikulární řešení má proto tvar

$$\boldsymbol{y}_0(x)=\boldsymbol{Y}(x)\int \boldsymbol{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{B}(x)\,dx=\begin{pmatrix} \dfrac{\sin x}{x} & -\dfrac{\cos x}{x} \\ \dfrac{\cos x}{x} & \dfrac{\sin x}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\sin x \\ x\cos x \end{pmatrix}$$

a obecné řešení je

$$\boldsymbol{y}(x)=\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{c}+\boldsymbol{y}_0(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{\sin x}{x} & -\dfrac{\cos x}{x} \\ \dfrac{\cos x}{x} & \dfrac{\sin x}{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x\sin x \\ x\cos x \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_1\frac{\sin x}{x}-c_2\frac{\cos x}{x}+x\sin x, \\ y_2(x) &= c_1\frac{\cos x}{x}+c_2\frac{\sin x}{x}+x\cos x, \end{aligned} \qquad c_1,\ c_2\in R.$$

3.3 Lineární systémy s konstantními koeficienty

Jak jsme se již zmínili, neumíme obecně najít fundamentální systém homogenní soustavy, pokud jsou koeficienty skutečně funkcemi x. V případě, že jde o konstanty, je situace výrazně příznivější, neboť jsme schopni v podstatě efektivně najít fundamentální systém (až na problém nalezení kořenů polynomů).

Uvažujme tedy systém

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1+\ldots+a_{1n}y_n, \\ &\ \vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1+\ldots+a_{nn}y_n, \end{aligned} \qquad \text{tj. maticově} \quad \boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}, \tag{3.16}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je konstantní matice. Ke standardním metodám patří postup založený na Jordanově[12] kanonickém tvaru matice, který ovšem vyžaduje znalost

[12]**Marie Edmond Camille Jordan** (1832–1922) (čti žordan) — významný francouzský matematik. Zabýval se matematickou analýzou, algebrou, teorií funkcí, topologií, krystalografií, kinematikou, stabilitou, geometrickou pravděpodobností, teorií čísel a diferenciálními rovnicemi. Jeden z tvůrců moderní matematiky.

Weierstrassovy[13] teorie elementárních dělitelů. Dále je to postup využívající normální systém vektorů matice, který vyžaduje znalost Weyrovy[14] teorie a Weyrových charakteristik. Jak teorie elementárních dělitelů, tak jí ekvivalentní Weyrova teorie patří do lineární algebry a jde o relativně složité výsledky. Jejich znalost je mimo rámec běžných znalostí, které inženýři z této oblasti mívají. Z toho důvodu úplný popis obecného řešení systému (3.16) činí potíže.

My si ukážeme nejprve tzv. eliminační metodu, která je sice co do algoritmu jednoduchá, ale nedají se dost dobře teoreticky popsat komplikace, které mohou nastat. Proto se pro větší systémy nehodí. Dále si všimneme metody využívající normální systém vektorů, ale jen ve speciálních případech. V posledních letech se objevily nové, velice účinné metody, které bohužel zatím nejsou příliš rozšířené. Lze říci, že jsou jednodušší než výše zmíněné metody (mají podstatně menší nároky na znalosti hlubších partií lineární algebry). Jsou vesměs založeny na Cayleyově[15]-Hamiltonově[16] větě. My si uvedeme alespoň jednu velmi elegantní ukázku.

3.3.1 Eliminační metoda

Tato metoda je použitelná i na nehomogenní systémy tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n + \alpha_1(x), \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n + \alpha_n(x), \end{aligned} \tag{3.17}$$

kde a_{ij} jsou konstanty a $\alpha_i(x)$ jsou funkce, mající dostatečný počet derivací. Princip spočívá v tom, že se systém n rovnic prvního řádu převede na jedinou lineární rovnici n-tého řádu (s konstantními koeficienty). Naznačíme si nyní postup.

I. Zvolíme jednu rovnici v (3.17), např. první, a tu zderivujeme. Vyjde

$$y_1'' = a_{11}y_1' + \cdots + a_{1n}y_n' + \alpha_1'(x).$$

Do pravé strany této rovnice dosadíme za $y_1', \ldots, y_n'$ ze (3.17). Po úpravě dostaneme nějakou rovnici tvaru

$$y_1'' = b_1y_1 + \cdots + b_ny_n + \beta(x), \quad b_i \in R, \ i = 1, \ldots, n.$$

[13]**Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** (1815–1897) (čti vajrštras) — významný německý matematik. Zabýval se matematickou analýzou, analytickými funkcemi, variačním počtem, diferenciální geometrií a lineární algebrou. Jeden z největších matematiků všech dob.

[14]**Eduard Weyr** (1852–1903) (čti vejr) — český matematik. Zabýval se projektivní geometrií křivek a ploch, algebrou, teorií matic a matematickou analýzou.

[15]**Artur Cayley** (1821–1895) (čti keli) — anglický matematik. Zabýval se algebrou, algebraickou geometrií a teorií invariantů. Zahájil rozpracování teorie matic.

[16]**William Rowan Hamilton** (1805–1865) (čti hemilton) — irský matematik. Zabýval se matematickou optikou, mechanikou a variačním počtem. Vymyslel kvaterniony a zavedl pojem *vektor*. Pracoval též v geometrii, algebře a diferenciálních rovnicích. Ve 13 letech mluvil obstojně třinácti jazyky.

II. Získanou rovnici opět zderivujeme, tj. dostaneme rovnici

$$y_1''' = b_1 y_1' + \cdots + b_n y_n' + \beta'(x),$$

a do ní znovu dosadíme ze (3.17) za $y_1', \ldots, y_n'$. Vyjde

$$y_1''' = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n + \gamma(x), \quad c_i \in R,\ i = 1, \ldots, n.$$

III. Tento postup opakujeme, až dostaneme rovnici

$$y_1^{(n)} = d_1 y_1 + \ldots + d_n y_n + \delta(x), \quad d_i \in R,\ i = 1, \ldots, n.$$

IV. Nyní máme soustavu rovnic tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11} y_1 + \cdots + a_{1n} y_n + \alpha(x), \\ y_1'' &= b_1 y_1 + \cdots + b_n y_n + \beta(x), \\ &\vdots \\ y_1^{(n)} &= d_1 y_1 + \cdots + d_n y_n + \delta(x). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Z tohoto systému postupně vyloučíme neznámé $y_1, \ldots, y_n$, a to tak, že nejprve z první rovnice v (3.18) vypočteme např. y_2 a dosadíme do zbývajících rovnic. Tím se počet rovnic o jednu sníží a nebude zde již y_2. Nyní opět z první ze zbývajících rovnic, tj. z té, která obsahuje y_1'', vypočteme např. y_3, dosadíme do ostatních atd. Nakonec nám vyjde jedna rovnice n-tého řádu pro $y_1(x)$. Najdeme obecné řešení této rovnice, které bude obsahovat n konstant.

V. Obecný tvar $y_1(x)$ dosadíme do levých stran v (3.18) a ze vzniklých rovnic již pouze *algebraicky* vypočítáme $y_2(x), \ldots, y_n(x)$.

Úskalím této metody je, že v kroku IV. se může stát, že nedojdeme až k $y_1^{(n)}$, ale již dříve nastane situace, kdy všechny neznámé $y_2, \ldots, y_n$ se vyruší. Tedy pro $y_1(x)$ tudíž dostaneme rovnici nižšího řádu než n. Její obecné řešení bude proto obsahovat méně než n konstant. Pak nezbývá než dosadit $y_1(x)$ do (3.17) a obdobně jako pro $y_1(x)$ vytvořit z těchto rovnic diferenciální rovnici pro $y_2(x)$. To se může několikrát opakovat. Musíme pokračovat tak dlouho, až dostaneme n integračních konstant. Jinými slovy, může se stát, že se systém nepodaří převést na jednu rovnici n-tého řádu ale na několik rovnic nižších řádů (součet jejich řádů je ovšem n). Je obtížné popsat, kdy tato situace nastane. Souvisí to jednak s tím, pro kterou neznámou budeme vytvářet diferenciální rovnici a zda jsou některé složky vlastních vektorů (viz níže) v řádku odpovídajícím zvolené neznámé nulové, jednak se strukturou normálního systému vektorů.

Příklad 3.2 Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 3y_2 + \sin x, \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 - 2\cos x. \end{aligned}$$

Řešení: Vytvoříme např. rovnici pro y_1. Derivací první rovnice vyjde

$$y_1'' = 4y_1' - 3y_2' + \cos x$$

a tedy

$$\begin{aligned} y_1'' = 4(4y_1 - 3y_2 + \sin x) - 3(2y_1 - y_2 - 2\cos x) + \cos x = \\ = 10y_1 - 9y_2 + 4\sin x + 7\cos x. \end{aligned}$$

Ze systému

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 3y_2 + \sin x, \\ y_1'' &= 10y_1 - 9y_2 + 4\sin x + 7\cos x \end{aligned} \tag{3.19}$$

nyní vyloučíme y_2. Odečteme-li trojnásobek první rovnice od druhé, dostaneme

$$y_1'' - 3y_1' = -2y_1 + \sin x + 7\cos x \implies y_1'' - 3y_1' + 2y_1 = 7\cos x + \sin x. \tag{3.20}$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}.$$

Obecné řešení rovnice (3.20) je

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Partikulární řešení budeme hledat ve tvaru

$$y_0(x) = a\cos x + b\sin x.$$

Je

$$y_0' = -a\sin x + b\cos x \implies y_0'' = -a\cos x - b\sin x$$

a po dosazení do (3.20) máme

$$-a\cos x - b\sin x + 3a\sin x - 3b\cos x + 2a\cos x + 2b\sin x = 7\cos x + \sin x,$$

$$(a - 3b)\cos x + (3a + b)\sin x = 7\cos x + \sin x.$$

Tedy musí platit

$$\begin{aligned} a - 3b &= 7 \\ 3a + b &= 1 \end{aligned} \implies a = 1,\ b = -2.$$

Celkově

$$y_1(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \cos x - 2\sin x.$$

Dosazením za $y_1(x)$ do první rovnice v (3.19) určíme $y_2(x)$. Vyjde

$$c_1e^x + 2c_2e^{2x} - \sin x - 2\cos x =$$
$$= 4c_1e^x + 4c_2e^{2x} + 4\cos x - 8\sin x - 3y_2 + \sin x,$$

tj.

$$y_2(x) = c_1e^x + \frac{2}{3}c_2e^{2x} + 2\cos x - 2\sin x.$$

Maticově výsledek zapíšeme takto:

