Úvod: příklady z historie

Úvod

Je užitečné si ještě dříve přečíst předmluvu. Nejprve si všimneme prostřednictvím vybraných ukázek toho, co předcházelo korektním definicím některých matematických pojmů a jak se vyvíjely představy o reálných číslech, o limitě posloupnosti apod. Matematické pojmy jsou často předmětem mnohem složitějšího vývoje, než je při jejich studiu na první pohled zřejmé. Některé relativně složité poznatky jsou známy velmi dlouho, jiné, i když se nám jeví jako velmi jednoduché, se však objevily mnohem později, nežli bychom očekávali. Výběr ukázek je dán osobním vkusem; rozhodně by bylo chybou se domnívat, že jde o nejzávažnější momenty vývoje matematiky.

Historie matematiky je dlouhá asi čtyři tisíce let a sahá hluboko před začátek našeho letopočtu; přitom pomíjíme zcela dobu dřívější, z níž se nám žádné písemné památky nezachovaly. Již před začátkem našeho letopočtu zvládali matematici relativně velmi složité výpočty, které souvisely např. s určením délky roku, s kalendářem, s určováním obsahů jednoduchých rovinných obrazců, se sledováním nebeských těles, s vyměřováním daní z pozemků atp. Některé poznatky z nejstarších písemných matematických památek udivují svou poměrně velkou numerickou přesností, avšak postrádají jakékoli náznaky metod, které byly k řešení použity; každá úloha byla řešena nezávisle na ostatních, zpravidla beze známek toho, že by si tehdejší počtáři nějaké souvislosti mezi nimi uvědomovali. U těchto úloh pak můžeme početní postupy rekonstruovat jen velmi obtížně na základě analogií, vlastních zkušeností a dobré víry, že to tak nějak podobně mohlo být.

Poznámka. Nejstaršími a patrně i nejznámějšími matematickými písemnostmi jsou egyptské papyry, které se někdy nazývají londýnský a moskevský. Londýnský zakoupil skotský sběratel Henry Rhind v r. 1858; někdy se též uvádí, že papyrus byl opsán písařem Ahmesem asi r. 1650 před n. l. z pramenů patrně o 200 – 400 let starších. Tento papyrus obsahuje 85 řešených problémů a je rozdělen do tří tématických částí, které postupně obsahují aritmetické úlohy, výpočty obsahů a objemů a problémy hospodářského rázu z praktického života. Je z něj zřejmé, že Egypťané zvládali aritmetické operace s přirozenými čísly. Sčítání a odčítání bylo díky lepšímu zápisu čísel poměrně jednoduché, avšak dělení bylo obtížnější. V papyru se pracuje se zlomky, obsahuje i problém vedoucí na určení součtu konečně mnoha členů geometrické posloupnosti a je v něm řešen i příklad, z něhož lze zpětně určit hodnotu $\pi \sim 3,16049$; viz níže.

V moskevském papyru je 25 úloh, které se částečně shodují s úlohami z londýnského papyru, jsou tam však i tři úlohy na objemy, které jsou zcela originální.

Iracionální čísla

Velmi dlouhý byl vývoj poznatků o iracionálních číslech. Již babylonští matematici znali poměrně přesně hodnotu $\sqrt{2}$ (1,4142129$\overline{629}$... místo 1,4142135623...); ta se vyskytovala v úlohách, které řešili. Neexistuje však žádný náznak toho, že by si uvědomovali nějakou abnormalitu tohoto čísla. Měli dokonce i tabulky druhých a třetích odmocnin.

Konstituování pojmu „iracionálního čísla" předcházel objev tzv. nesouměřitelnosti veličin; ta byla objevena pythagorejci [1]). Čísly byla pro ně jedině *čísla přirozená*, zlomky v našem smyslu nazývali souměřitelnými veličinami (to byly poměry, ne však čísla, i když se s nimi jako s částmi peněžních jednotek počítalo!); hodnota $\sqrt{2}/2$ byla nesouměřitelným poměrem a v něm vystupující veličiny, tj. 2 a $\sqrt{2}$, se nazývaly nesouměřitelnými. Pythagorejci znali nesouměřitelnost strany a úhlopříčky jednotkového čtverce. Běžně tradovaný důkaz iracionality $\sqrt{2}$, který bývá zpravidla prezentován již na střední škole, pochází v podstatě od Aristotela (384 – 322 před n. l.); ten připisuje starší důkaz metodou dvojího sporu pythagorejcům. Stejným způsobem se lehce dokáže, že $\sqrt{p}$ je iracionální číslo pro každé prvočíslo p [2]).