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} c_1e^x + c_2e^{2x} + \cos x - 2\sin x \\ c_1e^x + \frac{2}{3}c_2e^{2x} + 2\cos x - 2\sin x \end{pmatrix} =$$
$$= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} \cos x - 2\sin x \\ 2\cos x - 2\sin x \end{pmatrix}.$$

Tedy fundamentální systém homogenní soustavy je

$$\boldsymbol{y}_1 = (e^x, e^x)^T, \quad \boldsymbol{y}_2 = (e^{2x}, \frac{2}{3}e^{2x})^T$$

a partikulární řešení nehomogenního systému je

$$\boldsymbol{y}_0 = (\cos x - 2\sin x, 2\cos x - 2\sin x)^T.$$

Příklad 3.3 Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + 4y_2 - 2y_3, \\ y_2' &= y_1 + y_3, \\ y_3' &= 6y_1 - 6y_2 + 5y_3. \end{aligned}$$

Řešení: Vytvoříme rovnici pro y_1. Derivujeme první rovnici a po dosazení vyjde

$$y_1'' = -3y_1' + 4y_2' - 2y_3' =$$
$$= -3(-3y_1 + 4y_2 - 2y_3) + 4(y_1 + y_3) - 2(6y_1 - 6y_2 + 5y_3) = y_1.$$

Pro y_1 tedy dostáváme (ani není třeba psát systém (3.18) a provádět eliminaci), že

$$y_1'' - y_1 = 0.$$

Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 1 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm 1$ a obecné řešení má tvar

$$y_1(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}.$$

Po dosazení do první rovnice máme

$$c_1e^x - c_2e^{-x} = -3c_1e^x - 3c_2e^{-x} + 4y_2 - 2y_3$$

a odtud

$$y_3 = 2y_2 - 2c_1e^x - c_2e^{-x}.$$

Z druhé rovnice pak vyjde

$$y_2' = c_1e^x + c_2e^{-x} + 2y_2 - 2c_1e^x - c_2e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad y_2' = 2y_2 - c_1e^x.$$

To je lineární rovnice prvního řádu. Charakteristická rovnice je $\lambda - 2 = 0$, tj. $\lambda = 2$, a obecné řešení homogenní rovnice je

$$y = c_3e^{2x}.$$

Dále určíme partikulární řešení nehomogenní rovnice. Pravá strana $-c_1e^x$ je typu konstanta krát exponenciála, přitom číslo $+1$ není kořenem charakteristické rovnice. Řešení lze proto najít ve tvaru $y_0 = ae^x$. Po dosazení vyjde

$$ae^x = 2ae^x - c_1e^x \quad \Longrightarrow \quad a = 2a - c_1 \quad \Longrightarrow \quad a = c_1.$$

Obecný tvar y_2 je tudíž

$$y_2(x) = c_3e^{2x} + c_1e^x.$$

Zbývá určit algebraicky y_3. To lze např. z druhé rovnice zadání, odkud ihned vyjde

$$y_3 = y_2' - y_1 = 2c_3e^{2x} + c_1e^x - c_1e^x - c_2e^{-x} = -c_2e^{-x} + 2c_3e^{2x}.$$

Maticový zápis je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(x) &= \begin{pmatrix} c_1e^x + c_2e^{-x} & \\ c_1e^x & + \ c_3e^{2x} \\ - \ c_2e^{-x} & + \ 2c_3e^{2x} \end{pmatrix} = \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x}. \end{aligned}$$

Poznámka 3.4 Jak se můžete snadno přesvědčit, v předchozím příkladu by při osamostatnění kterékoliv neznámé došlo k „rozpadnutí“ na jednu rovnici druhého řádu a jednu rovnici prvního řádu. Je snadné si představit, že u systému s větším počtem neznámých by se za této situace stala eliminační metoda velmi nepřehlednou a pracnou.

3.3.2 Užití normálního systému vektorů

V předchozích dvou příkladech bylo vidět, že systémy měly za řešení výrazy typu $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}e^{\lambda x}$, kde $\boldsymbol{z}$ byl sloupec konstant. Pokusme se ověřit, kdy má systém

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} \tag{3.21}$$

řešení tohoto tvaru. Po dosazení dostáváme (snadno se po složkách ověří, že platí běžná pravidla pro derivování)

$$\left(\boldsymbol{z}e^{\lambda x}\right)' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}e^{\lambda x} \quad \Longrightarrow \quad \lambda \boldsymbol{z}e^{\lambda x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}e^{\lambda x} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \lambda \boldsymbol{z},$$

neboť $e^{\lambda x} \neq 0$. To však znamená, že λ musí být vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{z}$ k němu příslušný vlastní vektor — viz např. [24]. Problémem je, zda je možné najít dostatečný počet řešení tohoto tvaru tak, aby tvořila fundamentální systém. To úzce souvisí s otázkou, zda je možné z vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$ vytvořit bázi v R^n. Překážkou může ovšem rovněž být, že některá (dokonce všechna) vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ mohou být komplexní, i když prvky $\boldsymbol{A}$ jsou reálná čísla. Všimneme si nejprve tohoto úskalí.

Jestliže $\lambda \in C \setminus R$ je vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$, pak vzhledem k tomu, že charakteristický mnohočlen matice $\boldsymbol{A}$ má reálné koeficienty, je i $\overline{\lambda}$ vlastní číslo $\boldsymbol{A}$ (pruh značí komplexně sdružené číslo). Dále se snadno ověří, že jestliže $\boldsymbol{z}$ je vlastní vektor odpovídající λ (kde složky $\boldsymbol{z}$ jsou obecně komplexní čísla), je $\overline{\boldsymbol{z}}$ vlastní vektor odpovídající $\overline{\lambda}$ (složky $\overline{\boldsymbol{z}}$ jsou čísla komplexně sdružená ke složkám $\boldsymbol{z}$).

Dále je možné bez obtíží ověřit, že teorie, kterou jsme uvedli pro lineární systémy prvního řádu, může být v případě komplexních koeficientů bez problémů přenesena do komplexního oboru. Přesněji řečeno, nezávisle proměnná x zůstává reálná, ale hodnoty funkcí $y_i(x)$ jsou komplexní čísla. Přitom derivaci provádíme zvlášť z reálné a zvlášť z imaginární složky.

Zbývá ještě vyjasnit, co budeme rozumět exponenciálou z komplexního čísla. Nechť $\lambda = \alpha + \beta i$, α, $\beta \in R$, je komplexní číslo. V teorii komplexních funkcí komplexní proměnné se odvozuje tzv. Eulerův vztah

$$e^{\lambda} = e^{\alpha + \beta i} = e^{\alpha} \cdot e^{\beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \sin\beta).$$

Označme $\Re z$ a $\Im z$ reálnou a imaginární část komplexního čísla z (u vektorů budeme opět chápat po složkách). Platí

$$\Re z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \Im z = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

tj. $\Re z$ i $\Im z$ je lineární kombinací z a $\overline{z}$. Nyní můžeme shrnout:

Je-li $\lambda \in C \setminus R$ vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$, jemuž přísluší vektor $\boldsymbol{z}$, má systém (3.21) dvojici řešení

$$\widehat{\boldsymbol{y}}_1 = \boldsymbol{z}e^{\lambda x}, \qquad \widehat{\boldsymbol{y}}_2 = \overline{\boldsymbol{z}}e^{\overline{\lambda} x},$$

a tudíž má i řešení

$$\boldsymbol{y}_1 = \frac{\widehat{\boldsymbol{y}}_1 + \widehat{\boldsymbol{y}}_2}{2} = \Re\, \boldsymbol{z}e^{\lambda x} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{y}_2 = \frac{\widehat{\boldsymbol{y}}_1 - \widehat{\boldsymbol{y}}_2}{2i} = \Im\, \boldsymbol{z}e^{\lambda x}.$$

Důležité je, že $\boldsymbol{y}_1$ a $\boldsymbol{y}_2$ již mají reálné složky.

Např. systém

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 3y_2, \\ y_2' &= 3y_1 + 2y_2 \end{aligned} \tag{3.22}$$

má charakteristický mnohočlen ($\boldsymbol{E}$ je jednotková matice)

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 13.$$

Jeho kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2} = 2 \pm 3i.$$

Najdeme charakteristický vektor $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)^T$ příslušný λ_1. Pro něj musí platit

$$\begin{aligned} -3iz_1 - 3z_2 &= 0, \\ 3z_1 - 3iz_2 &= 0. \end{aligned}$$

Druhá rovnice je i-násobkem první. Zvolíme-li např. $z_1 = 1$, vyjde $z_2 = -i$, tj. $\boldsymbol{z} = (1, -i)^T$. Máme tudíž řešení

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{y}}_1 = \boldsymbol{z} e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(2+3i)x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{2x}(\cos 3x + i \sin 3x) = \\ = \begin{pmatrix} e^{2x}\cos 3x + ie^{2x}\sin 3x \\ e^{2x}\sin 3x - ie^{2x}\cos 3x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Z něho dostaneme dvojici reálných řešení

$$\boldsymbol{y}_1 = \Re\,\widehat{\boldsymbol{y}}_1 = \begin{pmatrix} e^{2x}\cos 3x \\ e^{2x}\sin 3x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2 = \Im\,\widehat{\boldsymbol{y}}_1 = \begin{pmatrix} e^{2x}\sin 3x \\ -e^{2x}\cos 3x \end{pmatrix}.$$

Nyní již můžeme zformulovat příslušnou větu.

Věta 3.12 *Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ (mohou být i stejná) a $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n$ jsou k nim příslušné vlastní vektory. Předpokládejme, že tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Pak sloupce*

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{z}_1 e^{\lambda_1 x},\ \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{z}_2 e^{\lambda_2 x}, \ldots,\ \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{z}_n e^{\lambda_n x}$$

tvoří fundamentální systém soustavy (3.21).
Přitom dvojice komplexně sdružených řešení je možné výše popsaným způsobem nahradit dvojicemi reálných řešení.
Předpoklad o nezávislosti vlastních vektorů je zejména splněn, jsou-li vlastní čísla navzájem různá.

Použití věty budeme ilustrovat na příkladech.

Příklad 3.4 Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned} y_1' &= \phantom{y_1 +{}} y_2 + y_3, \\ y_2' &= y_1 \phantom{{}+ y_2} + y_3, \\ y_3' &= y_1 + y_2. \end{aligned}$$

Řešení: Charakteristická rovnice je

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Celočíselný kořen může být pouze mezi čísly ± 1, ± 2. Snadno se ověří, že $\lambda_1 = -1$. Po vydělení kořenovým činitelem $\lambda + 1$ vyjde kvadratická rovnice $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, která má kořeny $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$.

Nyní najdeme vlastní vektory příslušné dvojnásobnému kořenu $\lambda_{1,2} = -1$. Pro $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$ dostaneme systém $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, tj.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 0, \\ z_1 + z_2 + z_3 &= 0, \\ z_1 + z_2 + z_3 &= 0, \end{aligned}$$

Jde vlastně o jednu rovnici o třech neznámých. Její obecné řešení je

$$z_3 = t,\ z_2 = s,\ z_1 = -t - s, \qquad t,\ s \in R.$$

Volbou $t = 0$, $s = -1$ resp. $t = -1$, $s = 0$ dostaneme dvě nezávislá řešení

$$\boldsymbol{z}_1 = (1, -1, 0)^T, \quad \boldsymbol{z}_2 = (1, 0, -1)^T.$$

Kořenu $\lambda_3 = 2$ odpovídá systém $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, tj.

$$\begin{aligned} -2z_1 + z_2 + z_3 &= 0, \\ z_1 - 2z_2 + z_3 &= 0, \\ z_1 + z_2 - 2z_3 &= 0. \end{aligned}$$

Gaussovou eliminační metodou vypočteme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Její obecné řešení je

$$z_3 = t,\ z_2 = t,\ z_1 = t, \qquad t \in R.$$

Volbou $t = 1$ dostaneme $\boldsymbol{z}_3 = (1, 1, 1)^T$.

Obecné řešení naší soustavy je

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{z}_1 e^{-x} + c_2\boldsymbol{z}_2 e^{-x} + c_3\boldsymbol{z}_3 e^{2x} =$$
$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}, \\ y_2 &= -c_1 e^{-x} + c_3 e^{2x}, \\ y_3 &= - c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}. \end{aligned}$$

Příklad 3.5 Najděte obecné řešení systému (3.22).

Řešení: Na str. 100 jsme nalezli dvě řešení, která podle věty 3.12 tvoří fundamentální systém. Proto obecné řešení má tvar

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y}_1 + c_2\boldsymbol{y}_2, \quad \text{tj.} \quad \begin{aligned} y_1 &= c_1 e^{2x}\cos 3x + c_2 e^{2x}\sin 3x, \\ y_2 &= c_1 e^{2x}\sin 3x - c_2 e^{2x}\cos 3x. \end{aligned}$$

Podstatně komplikovanější situace nastává, když není možné vytvořit bázi z vlastních vektorů. K tomu dojde, když algebraická násobnost některého vlastního čísla λ (tj. násobnost tohoto čísla jako kořenu charakteristické rovnice) je ostře větší než jeho geometrická násobnost (tj. počet parametrů, které vyjdou při řešení systému $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$) — viz [24, str. 193]. V tomto případě je třeba doplnit nezávislou soustavu vlastních vektorů na tzv. normální systém, což je relativně obtížné. Zájemce odkazujeme např. na [31], kde lze najít početní algoritmus, nebo na [24]. Vyčerpávající výklad včetně důkazu věty o fundamentálním systému lze najít v [2]. My si pouze naznačíme postup (předpokládá se, že čtenář zná pojem normálního systému vektorů).

Nechť λ je vlastní číslo, k němuž přísluší k-členný řetězec tzv. *zobecněných vlastních vektorů* $\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_k$; platí tedy

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{z}_{k-1}, \quad \dots, \quad (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_1, \quad (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{0},$$

tj. $\boldsymbol{z}_1$ je vlastní vektor. Pak k sloupců

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{z}_1 e^{\lambda x}, \ \boldsymbol{y}_2 = (x\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2)e^{\lambda x}, \ \boldsymbol{y}_3 = \left(\frac{x^2}{2}\boldsymbol{z}_1 + x\boldsymbol{z}_2 + \boldsymbol{z}_3\right)e^{\lambda x}, \ \dots,$$
$$\boldsymbol{y}_k = \left(\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\boldsymbol{z}_1 + \frac{x^{k-2}}{(k-2)!}\boldsymbol{z}_2 + \dots + \boldsymbol{z}_k\right)e^{\lambda x}$$

tvoří lineárně nezávislá řešení soustavy (3.21). Lze dokázat, že systém sloupců, který sestavíme tímto způsobem ze všech řetězců zobecněných vlastních vektorů, tvoří fundamentální systém soustavy (3.21). Rovněž lze použít náhradu dvojice komplexně sdružených řešení dvojicí reálných řešení (postup je analogický obratu, který jsme si uvedli na str. 99). Všimněte si,že tato metoda připomíná situaci s násobnými kořeny u lineární rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty — viz str. 59. Tam však bylo řešení podstatně jednodušší.

Příklad 3.6 Najděte obecné řešení systému

$$\begin{aligned} y_1' &= 17y_1 + 9y_2, \\ y_2' &= -25y_1 - 13y_2. \end{aligned}$$

Řešení: Charakteristická rovnice je

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 17-\lambda & 9 \\ -25 & -13-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Ta má dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 2$. Pro vlastní vektor $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2)^T$ máme soustavu $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, tj.

$$\begin{aligned} 15z_1 + 9z_2 &= 0, \\ -25z_1 - 15z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Protože jedna rovnice je násobkem druhé, je její obecné řešení tvaru $z_2 = t$, $z_1 = -\frac{3}{5}t$, $t \in R$. Volbou $t = 5$ vyjde $\boldsymbol{z}_1 = (-3, 5)^T$. Další nezávislý vlastní vektor nemáme. Pokusíme se tedy najít zobecněný vlastní vektor, který bude řešením soustavy $(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E})\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_1$, tj.

$$\begin{aligned} 15z_1 + 9z_2 &= -3, \\ -25z_1 - 15z_2 &= 5. \end{aligned}$$

Rovnice jsou opět lineárně závislé a jejich obecné řešení je $z_2 = t$, $z_1 = \frac{-1-3t}{5}$. Volbou $t = 3$ vyjde $\boldsymbol{z}_2 = (-2, 3)^T$. Fundamentální systém bude

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{z}_1 e^{2x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{2x}, \quad \boldsymbol{y}_2 = (x\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2)e^{2x} = \begin{pmatrix} -3x-2 \\ 5x+3 \end{pmatrix} e^{2x}$$

a obecné řešení má tvar

$$\begin{aligned} y_1 &= -3c_1e^{2x} - (3x+2)c_2e^{2x}, \\ y_2 &= 5c_1e^{2x} + (5x+3)c_2e^{2x}. \end{aligned}$$

3.3.3 Výpočet exponenciály matice

Všimněme si systému (3.21), když $n = 1$, tj. když jde o jedinou rovnici tvaru $y' = Ay$, kde A je číslo. To je homogenní lineární rovnice, kterou řešíme jako rovnici se separovanými proměnnými. Tedy

$$\frac{dy}{dx} = Ay \quad \Longrightarrow \quad \ln|y| = Ax + \ln c \quad \Longrightarrow \quad y(x) = ce^{Ax}.$$

Tedy fundamentální „matice“ (je jednorozměrná) je e^{Ax}. Ukazuje se, že i v obecném případě je možné zapsat fundamentální matici ve tvaru exponenciály, je však třeba nejprve vhodně definovat, co exponenciální funkcí z matice budeme rozumět.

Vyjdeme ze známého rozvoje funkce e^t, $t \in R$, do Taylorovy řady. Platí

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots.$$

Dosadíme do této řady za t formálně matici $\boldsymbol{A}x$. Vyjde (za 1 dáme jednotkovou matici $\boldsymbol{E}$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{A}x)^n}{n!} = \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{A}x}{1!} + \frac{\boldsymbol{A}^2x^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3x^3}{3!} + \cdots.$$

Dostáváme nekonečnou řadu matic. Ta představuje po složkách n^2 nekonečných řad funkcí jedné reálné proměnné. Lze ukázat, že všechny tyto řady jsou konvergentní pro každé $x \in R$. Jejich součty vytvoří po složkách novou matici, která se označuje $e^{\boldsymbol{A}x}$. Ta je definovaná pro každé $x \in R$ a platí

$$\left(e^{\boldsymbol{A}x}\right)' = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}x},$$

kde derivaci provádíme jako normálně po složkách. Z předchozího vztahu bezprostředně plyne, že sloupce matice $e^{\boldsymbol{A}x}$ tvoří řešení systému (3.21). Navíc zřejmě $e^{\boldsymbol{A}0} = \boldsymbol{E}$, tj. tyto sloupce jsou lineárně nezávislé (pro $x = 0$ a tudíž podle věty 3.7 pro každé $x \in R$) a představují tedy fundamentální systém. Matice $e^{\boldsymbol{A}x}$ je pak fundamentální maticí systému (3.21), která je v nule rovna jednotkové matici.

Máme tedy velice elegantní a stručné označení fundamentální matice systému (3.21). Tento zápis má ale i další přednosti. Pro libovolné čtvercové matice $\boldsymbol{C}$ a $\boldsymbol{D}$, které jsou zaměnitelné (tj. $\boldsymbol{CD} = \boldsymbol{DC}$), totiž platí

$$e^{\boldsymbol{C}}e^{\boldsymbol{D}} = e^{\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}} = e^{\boldsymbol{D}}e^{\boldsymbol{C}}.$$

Odtud volbou $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}x$, $\boldsymbol{D} = -\boldsymbol{A}x$ plyne

$$e^{\boldsymbol{A}x}e^{-\boldsymbol{A}x} = e^{\boldsymbol{O}} = \boldsymbol{E} \quad \Longrightarrow \quad \left(e^{\boldsymbol{A}x}\right)^{-1} = e^{-\boldsymbol{A}x}.$$

Tedy inverzní matice k exponenciále z $\boldsymbol{A}x$ je exponenciála z $-\boldsymbol{A}x$. Použijme tento výsledek na variaci konstant. Ze vzorce (3.15) dostaneme

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{c} + e^{\boldsymbol{A}x}\int e^{-\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{B}(x)\,dx.$$

Pokusme se vzorec upravit tak, aby dával přímo řešení počáteční úlohy s počáteční podmínkou $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$. Za tím účelem zapíšeme sloupec konstant $\boldsymbol{c}$ ve tvaru $e^{-\boldsymbol{A}x_0}\boldsymbol{y}_0$ a zvolíme tu primitivní funkci k $e^{-\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{B}(x)$, která je v x_0 rovna nulovému sloupci, tj. $\int_{x_0}^{x} e^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{B}(s)\,ds$. Vyjde