Po nějakou dobu byla patrně $\sqrt{2}$ jedinou známou veličinou tohoto typu (iracionálním číslem, použijeme-li současné terminologie); je však též možné, že první taková veličina odpovídala číslu $(\sqrt{5}-1)/2$, které souvisí s pojmem tzv. *zlatého řezu*. Pojednává o něm Eukleides (365 – asi 300 před n. l.) v Základech (Kniha 2, Věta 11). Tam je popsána konstrukce rozdělení úsečky na dva díly se speciální vlastností. Označíme-li danou úsečku AB, má se nalézti bod H mezi body A, B tak, aby platilo

$$|AB| \cdot |HB| = |AH|^2 .$$

Odtud plyne

$$|AB| : |AH| = |AH| : |HB| ,$$

neboli, položíme-li $|AB| = a$, $|AH| = x$, musí pro g, $g = a/x$, platit rovnost

$$g = \frac{x}{a-x}, \quad \text{a je tedy} \quad a(a-x) = x^2 .$$

[1]) Pythagoras (asi 585 – asi 500 před n. l.), zakladatel této školy, byl žákem Thalese z Miletu (asi 610 – asi 546 před n. l.). Žádné písemné práce pythagorejců se nezachovaly, a tak jejich výsledky známe zprostředkovaně (odvolávají se na ně např. Herodotos (asi 485 – asi 425 před n. l.) a Platon (427 – 347 před n. l.)).

[2]) Číslo 1 mezi prvočísla nepočítáme.

Odtud jednoduše plyne

$$g^2 = \frac{x^2}{(a-x)^2} = \frac{a}{a-x} = \frac{a-x}{a-x} + \frac{x}{a-x} = g+1\,,$$

a s ohledem na fakt, že úloze vyhovuje *kladné* řešení rovnice

$$g^2 - g - 1 = 0\,, \tag{1}$$

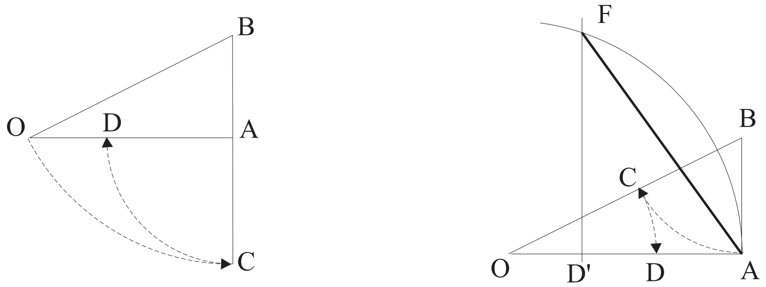
platí $g = (1+\sqrt{5})/2 = 1.618033\ldots$; se záporným řešením rovnice (1), které je tvaru $g' = (1-\sqrt{5})/2$, se rovněž ještě setkáme. Čísla g a g' jsou zřejmě iracionální.

Již od starověku je pokládán obdélník, jehož strany jsou v poměru $g : 1$, za ideálně harmonický kompoziční prvek. Někdy se též pracuje s číslem $g^{-1} = h$, které vyhovuje rovnici $h^2 + h - 1 = 0$ a pro něž platí

$$h = g - 1 = (\sqrt{5}-1)/2 = 0,618033\ldots\,.$$

Vidíme, že platí $h = -g'$. S některými vcelku překvapivými souvislostmi těchto čísel se zdánlivě vzdálenými poznatky se seznámíme později. Na tomto místě pouze připomeneme, že úsečka o délce $h/2$ se objevuje např. při konstrukci pravidelného tětivového pětiúhelníku jednotkové kružnice.

Příklad 1. Na Obr. 1 vlevo je znázorněn postup konstrukce čísla h (g sestrojíme obdobně).



Obr. 1.

Je $|OA| = 1$, $|AB| = 1/2$, $OA \perp AB$. Zřejmě platí $|BO| = \sqrt{5}/2 = |BC|$, a dále $h = |AC| = |AD| = (\sqrt{5}-1)/2$. Konstrukce je v podstatě převzata z Eukleidových *Základů.* Vpravo je znázorněna konstrukce strany pravidelného pětiúhelníku vepsaného jednotkové kružnici. Je opět $|OA| = 1$, $|AB| = 1/2 = |BC|$. Dále platí $|OC| = |OD| = h$, $|OD'| = h/2$. Oblouk AF je oblouk jednotkové kružnice se středem v počátku, přičemž $FD' \perp OA$; délka $|AF|$ úsečky AF je hledanou délkou strany pětiúhelníku.