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{\boldsymbol{A}x}e^{-\boldsymbol{A}x_0}\boldsymbol{y}_0 + e^{\boldsymbol{A}x}\int_{x_0}^{x} e^{-\boldsymbol{A}s}\boldsymbol{B}(s)\,ds =$$
$$= e^{\boldsymbol{A}(x-x_0)}\boldsymbol{y}_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\boldsymbol{A}(x-s)}\boldsymbol{B}(s)\,ds. \qquad (3.23)$$

Poznámka 3.5 Pro čtenáře obeznámeného s Laplaceovou transformací je vhodné připomenout, že vztah (3.23) má značný význam v teorii systémů, které jsou popsané soustavou lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Zde $\boldsymbol{B}(x)$ má většinou charakter vstupu. Obvykle se zde předpokládá, že $x_0 = 0$, $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{0}$ (systém je na počátku v klidu) a $x \geq 0$. Pak

$$\boldsymbol{y}(x) = \int_{0}^{x} e^{\boldsymbol{A}(x-s)}\boldsymbol{B}(s)\,ds.$$

Integrál na pravé straně má tvar *konvoluce*. Pro Laplaceův obraz potom platí

$$\mathscr{L}\{\boldsymbol{y}(x)\} = \mathscr{L}\{e^{\boldsymbol{A}x} * \boldsymbol{B}(x)\} = \mathscr{L}\{e^{\boldsymbol{A}x}\}\cdot\mathscr{L}\{\boldsymbol{B}(x)\};$$

zde $*$ značí konvoluci. Matice $\mathscr{L}\{e^{\boldsymbol{A}x}\}$ se nazývá *přenosová*. Tedy Laplaceův obraz výstupu je roven součinu přenosové matice a Laplaceova obrazu vstupu.

Vraťme se však k otázce nalezení explicitního tvaru $e^{\boldsymbol{A}x}$. Existuje řada postupů, jak definovat a vyčíslit funkce (ne jen exponenciálu) z matic — viz např. [4, str. 83–99].

Matici $e^{\boldsymbol{A}x}$ lze např. určit tak, že najdeme dosud uvedenými metodami fundamentální systém soustavy (3.21), pro nějž platí

$$\boldsymbol{y}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{y}_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Odpovídající fundamentální matice tvořená těmito sloupci je vzhledem k jednoznačnosti řešení počáteční úlohy právě $e^{\boldsymbol{A}x}$.

Existují však i elegantnější metody, založené na následující větě.

Věta 3.13 (Cayley-Hamilton) *Jestliže* $\boldsymbol{A}$ *je libovolná čtvercová matice a* $\varphi(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})$ *její charakteristický mnohočlen, platí*

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O},$$

tj. $\boldsymbol{A}$ *je kořenem svého charakteristického mnohočlenu.*

(kterou jsme ani nemuseli vypisovat). Její charakteristická rovnice má trojnásobný kořen $\lambda_{1,2,3} = -1$. Tedy obecné řešení má tvar

$$y(x) = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x}.$$

Potřebujeme partikulární řešení, pro něž $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$. Vypočteme

$$\begin{aligned} y'(x) &= (c_2 + 2c_3x)e^{-x} - (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x}, \\ y''(x) &= 2c_3e^{-x} - 2(c_2 + 2c_3x)e^{-x} + (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x}. \end{aligned}$$

Z počátečních podmínek dostaneme

$$\begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 - c_1 = 0 \\ 2c_3 - 2c_2 + c_1 = 1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = \frac{1}{2}.$$

Hledané řešení je

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = (x - \frac{1}{2}x^2)e^{-x},\ y''(x) = (1 - 2x + \frac{1}{2}x^2)e^{-x}.$$

Dále určíme

$$\begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2e^{-x} \\ (x - \frac{1}{2}x^2)e^{-x} \\ (1 - 2x + \frac{1}{2}x^2)e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + x + \frac{1}{2}x^2)e^{-x} \\ (x + x^2)e^{-x} \\ \frac{1}{2}x^2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Konečně vypočítáme

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$e^{\boldsymbol{A}x} = (1 + x + \tfrac{1}{2}x^2)e^{-x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (x + x^2)e^{-x} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}x^2e^{-x} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x & x & -2x \\ x & 1 - x & 2x \\ x & -x & 1 + 2x \end{pmatrix} e^{-x}.$$

Obecné řešení má tudíž tvar

$$\begin{aligned} y_1 &= [c_1(1 - x) + c_2x - 2c_3x]e^{-x}, \\ y_2 &= [c_1x + c_2(1 - x) + 2c_3x]e^{-x}, \\ y_3 &= [c_1x - c_2x + c_3(1 + 2x)]e^{-x}. \end{aligned}$$

3.3.4 Metoda neurčitých koeficientů

K nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice máme univerzální metodu variace konstant. Ta je však někdy dost pracná. U lineárních rovnic n-tého řádu s konstantními koeficienty jsme viděli, že je v případě speciálního tvaru pravé strany možné najít partikulární řešení mnohem snáze metodou neurčitých koeficientů. To lze udělat i u systému tvaru

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}(x), \tag{3.24}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je konstantní matice a prvky $\boldsymbol{B}(x)$ jsou kvazipolynomy. Všimneme si postupně některých speciálních případů.

Věta 3.15 *Nechť $\boldsymbol{B}(x)$ je sloupec, jehož složky jsou polynomy stupně nejvýše m. Nechť nula je k-násobný kořen charakteristické rovnice matice $\boldsymbol{A}$. Pak existuje partikulární řešení systému (3.24), jehož složky jsou polynomy stupně nejvýše $m + k$.*

Poznámka 3.6 *i)* Platí, že $k = 0$ právě tehdy, když $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

ii) Číslo k by šlo obecně zmenšit. Lze za něj volit násobnost čísla nula jako kořene tzv. *minimálního polynomu* — viz např. [2, str. 93], který má stejné kořeny jako charakteristický polynom, ale jejich násobnost je stejná nebo menší než u charakteristického polynomu. Je to nenulový polynom $\psi(\lambda)$ nejmenšího stupně, pro nějž $\psi(\boldsymbol{A}) = 0$. Není však příliš snadné určit minimální polynom a navíc v elementárním kursu matic nejsou studovány jeho vlastnosti (pokud je vůbec zaveden).

iii) Všimněte si, že na rozdíl od jedné rovnice vyššího řádu nelze u systémů předpokládat, že složky řešení jsou tvaru $x^k P_m(x)$, kde $P_m(x)$ je polynom stupně m. V řešení mohou být s nenulovými koeficienty i nižší mocniny než k-té.

iv) Věta platí, i když prvky $\boldsymbol{A}$ a popřípadě koeficienty polynomů ve složkách $\boldsymbol{B}(x)$ jsou komplexní čísla.

Příklad 3.8 Najděte partikulární řešení systému

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 3y_2 + x, \\ y_2' &= y_1 + 4y_2 - 1. \end{aligned}$$

Řešení: Je

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0, \qquad \boldsymbol{B}(x) = \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sloupec obsahuje nejvýše lineární polynom, tedy $m = 1$, $k = 0$. Musí proto existovat řešení tvaru

$$y_1 = ax + b,\ y_2 = cx + d \quad \Longrightarrow \quad y_1' = a,\ y_2' = c.$$

Po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} a &= 2(ax+b) - 3(cx+d) + x \\ c &= ax+b + 4(cx+d) - 1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x(-2a+3c) + a - 2b + 3d &= x, \\ x(-a-4c) - b + c - 4d &= -1. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů vyjde

$$\begin{aligned} -2a+3c &= 1 \\ -a-4c &= 0 \\ a-2b+3d &= 0 \\ -b+c-4d &= -1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad a = -\frac{4}{11},\ b = \frac{20}{121},\ c = \frac{1}{11}, d = \frac{28}{121}.$$

Partikulární řešení tedy je

$$y_1 = -\frac{4}{11}x + \frac{20}{121}, \qquad y_2 = \frac{1}{11}x + \frac{28}{121}.$$

Podobně lze postupovat, když $\boldsymbol{B}(x)$ obsahuje exponenciály nebo siny a kosiny. Vzhledem ke značné komplikovanosti výpočtů však obvykle postupujeme jinak.

Věta 3.16 *Nechť sloupec pravých stran je tvaru $e^{\alpha x}\boldsymbol{P}_m(x)$, kde $\alpha \in C$ a složky sloupce $\boldsymbol{P}_m(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše m. Pak substituce $\boldsymbol{y} = e^{\alpha x}\boldsymbol{u}$ převede systém $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + e^{\alpha x}\boldsymbol{P}_m(x)$ v nehomogenní systém, kde složky sloupce pravých stran jsou polynomy stupně nejvýše m.*

Důkaz: Protože

$$\boldsymbol{y}'(x) = (e^{\alpha x}\boldsymbol{u}(x))' = \alpha e^{\alpha x}\boldsymbol{u}(x) + e^{\alpha x}\boldsymbol{u}'(x),$$

vyjde po dosazení

$$\alpha e^{\alpha x}\boldsymbol{u} + e^{\alpha x}\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}e^{\alpha x}\boldsymbol{u} + e^{\alpha x}\boldsymbol{P}_m(x),$$

z čehož po úpravě a vykrácení výrazem $e^{\alpha x} \neq 0$ vyjde

$$\boldsymbol{u}' = (\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{E})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{P}_m(x). \tag{3.25}$$

Příklad 3.9 Najděte partikulární řešení systému

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2 + e^x, \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 + xe^x. \end{aligned}$$

Řešení: Substitucí $\boldsymbol{y} = e^x\boldsymbol{u}$ přejde podle věty 3.16 náš systém v systém (3.25), tj.

$$\begin{aligned} u_1' &= \quad - 2u_2 + 1, \\ u_2' &= u_1 + u_2 + x. \end{aligned}$$

Ten má podle věty 3.15 ($m = 1,\ k = 0$) řešení tvaru

$$u_1 = ax + b,\ u_2 = cx + d \quad \Longrightarrow \quad u_1' = a,\ u_2' = c$$

a po dosazení vychází

$$\begin{aligned} a &= \qquad\quad -2(cx+d) + 1, \\ c &= ax + b + \quad cx + d \quad + x. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů dostaneme

$$\begin{aligned} 2c &= 0 \\ -a - c &= 1 \\ a + 2d &= 1 \\ -b - d &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad a = -1,\ b = -1,\ c = 0,\ d = 1.$$

Tedy $u_1 = -x - 1,\ u_2 = 1$ a partikulární řešení daného systému je

$$y_1 = -(x+1)e^x, \quad y_2 = e^x.$$

Nakonec si všimneme případu se siny a kosiny. Užitím předchozí věty a Eulerova vzorce se snadno odvodí následující tvrzení.

Věta 3.17 *Nechť $\alpha,\ \beta \in R$ a $\boldsymbol{P}(x)$ je sloupec, jehož prvky jsou polynomy. Je-li $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + i\boldsymbol{y}_2$ řešení systému*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{P}(x)e^{(\alpha+\beta i)x},$$

je $\boldsymbol{y}_1 = \Re\,\boldsymbol{y}$ řešením systému

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{P}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$$

a $\boldsymbol{y}_2 = \Im\,\boldsymbol{y}$ je řešením systému

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{P}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Příklad 3.10 Najděte partikulární řešení systému

$$\begin{aligned} y_1' &= \qquad y_2 + \cos x, \\ y_2' &= y_1 - y_2. \end{aligned}$$

Řešení: Položme $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \boldsymbol{P}(x) = (1, 0)^T$. Podle věty 3.17 budeme řešit systém

$$\begin{aligned} y_1' &= \qquad y_2 + e^{ix}, \\ y_2' &= y_1 - y_2. \end{aligned}$$

Nyní zavedeme podle věty 3.16 substituci $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u}e^{ix}$. Systém (3.25) má tvar

$$\begin{aligned} u_1' &= -iu_1 + \qquad u_2 + 1, \\ u_2' &= \quad u_1 - (1+i)u_2. \end{aligned}$$

Ten má podle věty 3.15 ($m = 0,\ k = 0$) řešení tvaru

$$u_1 = a, \quad u_2 = b, \qquad a,\ b \in C.$$

Po dosazení vyjde

$$\begin{aligned} 0 &= -ia + b + 1, \\ 0 &= a - (1+i)b. \end{aligned}$$

Z druhé rovnice dosadíme $a = (1+i)b$ do první a dostaneme

$$0 = -i(1+i)b + b + 1 \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{-1}{2-i} = -\frac{2+i}{(2-i)(2+i)} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.$$

Pak $a = (1+i)b = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$. Proto

$$u_1 = -\frac{1}{5}(1+3i)e^{ix}, \quad u_2 = -\frac{1}{5}(2+i)e^{ix}.$$

Pomocí Eulerova vztahu vyjde

$$\begin{aligned} u_1 &= -\tfrac{1}{5}(1+3i)(\cos x + i\sin x) = -\tfrac{1}{5}\cos x + \tfrac{3}{5}\sin x + i\left(-\tfrac{3}{5}\cos x - \tfrac{1}{5}\sin x\right), \\ u_2 &= -\tfrac{1}{5}(2+i)(\cos x + i\sin x) = -\tfrac{2}{5}\cos x + \tfrac{1}{5}\sin x + i\left(-\tfrac{1}{5}\cos x - \tfrac{2}{5}\sin x\right). \end{aligned}$$

Vypočteme reálné části (viz věta 3.17) a dostaneme hledané řešení:

$$y_1 = \Re\, u_1 = -\frac{1}{5}\cos x + \frac{3}{5}\sin x, \quad y_2 = \Re\, u_2 = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Poznámka 3.7 Je-li $\boldsymbol{B}(x)$ součtem několika typů speciálních pravých stran, použijeme princip superpozice — viz věta 3.5. Např. bychom rozdělili

$$\boldsymbol{B}(x) = \begin{pmatrix} x^2 + e^x\cos 2x - 4\sin x \\ 2 - \cos x + 6e^x \\ 3e^x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x\cos 2x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} \sin x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \cos x \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 2e^x \\ e^x \end{pmatrix}$$

a určili postupně pět partikulárních řešení.

Poznámka 3.8 *i)* Z předchozích výsledků vyplývá, že všechna řešení systému (3.24), kde složky $\boldsymbol{B}(x)$ jsou kvazipolynomy, jsou opět kvazipolynomy. Speciálně to tedy platí pro homogenní systémy. To umožňuje využít pro řešení Laplaceovu transformaci. Srovnejte s poznámkami 2.7 a 2.8, *vi)* o kvazipolynomech u homogenních a nehomogenních lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů.

ii) Jak jsme již konstatovali dříve, jsou uvedené metody efektivní jen zdánlivě.

U systémů větších rozměrů totiž obecně ztroskotáme na nalezení kořenů charakteristické rovnice. Přesto jsou tyto výsledky nesmírně důležité. Dávají nám totiž velmi podrobné informace o struktuře řešení systémů s konstantními koeficienty (které často slouží jako aproximace nelineárních systémů). To umožňuje usuzovat na chování těchto lineárních systémů. Např. existují metody, které umožňují efektivně a celkem snadno zjistit, zda všechny kořeny (charakteristického) polynomu leží ve vymezené části komplexní roviny, např. vlevo od imaginární osy (tzv. *Hurwitzovo*[17] *kritérium* — viz [20, str. 61]). To ovšem znamená, že všechny složky řešení obsahují exponenciály tvaru $e^{\alpha x}$ se záporným α. Pak pro $x \to +\infty$ konvergují všechna řešení k nule. To je podstatná informace u reálných systémů (jsou tzv. *asymptoticky stabilní*, tj. mají tendenci se ustalovat).

Cvičení

V následujících příkladech najděte obecné řešení daných systémů. Pokud jsou dány počáteční podmínky, určete příslušné partikulární řešení.

1.

a) $\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 3y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 4y_2 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 \end{aligned}$

2.

a) $\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' &= -y_2 + 2y_3 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \\ y_3' &= 3y_1 + y_3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= 2y_2 + 4y_3 \\ y_3' &= y_1 - y_3 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 - y_3 \\ y_3' &= -y_1 + y_2 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_2 + 4y_3 \\ y_3' &= y_1 - 4y_3 \end{aligned}$, $\begin{aligned} y_1(0) &= 6 \\ y_2(0) &= -1 \\ y_3(0) &= 4 \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} y_1' &= -y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' &= y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' &= -y_1 - y_2 - y_3 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} y_1' &= -y_2 - y_3 \\ y_2' &= y_2 \\ y_3' &= y_3 \end{aligned}$ h) $\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_2 \\ y_3' &= y_1 + y_2 \end{aligned}$

[17] **Adolf Hurwitz** (1859–1919) (čti hurvic) — německý matematik. Zabýval se teorií funkcí, algebrou a teorií čísel.

3.

a) $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 + 2 \\ y_2' &= 4y_1 - 2y_2 + 2 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 2y_2 + 4e^{5x} \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 2y_2 - 5e^x \sin x \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + 1 + e^x \\ y_2' &= 3y_1 - y_2 \end{aligned}$

4.

a) $\begin{aligned} y_1' &= -y_1 - y_2 + x^2 \\ y_2' &= -y_2 - y_3 \\ y_3' &= -y_3 + x \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 6y_1' &= y_1 + 7y_2 - 5y_3 + 10e^x \\ 2y_2' &= -y_1 - y_2 + y_3 \\ 3y_3' &= y_1 - 2y_2 + y_3 + e^x \end{aligned}$

5.

a) $\begin{aligned} y_1' &= -y_2 + y_3 \\ y_2' &= -2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \\ y_3' &= 2y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \\ y_4' &= 2y_2 - 2y_3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_3 + 2y_4 \\ y_2' &= -y_1 + y_2 + y_3 - 2y_4 \\ y_3' &= 2y_2 + y_3 - 2y_4 \\ y_4' &= -y_1 + 2y_2 + 2y_3 - 3y_4 \end{aligned}$

6. Řešte metodou variace konstant.

a) $\begin{aligned} y_1' &= y_2 + \operatorname{tg}^2 x - 1 \\ y_2' &= -y_1 + \operatorname{tg} x \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} y_1' &= -4y_1 - 2y_2 + \frac{2}{e^x - 1} \\ y_2' &= 6y_1 + 3y_2 - \frac{3}{e^x - 1} \end{aligned}, \quad \begin{aligned} y_1(\ln 2) &= 0 \\ y_2(\ln 2) &= 0 \end{aligned}$

7. Ověřte, že

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \left(\frac{2}{x^2+1}, \frac{1}{x}\right)^T, \quad \boldsymbol{y}_2(x) = \left(\sqrt{x}, \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\right)^T, \quad x > 0,$$

je fundamentální systém homogenní soustavy příslušné k

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{-9x^2-1}{2x(x^2+1)} y_1 + \frac{5x^2+1}{(x^2+1)^2} y_2 + 2\sqrt{x} \\ y_2' &= \frac{-5x^2-1}{2x^2} y_1 + \frac{4x}{x^2+1} y_2 + x\sqrt{x} \end{aligned}$$

a najděte partikulární řešení této nehomogenní soustavy.

Výsledky:

1.

a) $\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{2x} + c_2e^{3x} \\ y_2 &= c_1e^{2x} + \tfrac{1}{2}\,c_2e^{3x} \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} y_1 &= e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) \\ y_2 &= e^{2x}[c_1(\cos x - \sin x) + c_2(\cos x + \sin x)] \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} y_1 &= e^{-x}(c_1 + 2c_2x) \\ y_2 &= e^{-x}[c_1 + c_2(1 + 2x)] \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} y_1 &= 3c_1e^{x} + c_2e^{-x} \\ y_2 &= c_1e^{x} + c_2e^{-x} \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} y_1 &= (c_1 + c_2x)e^{3x} \\ y_2 &= [c_1 + c_2(1 + x)]e^{3x} \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} y_1 &= 2c_1 - c_2e^{3x} \\ y_2 &= c_1 + c_2e^{3x} \end{aligned}$

2.

a) $\begin{aligned} y_1 &= (c_1 + c_2x)e^{x} + c_3e^{2x} \\ y_2 &= c_1e^{x} + c_2(x - 2)e^{x} \\ y_3 &= c_1e^{x} + c_2(x - 1)e^{x} + c_3e^{2x} \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} y_1 &= (2c_2 \sin 2x + 2c_3 \cos 2x)e^{x} \\ y_2 &= (c_1 - c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x)e^{x} \\ y_3 &= (-c_1 - 3c_2 \cos 2x + 3c_3 \sin 2x)e^{x} \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} y_1 &= c_1 + c_2x + 4c_3e^{3x} \\ y_2 &= -2c_1 + c_2(1 - 2x) + 4c_3e^{3x} \\ y_3 &= c_1 + c_2(x - 1) + c_3e^{3x} \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} y_1 &= c_1 - c_2(\cos \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,\sin \sqrt{3}\,x) + c_3(\sqrt{3}\,\cos \sqrt{3}\,x - \sin \sqrt{3}\,x) \\ y_2 &= c_1 + 2c_2 \cos \sqrt{3}\,x + 2c_3 \sin \sqrt{3}\,x \\ y_3 &= c_1 - c_2(\cos \sqrt{3}\,x - \sqrt{3}\,\sin \sqrt{3}\,x) - c_3(\sin \sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,\cos \sqrt{3}\,x) \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} y_1 &= 4 + (2 - x)e^{-3x} \\ y_2 &= 4 + (2x - 5)e^{-3x} \\ y_3 &= 1 + (3 - x)e^{-3x} \end{aligned}$ f) $\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{-x} + c_2 + c_3 \\ y_2 &= -c_1e^{-x} - c_2 \\ y_3 &= c_1e^{-x} - c_3 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} y_1 &= c_1 + c_2e^{x} + c_3e^{x} \\ y_2 &= -c_2e^{x} \\ y_3 &= -c_3e^{x} \end{aligned}$ h) $\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{-x} + c_2e^{x} \\ y_2 &= 2c_2e^{x} \\ y_3 &= -c_1e^{-x} + 3c_2e^{x} + c_3 \end{aligned}$