Později Theodorus z Kýrény (asi 465 – asi 399 před n. l.) dospěl dále a dokázal nesouměřitelnost $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \ldots, \sqrt{17}$ s jednotkou [3]). Obecnější výsledek obdržel jeho žák Theaetetus (asi 410 – asi 369 před n. l.), který dokázal nesouměřitelnost (iracionalitu) $\sqrt{n}$ pro všechna přirozená n, která nejsou čtverci,

[3]) Jde tedy o odmocniny všech přirozených čísel od 2 do 17 včetně, která nejsou čtverci jiného přirozeného čísla.

tj. $n \neq k^2$ pro všechna přirozená čísla k. Teprve však Eudoxos z Knidu (asi kolem 370 před n. l.) zvládl problém nesouměřitelných veličin tak, jak je prezentován v Eukleidových *Základech*; tam lze mj. také nalézt používaný nepřímý důkaz toho, že $\sqrt{2}$ není číslo racionální.

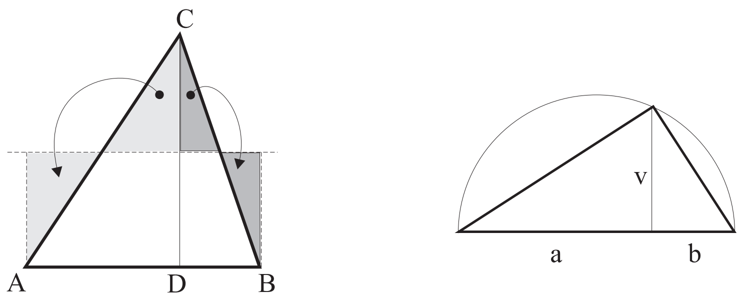
Kvadratura a číslo π

Také vlastnosti jiných veličin byly chápány velmi intuitivně. Např. některé vlastnosti obsahu rovinných obrazců, které jsou z dnešního hlediska velmi důležité, byly pokládány za zřejmé. Obsah mnohoúhelníku opsaného kružnici byl zřejmě větší než obsah kruhu omezeného touto kružnicí a ten zase větší než obsah mnohoúhelníku vepsaného této kružnici (monotonie obsahu). Za stejně přirozené bylo považováno to, že rozdělením rovinného obrazce na dva jednodušší nepřekrývající se obrazce lze sečtením jejich obsahů získat obsah obrazce původního (aditivita obsahu). Proto také z hlediska tehdejších znalostí nepředstavovala žádný problém transformace mnohoúhelníků na čtverce o stejném obsahu (tzv. *kvadratura mnohoúhelníku*). Postup lze založit na několika krocích.

Nejprve rozložíme mnohoúhelník na nepřekrývající se trojúhelníky, pak každý z nich transformujeme na obdélník a posléze na čtverec o stejném obsahu. Tak získáme konečný počet čtverců. Hledáme nyní čtverec o stejném obsahu jako je součet obsahů již sestrojených čtverců. Konstrukci provedeme postupně: každé dva nepřekrývající se čtverce nahradíme podle Pythagorovy věty čtvercem o stejném obsahu. Po konečném počtu kroků dostaneme požadovaný čtverec o stejném obsahu, jako měl výchozí mnohoúhelník. Stačilo tedy užít aditivity obsahu nepřekrývajících se obrazců, Eukleidovu větu o výšce a větu Pythagorovu, lze však také snižovat pomocí jednoduchých konstrukcí postupně počet stran daného mnohoúhelníku při zachovávání obsahu. Dříve byly tyto konstrukce probírány i na středních školách.

Vše je velmi názorné, jednotlivé kroky kvadratury ilustrují následující příklady.

Příklad 2. Obr. 2 (levá část) ilustruje transformaci trojúhelníku na obdélník o stejném obsahu:

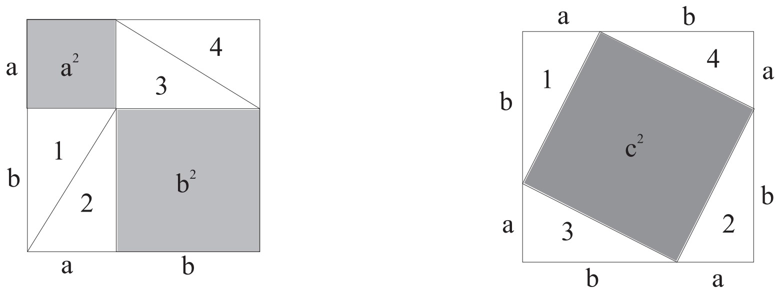


Obr. 2.