3.

a) $\begin{aligned} y_1 &= c_1x + c_2 + x^2 + 2x \\ y_2 &= c_1(2x - 1) + 2c_2 + 2x^2 + 2x \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{x} + 2c_2e^{4x} + 3e^{5x} \\ y_2 &= -c_1e^{x} + c_2e^{4x} + e^{5x} \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{x} + c_2e^{3x} + e^{x}(2 \cos x - \sin x) \\ y_2 &= c_1e^{x} - c_2e^{3x} + e^{x}(2 \cos x + \sin x) \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3}\,e^{x} \\ y_2 &= c_1e^{2x} - 3c_2e^{-2x} - \tfrac{3}{4} - e^{x} \end{aligned}$

4.

a) $\begin{aligned} y_1 &= -e^{-x}(c_1x + \tfrac{1}{2}\,c_2x^2 - c_3) + x^2 - x - 1 \\ y_2 &= e^{-x}(c_1 + c_2x) - x + 2 \\ y_3 &= -c_2e^{-x} + x - 1 \end{aligned}$

b)
$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x + e^x \\ y_2 &= 2c_1 - \tfrac{1}{2}\, c_2(\cos x + \sin x) + \tfrac{1}{2} c_3(\cos x - \sin x) \\ y_3 &= 3c_1 + \tfrac{1}{2}\, c_2(\sin x - \cos x) - \tfrac{1}{2}\, c_3(\cos x + \sin x) + e^x \end{aligned}$$

5.

a)
$$\begin{aligned} y_1 &= c_1(1 + 2x^2) + 2c_2 x + c_3 + c_4 \\ y_2 &= -2c_1 x - c_2 + c_4 \\ y_3 &= 2c_1 x + c_2 + c_4 \\ y_4 &= -4c_1 x^2 - 4c_2 x - 2c_3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} y_1 &= (c_1 + c_2 + 2c_4) \sin x + (-c_1 + c_2 + 2c_3) \cos x \\ y_2 &= -(c_2 + c_3) \sin x + (c_1 + c_4) \cos x \\ y_3 &= (c_3 + c_4) \sin x + (c_3 - c_4) \cos x \\ y_4 &= -c_2 \sin x + c_1 \cos x \end{aligned}$$

6.

a)
$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cos x + c_2 \sin x + \operatorname{tg} x \\ y_2 &= -c_1 \sin x + c_2 \cos x + 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} y_1 &= 2e^{-x} \ln(e^x - 1) \\ y_2 &= -3e^{-x} \ln(e^x - 1) \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\frac{4}{7}\, x^3\sqrt{x} + \frac{8}{3}\, x\sqrt{x}}{x^2 + 1} - 2\sqrt{x}\operatorname{arctg} x \\ y_2 &= \frac{2}{7}\, x^2\sqrt{x} + \frac{4}{3}\,\sqrt{x} - \frac{2(x^2 + 1)}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg} x \end{aligned}$$

3.4 Lineární systémy s nespojitými koeficienty

Dosud jsme předpokládali, tak jako ve většině úvodních kursů, že pravé strany uvažovaných rovnic resp. jejich koeficienty jsou spojité funkce. To nám zaručovalo (lokální) existenci řešení. Zdálo by se, že tento předpoklad není příliš omezující. Avšak mnohé aplikace diferenciálních rovnic nám ukazují, že skutečnost je zcela jiná. Nejmarkantněji je to asi vidět v teorii řízení, kde k ovládání systémů popsaných diferenciálními rovnicemi se používají parametry, které se mění skokem, tj. jsou nespojité. Tak je tomu např. u elektrických sítí, kde různá relé skokem mění svou polohu, a u řady dalších modelů. Diferenciální rovnice se spojitou pravou stranou jsou jako model takových systémů nepostačující.

Z těchto důvodů matematikové hledali cestu, jak zobecnit pojem řešení diferenciálních rovnic na podobné nespojité případy. Uvažujme např. diferenciální rovnici prvního řádu v explicitním tvaru s počáteční podmínkou

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{3.26}$$

Formální integrací na intervalu $\langle x_0, x\rangle$ dostaneme

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f[s, y(s)]\, ds, \tag{3.27}$$

což je jakási integrální rovnice — srovnejte kapitola 1, str. 8. Její řešení podstatně závisí na tom, jaký použijeme integrál. V případě běžného *Riemannova*[18] *integrálu* je přirozeným předpokladem spojitost $f(x, y)$ a dostáváme naše dosavadní výsledky, kdy řešení má spojitou derivaci. Je však možné použít jiný integrál. Jako asi nejvýznamnější se ukázala volba tzv. *Lebesgueova*[19] *integrálu*. Přirozenými předpoklady na $f(x, y)$ umožňujícími použití tohoto integrálu jsou tzv. *Carathéodoryho*[20] *podmínky*. Řešení rovnice (3.27) je pak tzv. *absolutně spojité* a má derivaci pouze skoro všude a tá splňuje rovnici (3.26) také skoro všude (nějaká vlastnost platí skoro všude, jestliže není splněna na množině Lebesgueovy míry nula). Podrobné poučení o této teorii je možné najít např. v [14, str. 309]. Existuje řada dalších zobecnění, ale žádné nemělo tak zásadní význam jako absolutně spojité řešení. Nejdále v tomto směru asi vede použití tzv. *Kurzweilova integrálu* — viz [26, 27].

Naším úkolem není zkoumat různá zobecnění řešení. Navíc to vyžaduje znalost různých, často dost komplikovaných integračních teorií. Omezíme se pouze na lineární systémy s po částech spojitými koeficienty. Ty jsou v aplikacích většinou zcela postačující a přitom výsledky jsou jednoduché.

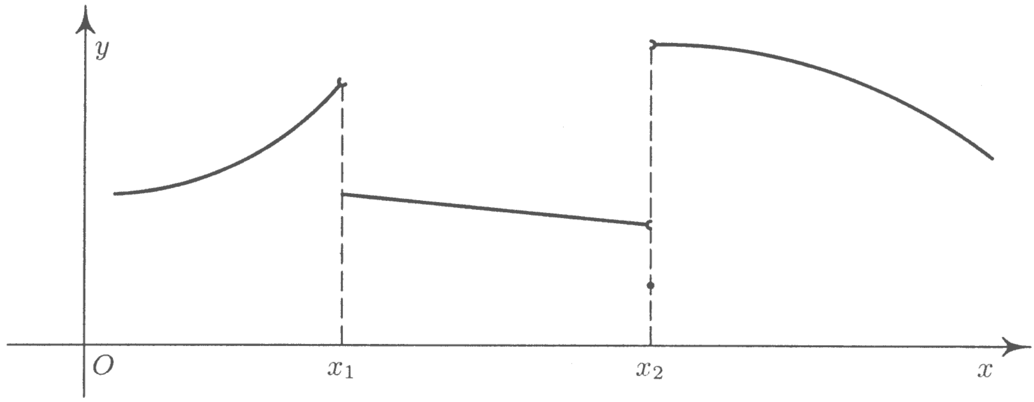
Definice 3.5 Nechť $J = (a, b)$ je ohraničený otevřený interval. Řekneme, že nějaká funkce $g(x)$ je *po částech spojitá* na intervalu J, jestliže existují čísla $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ tak, že $g(x)$ je spojitá na každém otevřeném podintervalu (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, k$, a v krajních bodech těchto podintervalů existují konečné jednostranné limity — viz obr.3.1. V případě neohraničeného intervalu J nazveme $g(x)$ po částech spojitou, je-li po částech spojitá na každém ohraničeném podintervalu $I \subset J$ (tj. v každém ohraničeném podintervalu je pouze konečný počet bodů nespojitosti).

---

[18]**Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826–1866) (čti ríman) — vynikající německý matematik. Zabýval se teorií funkcí, geometrií, matematickou a teoretickou fyzikou a diferenciálními rovnicemi. Jeden z největších matematiků všech dob. Jeho tzv. Riemannova hypotéza o rozložení nul ζ-funkce je zřejmě dodnes nevyřešena a je považována za jeden z nejtěžších matematických problémů (správnost důkazu z r. 1990 se prověřuje).

[19]**Henri Leon Lebesgue** (1875–1941) (čti lebeg) — významný francouzský matematik. Zabýval se teorií funkcí a integrálu. Jím zavedená míra a integrál významně ovlivnily moderní matematiku.

[20]**Constantin Carathéodory** (1873–1950) (čti karateodori) — významný řecký matematik. Zabýval se variačním počtem, teorií funkcí a aplikacemi matematiky.



Obr. 3.1: Po částech spojitá funkce

Definice 3.6 Uvažujme systém n lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}(x). \tag{3.28}$$

Předpokládejme, že všechny koeficienty $a_{ij}(x)$, $b_j(x), i,\ j = 1, \ldots, n$, jsou po částech spojité na otevřeném intervalu J. Označme I množinu všech bodů nespojitosti všech těchto koeficientů. Tedy $I \subset J$ je konečná množina.

Pak sloupec $\boldsymbol{y}(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))^T$ nazveme řešením rovnice (3.28), jestliže platí:

i) $y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, jsou *spojité* na J,
ii) pro každé $x \in J \setminus I$ existují derivace $y_i'(x), i = 1, \ldots, n$, a platí

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{B}(x), \quad x \in J \setminus I.$$

Tedy řešení splňuje rovnici (3.28) jen v těch bodech, kde jsou všechny koeficienty rovnice spojité. V bodech nespojitosti koeficientů $\boldsymbol{y}'(x)$ vůbec neexistuje. Řešení však musí být spojité. Dá se zjistit, že v bodech nespojitosti koeficientů existují jednostranné derivace, které jsou ale různé.