Snadno nahlédneme, že je-li $|AB| = c$ a v_c je délka výšky na stranu AB trojúhelníku ABC, obrázek také „dokazuje“ známý vzoreček pro obsah O trojúhelníku ABC ve tvaru $O = c \cdot v_c/2$.

Příklad 3. Na Obr. 2 vpravo je znázorněno užití Eukleidovy věty o výšce k transformaci obdélníku o stranách a, b na čtverec o stejném obsahu. Nad stranou o délce $a+b$ je opsána půlkružnice, výška znázorněného trojúhelníku má hledanou délku.

Příklad 4. Z mnoha důkazů tzv. Pythagorovy věty uveďme připojený názorný „důkaz obrázkem“, který je z důkazů tohoto typu patrně nejelegantnější. Podobný důkaz naznačuje např. Bháskara II. (1114 – 1185) v díle *Koruna vědy*.



Obr. 3.

Obsahy trojúhelníků označených $1, 2, 3, 4$ mají zřejmě stejnou velikost $ab/2$.

Je potřebné vždy rozlišovat: názor nesmí být *hlavním* vodítkem našich úvah, bylo by však hrubou chybou se ho zcela zříkat. Vždy byl jedním z prostředků pro objevování nových poznatků i pro chápání výsledků objevených dříve.

Pro úplnost poznatků o obsahu poznamenejme ještě další dvě samozřejmé věci, totiž že obsah je vždy nezáporné číslo a že platí vzoreček pro výpočet obsahu obdélníku (tj. platí: obsah = součin délek stran); ten byl v té době rovněž znám. Tyto základní vlastnosti obsahu jsou potřebné při zavádění *integrálu* jako „obsahu části obrazce mezi grafem funkce a osou x“; viz Kapitola 9.

Poznámky. Uvedli jsme jen náznak řešení problému kvadratury mnohoúhelníku a popsali postup konstrukce. Obdobné konstrukce pouze s použitím pravítka a kružítka nevedly ke konstrukci čtverce o stejném obsahu jako má daný kruh, tedy k tzv. *kvadratuře kruhu*, resp. ke konstrukci úsečky o stejné délce, jakou má daná kružnice, tj. k *rektifikaci kružnice*. Oba problémy se zdály těžké, avšak právě poměrně snadná řešitelnost analogického problému pro pravidelný vepsaný či opsaný n-úhelník vzbuzovala naději, že se řešení těchto vzájemně úzce souvisejících problémů najde.

Toto je jeden ze známých antických problémů, které značně ovlivnily vývoj matematiky. Dalšími takovými problémy jsou *trisekce úhlu* [4]) a *zdvojení krychle* [5]), kde je žádáno provedení konstrukce příslušných veličin pomocí omezených prostředků, tj. opět jen pomocí kružítka a pravítka. Všechny tyto problémy sahají svým původem až k Hippokratovi z Chia (5. stol. před n. l.). Důkaz neřešitelnosti problému kvadratury kruhu byl podán až ve druhé polovině 19. stol. důkazem *transcendence* čísla π (to je ovšem již

[4]) Neřešitelnost této úlohy dokázal r. 1837 Pierre L. Wantzel (1814 – 1848)

[5]) Legenda váže tuto úlohu s tyfovou epidemií v Aténách asi kolem r. 430 před n. l., kdy měl být „zdvojen“ Apollónův oltář tvaru krychle.

věc značně složitá, s níž se v tomto textu nesetkáte). Mnoho problémů však fascinovalo matematiky na celém světě třeba i několik století. Dále si připomeneme alespoň jednodušší z výsledků, které se vztahují k číslu π, nyní si však alespoň útržkovitě všimneme toho, jak se lidské znalosti o čísle π vyvíjely. S tím vším problémy kvadratury kruhu a rektifikace kružnice úzce souvisí.

Jistě není bez zajímavosti, že již v *Bibli* lze najít aproximaci $\pi \sim 3$. Kniha První Královská (Samuelova) (I.7.23) popisuje stavbu domu Šalamounova [6]):

> 23. *Udělal také moře slité desíti loket od jednoho kraje k druhému, okrouhlé vůkol: pět loket byla vysokost jeho, a okolek třiceti loket obkličoval je vůkol.*

Tato ukázka je již však na samé mezi historických úvah: je velice sporné, zda si autoři starých textů vůbec některé věci uvědomovali. Je totiž velmi snadné dát se při zkoumání historie matematiky strhnout a interpretovat nesprávně některá fakta podsouváním vlastních myšlenek a představ našim předchůdcům. Jak jste jistě pochopili, zde si řada autorů představuje příslušný citát jako vzoreček pro výpočet délky kružnice, známe-li její průměr s tím, že na místě π figuruje jeho „tehdy známá přibližná hodnota“ 3.