Následující věta je obdobou věty 3.4.

Věta 3.18 *Nechť koeficienty $a_{i,j}(x)$, $b_j(x), i,\ j = 1, \ldots, n$, jsou po částech spojité na otevřeném intervalu J. Pak pro každé $x_0 \in J$ a $\boldsymbol{y}_0 \in R^n$ má počáteční úloha*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}(x), \quad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$$

právě jedno (úplné) řešení, které existuje na celém intervalu J.

Podobně jako v případě spojitých koeficientů lze dokázat, že množina řešení homogenní rovnice tvoří vektorový prostor dimenze n, lze zavést fundamentální systém a fundamentální matici, platí princip variace konstant, princip superpozice a pod.

Na závěr si všimneme, co dostaneme, když předchozí definici a výsledek aplikujeme na jednu lineární rovnici n-tého řádu

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x). \tag{3.29}$$

Ta je ekvivalentní systému

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2, \\
y_2' &= y_3, \\
&\vdots \\
y_{n-1}' &= y_n, \\
y_n' &= -a_0(x)y_1 - a_1(x)y_2 - a_2(x)y_3 - \cdots - a_{n-1}(x)y_n + b(x),
\end{aligned}$$

kde $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})^T$ — viz str. 87. Předpokládáme opět, že koeficienty $a_i(x)$, $i = 0, \ldots, n-1$, a $b(x)$ jsou po částech spojité na J. Protože $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ jsou spojité, dostáváme, že $y(x)$ je řešením (3.29), jestliže

i) $y(x)$ má spojité derivace na J až do řádu $n-1$ včetně,
ii) pro $x \in J \setminus I$ (I je množina bodů nespojitosti koeficientů) existuje $y^{(n)}$,
iii) pro $x \in J \setminus I$ je splněna rovnice (3.29).

Z věty 3.18 plyne, že každý počáteční problém má právě jedno řešení a dále že množina řešení homogenní rovnice 3.29 tvoří vektorový prostor dimenze n atd.

Poznámka 3.9 Jsou-li koeficienty $\boldsymbol{A}(x)$ po částech konstantní a koeficienty $\boldsymbol{B}(x)$ po částech rovny kvazipolynomům, lze na vhodných podintervalech použít předchozí výsledky o systémech s konstantními koeficienty a speciálními pravými stranami. Při přechodu přes bod nespojitosti $x \in I$ je jen třeba jednotlivé úseky řešení spojitě navázat. Totéž platí pro rovnici (3.29). Postup si ukážeme na příkladu.

Příklad 3.11 Najděte řešení počáteční úlohy

$$y'' + y = \operatorname{sgn} x, \quad y(\pi) = 0, \;\; y'(\pi) = 1.$$

Řešení: Zde $J = (-\infty, \infty), I = \{0\}$. Najdeme obecné řešení homogenní rovnice (jejíž koeficienty jsou spojité a dokonce konstantní). Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i$$

a obecné řešení je

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Nejprve budeme uvažovat $x \in (0, +\infty)$ (protože obsahuje číslo $x_0 = \pi$), tj. bude $b(x) = 1$. Existuje partikulární řešení tvaru $y_1(x) = a$. Po dosazení vyjde

$$0 + a = 1 \quad \Longrightarrow \quad a = 1,$$

tedy

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 1 \quad \Longrightarrow \quad y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Z počátečních podmínek dostaneme

$$\begin{array}{rl} 0 = & c_1 \cos\pi + c_2 \sin\pi + 1 \\ 1 = & -c_1 \sin\pi + c_2 \cos\pi \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rl} 0 = & -c_1 + 1 \\ 1 = & -c_2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 1,\ c_2 = -1.$$

Tudíž

$$y(x) = \cos x - \sin x + 1, \qquad x \in (0, +\infty).$$

Ze spojitosti $y(x)$ plyne, že

$$y(0) = \cos 0 - \sin 0 + 1 = 2, \qquad y'(0) = -\sin 0 - \cos 0 = -1.$$

Pro $x \in (-\infty, 0)$ je $b(x) = -1$, tedy musí existovat partikulární řešení tvaru $y_2(x) = a$. Po dosazení máme

$$0 + a = -1 \quad \Longrightarrow \quad a = -1,$$

tj.

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 1 \quad \Longrightarrow \quad y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Nyní musí platit

$$\begin{array}{rl} 2 = & c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 - 1 \\ -1 = & -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rl} 2 = & c_1 - 1 \\ -1 = & c_2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 3,\ c_2 = -1.$$

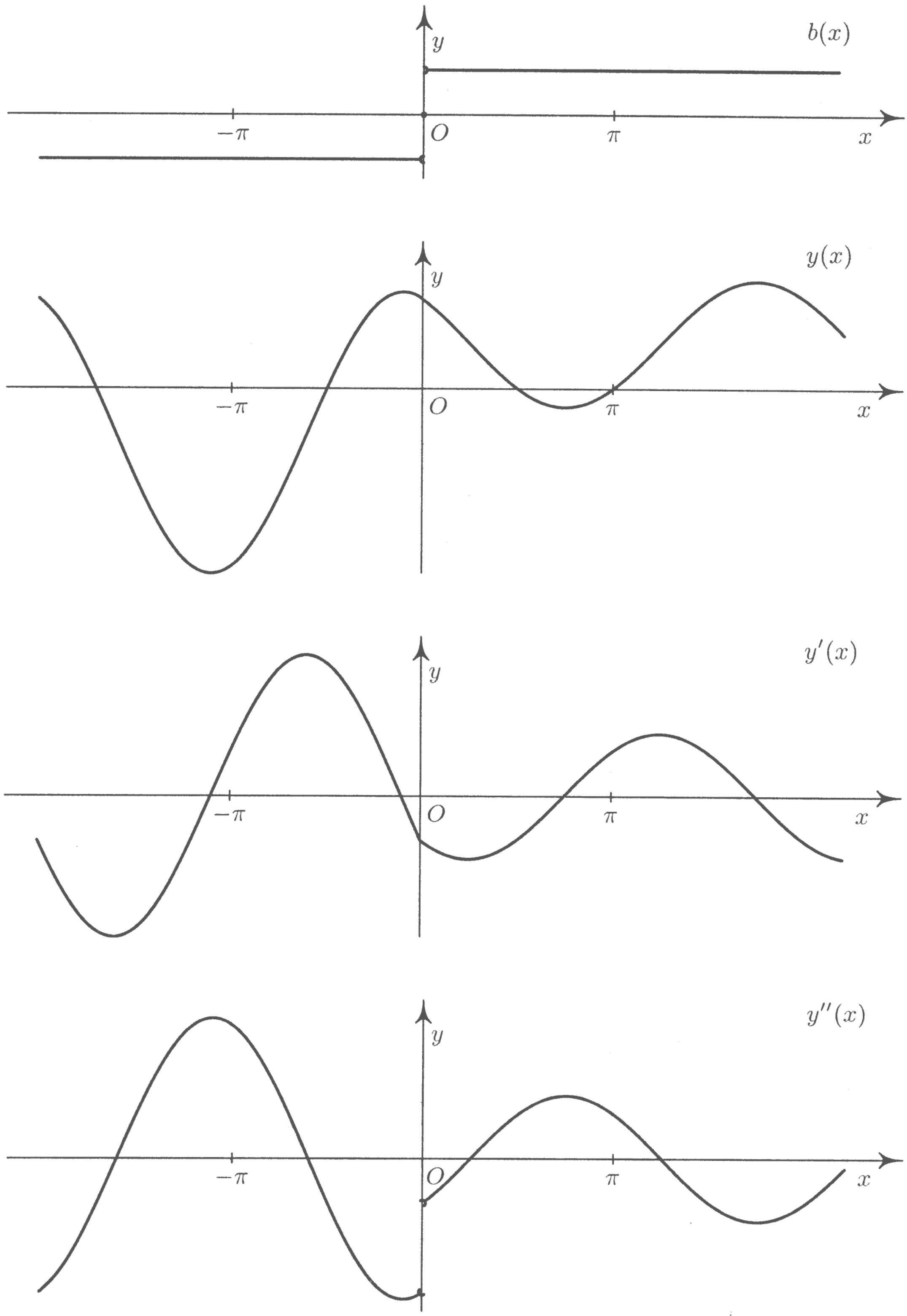
Tedy

$$y(x) = 3\cos x - \sin x - 1, \qquad x \in (-\infty, 0).$$

Celkově máme

$$y(x) = \begin{cases} 3\cos x - \sin x - 1 & \text{pro } x < 0, \\ \cos x - \sin x + 1 & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

Průběh řešení a jeho derivací je znázorněn na obr. 3.2. Všimněte si, že v bodě $x = 0$ má $y(x)$ derivaci, $y'(x)$ je spojitá, ale nemá derivaci (na obrázku není dobře vidět; snadno lze však spočítat, že jednostranné derivace jsou $y''_-(0) = -3$ a $y''_+(0) = -1$, tedy $y''_-(0) \neq y''_+(0)$) a $y''(x)$ v tomto bodě neexistuje.



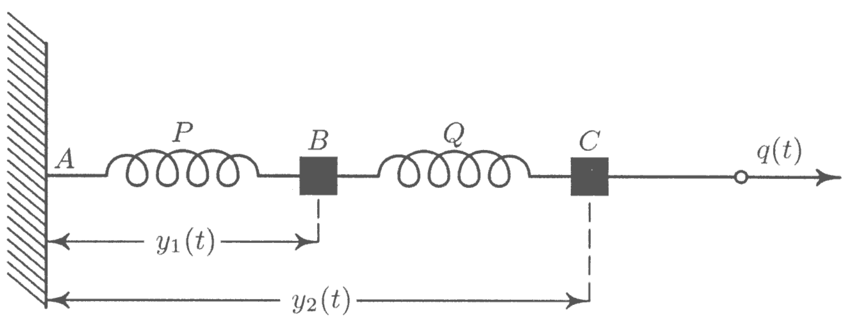
Obr. 3.2: Řešení počáteční úlohy $y'' + y = \operatorname{sgn} x,\ y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = 1$

3.5 Ukázky aplikací systémů diferenciálních rovnic

Pro systémy diferenciálních rovnic platí v ještě větší míře to, co pro jednu diferenciální rovnici — aplikací je nepřeberně. My si alespoň pro ilustraci uvedeme dvě — jednu z mechaniky a jednu z teorie elektrických obvodů.

1. Mechanická soustava.

Uvažujme soustavu dvou pružin znázorněnou na obrázku 3.3. Bod B má hmotnost m_1 a je spojen pružinou P s pevným bodem A. Bod C má hmotnost m_2 a je spojen pružinou Q s hmotným bodem B; na bod C kromě toho působí vnější síla, jejíž hodnota v okamžiku t je $q(t)$; $q: R \to R$.



Obr. 3.3: Mechanická soustava

Mechanické vlastnosti pružiny P jsou dány její charakteristikou h_1 : vzdálenost u bodů A a B nesmí klesnout pod dané číslo $\gamma_1 > 0$ ani nesmí překročit číslo γ_2, kde $\gamma_2 > \gamma_1$. Je-li $\gamma_1 < u < \gamma_2$, pak body A a B jsou k sobě přitahovány silou $h_1(u)$, tj. $h_1 : (\gamma_1, \gamma_2) \to R$. Podobně charakteristikou pružiny Q je funkce $h_2 : (\delta_1, \delta_2) \to R$, kde $0 < \delta_1 < \delta_2$. Kromě toho na body B, resp. C působí síla tření, která je úměrná okamžité rychlosti bodu B, resp. bodu C s konstantami úměrnosti $\alpha > 0$, resp. $\beta > 0$ a působí proti směru pohybu. Nechť $y_1(t)$ znamená polohu a $v_1(t)$ rychlost bodu B v okamžiku t; nechť $y_2(t)$ je poloha a $v_2(t)$ rychlost bodu C v okamžiku t. Potom platí

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1(t)}{dt} &= v_1(t),\\
\frac{dy_2(t)}{dt} &= v_2(t),\\
m_1\,\frac{dv_1(t)}{dt} &= -h_1[y_1(t)] + h_2[y_2(t) - y_1(t)] - \alpha v_1(t),\\
m_2\,\frac{dv_2(t)}{dt} &= -h_2[y_2(t) - y_1(t)] - \beta v_2(t) + q(t).
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

První dvě rovnice plynou z definice rychlosti, druhé dvě z Newtonova pohybového zákona. Obecně jde o (nelineární) systém čtyř rovnic prvního řádu.

Pro malé výchylky od rovnovážné (klidové) polohy můžeme předpokládat, že funkce $h_1(u)$, resp. $h_2(u)$ jsou lineární a liché vzhledem ke středu intervalu (γ_1, γ_2), resp. (δ_1, δ_2). Označme $\gamma = \dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$, $\delta = \dfrac{\delta_1 + \delta_2}{2}$. Pak

$$h_1(u) = k_1(u - \gamma),\ k_1 > 0, \qquad h_2(u) = k_2(u - \delta),\ k_2 > 0.$$

Dosadíme-li tyto tvary do (3.30), dostaneme nehomogenní lineární systém

$$\begin{aligned}
y_1' &= v_1, \\
y_2' &= v_2, \\
v_1' &= -\frac{k_1 + k_2}{m_1} y_1 + \frac{k_2}{m_1} y_2 - \frac{\alpha}{m_1} v_1 + k_1\gamma - k_2\delta, \\
v_2' &= \frac{k_2}{m_2} y_1 - \frac{k_2}{m_2} y_2 - \frac{\beta}{m_2} v_2 + k_2\delta + q(t).
\end{aligned}$$

Příslušný homogenní systém má konstantní koeficienty a bylo by tedy možné ho řešit některou z výše uvedených metod a pak použít princip variace konstant.

2. Elektrický obvod

Uvažujme elektrický obvod znázorněný na obrázku 3.4, který obsahuje dva rezistory o hodnotách $R_1 > 0$ a $R_2 > 0$ ohmů, dále dva induktory o indukčnostech $L_1 > 0$ a $L_2 > 0$ henry a ideální napěťový zdroj střídavého napětí o velikosti $A\sin(\omega t + \varphi)$ voltů, $A > 0$, $\omega > 0$, $\varphi \in R$. Označme $i_1(t)$ a $i_2(t)$ proud v ampérech v jednotlivých větvích.

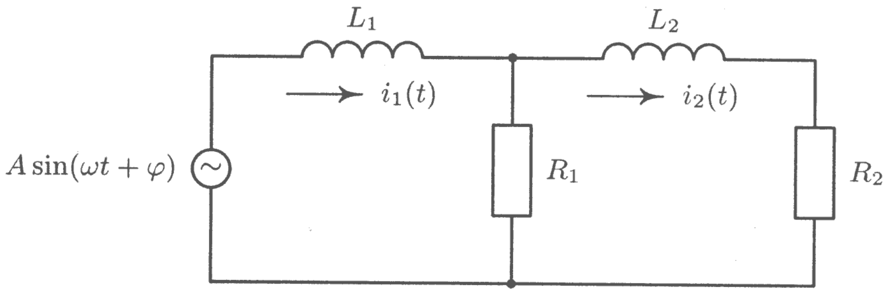
Z Kirchhoffových zákonů — srovnejte str. 42 a 78 — vyplývá, že $i_1(t)$ a $i_2(t)$ splňují dvojici diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
L_1 i_1'(t) + R_1[i_1(t) - i_2(t)] &= A\sin(\omega t + \varphi), \\
L_2 i_2'(t) + R_2 i_2(t) - R_1[i_1(t) - i_2(t)] &= 0.
\end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned}
i_1' &= -\frac{R_1}{L_1} i_1 + \frac{R_1}{L_1} i_2 + \frac{A}{L_1}\sin(\omega t + \varphi), \\
i_2' &= \frac{R_1}{L_2} i_1 + \frac{R_1 + R_2}{L_2} i_2,
\end{aligned}$$

což je opět lineární systém s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou.



Obr. 3.4: Elektrický obvod

Literatura

[1] Borůvka, O.: *Lineare Differentialtransformationen 2. Ordnung.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967. Překlad do angličtiny London, The English University Press, London 1971.

[2] Borůvka, O.: *Základy teorie matic.* Academia, Praha 1971.

[3] Coddington, E. A. — Levinson, N.: *Teorija obyknovennych differencialnych uravnenij.* Izdatelstvo inostrannoj literatury, Moskva 1958.

[4] Gantmacher, F. R.: *Teorija matric.* Gosudarstvennoje izdatelstvo techniko-teoretičeskoj literatury, Moskva 1953.

[5] Greguš, M. — Švec, M. — Šeda, V.: *Obyčajné diferenciálne rovnice.* Alfa, Bratislava 1985.

[6] Hartman, P.: *Ordinary Differential Equation.* John Willey & Sons, Inc., New York—London—Sydney 1964.

[7] Horský, Z.: *Diferenciální počet.* MVŠT, sešit V. SNTL, Praha 1981.

[8] Jevický, J. — Kovařík, P.: Numerické metody algebry. Vojenská akademie, Brno 1986. Učební text.

[9] Jevický, J. — Kovařík, P.: Numerické metody analýzy. Vojenská akademie, Brno 1987. Učební text.

[10] Kamke, E.: *Spravočnik po obyknovennym differencialnym uravnenijam.* Nauka, Moskva 1976, 5. vyd.

[11] Kropáč, J. — Schwarz, R.: Sbírka aplikovaných příkladů. Vojenská akademie, Brno 1986. Učební text.

[12] Kuben, J. — Šmarda, Z.: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné. Vojenská akademie, Brno 1989. Učební text.

[13] Kuben, J. — Šmarda, Z.: Reálné funkce jedné reálné proměnné. Vojenská akademie, Brno 1990. Učební text.

[14] Kurzweil, J.: *Obyčejné diferenciální rovnice.* SNTL, Praha 1978.

[15] Leighton, W.: *Ordinary Differential Equations.* LONGMANS, London 1964.

[16] Neuman, F.: *Global Properties of Linear Ordinary Differential Equations.* Academia, Praha 1991.

[17] Petrovskij, I. G.: *Lekcii po teorii obyknovennych differencialnych uravnenij.* Nauka, Moskva 1970, 6. vyd.

[18] Pontrjagin, L. S.: *Obyknovennyje differencialnyje uravnenija.* Nauka, Moskva 1965, 2. vyd.

[19] Přikryl, P.: *Numerické metody matematické analýzy.* MVŠT, sešit XXIV. SNTL, Praha 1985.

[20] Ráb, M.: Diferenciální rovnice. Univerzita J. E. Purkyně, Brno 1980. Učební text.

[21] Ráb, M.: Metody řešení diferenciálních rovnic i. obyčejné diferenciální rovnice. Univerzita J. E. Purkyně, Brno 1989. Učební text.

[22] Ráb, M.: Metody řešení diferenciálních rovnic ii. systémy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Univerzita J. E. Purkyně, Brno 1989. Učební text.

[23] Radochová, D. — Zemanová, J.: Diferenciální rovnice. Vojenská akademie, Brno 1970. Učební text.

[24] Radochová, D. — Židek, J.: Lineární algebra. Vojenská akademie, Brno 1983. Učební text.

[25] Ralston, A.: *Základy numerické matematiky.* Academia, Praha 1973.

[26] Schwabik, Š.: *Generalized Differential Equations. Fundamental Results.* Academia, Praha 1985.

[27] Schwabik, Š.: *Generalized Differential Equations. Special Results.* Academia, Praha 1989.

[28] Spiegel, M. R.: *Applied Differential Equations.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1958.

[29] Stěpanov, V. V.: *Kurs diferenciálních rovnic.* Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950, 2. vyd.

[30] Veit, J.: *Integrální transformace.* MVŠT, sešit XIV. SNTL, Praha 1979.

[31] Vetchý, V.: Sbírka příkladů z lineární algebry. Vojenská akademie, Brno 1991. Učební text.

[32] Vetchý, V. — Šikulová, B.: Lineární algebra. Vojenská akademie, Brno 1988. Učební text.

[33] Židek, J. — Ondroušek, Z.: Integrální počet. Vojenská akademie, Brno 1989. Učební text.

Rejstřík

Ř

S

V

W

Z

Doc. RNDr. Jaromír Kuben, CSc.

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Vydavatelství Univerzity Palackého
Olomouc 1995
I. vydání

Určeno pro I.–III. ročník studia matematiky na PřF UP

Odpovědný redaktor: RNDr. Josef Tillich, CSc.

Vytisklo polygrafické středisko VUP Olomouc, č. z. 144/95
136 stran
AA – VA: 4,98 – 5,38
Náklad: 250 výtisků
Tematická skupina: 17/31
Číslo nominál. skupiny: 63/II/10
Vydavatelské oprávnění: MK ČSR č. 21.514/79 ze dne 4. 12. 1979

ISBN 80-7067-535-7