Přejděme k výsledkům, které jsou z matematického hlediska zajímavější. V již zmíněném londýnském papyru Henryho Rhinda nacházíme také příklad, z něhož lze zpětně určit hodnotu $\pi \sim 3,16049$. Z náznaků řešení jiných problémů lze provést *velmi pravděpodobnou rekonstrukci* postupu založeného na dvou nezávislých přiblíženích, jejichž chyby se poněkud kompenzují (kreslete si obrázek). Nejprve se sestrojí čtverec, délka jehož strany je rovna 9 jednotkám. Do něj se vepíše nepravidelný osmiúhelník („rohové čtverce“ s délkami stran 3 jednotky se rozdělí úhlopříčkami, které jsou dalšími stranami takto vzniklého vepsaného osmiúhelníku). Obsah tohoto osmiúhelníku je, jak je vidět z názoru, roven 63 čtverečním jednotkám. Ten aproximuje (vznik první chyby) do počátečního čtverce vepsaný kruh o průměru 9 jednotek. Dále ještě tento odhad obsahu kruhu zaokrouhlíme ($63 \doteq 64$), čímž vzniká druhá chyba. Provedeme-li dopočtení příslušného přiblížení π, dostáváme (srovnej [1])

$$\pi \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 \sim 8^2, \quad \text{neboli} \quad \pi \sim 4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2 = 3,1604\ldots .$$

Z matematického hlediska je pro nás velmi zajímavé využití tzv. *exhaustivní metody*, kterou nacházíme v souvislosti s určením vlastností obsahu kruhu, a tedy i hodnoty π. Tuto metodu používal již Eukleides. Ve svých *Základech* např. ukázal, že obsahy kruhů jsou ve stejném poměru jako čtverce jejich průměrů. Hodnotu tohoto poměru se však nikdy nepokusil numericky určit, což souviselo s chápáním těchto poměrů (nešlo o čísla). I když je sama metoda obecnější, v tomto případě jde o „vyčerpávání obsahu“ kruhu pomocí vepsaných pravidelných n-úhelníků; později byla užívána i pro jiné rovinné útvary a také i pro jednoduchá tělesa v prostoru. Přiblížíme si ji příkladem.

Mistrem v užívání exhaustivní metody byl ARCHIMEDES (287 – 212 před n. l.). Z mnoha výsledků, k nimž dospěl, si všimněme blíže, jak dospěl k odhadu hodnoty π a co u něj nacházíme nového. V Archimedově práci *Měření kruhu* je patrně poprvé přesvědčivě dokázáno, že platí-li pro obsah a obvod kruhu známé vzorečky $P = \pi_1 r^2$ a $O = \pi_2 d$, pak $\pi_1 = \pi_2$. Je tam tedy nalezena vzájemná souvislost „obou π“, tj. i kvadratury

[6]) Citujeme záměrně ze staršího vydání bible z r. 1889. „Moře slité“ je v komentáři vysvětleno, šlo o měděnou nádobu pro koupel.

kruhu a rektifikace kružnice. Archimedes určuje dále délku kružnice numericky, a tak nachází aproximaci π: používá přiblížení kružnice opsanými a vepsanými pravidelnými n-úhelníky. Podstatné je, že se vyrovnal s možností prakticky libovolně zlepšovat odhad π shora a zdola (někdy se o jeho metodě mluví jako o *metodě komprese*).

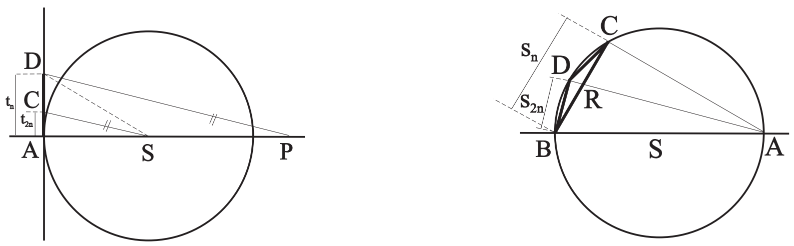
Popišme postup podrobněji: mějme jednotkovou kružnici, které je opsán a vepsán pravidelný n-úhelník. Označíme-li t_n *délku poloviny strany* pravidelného opsaného n-úhelníka, pak při zdvojnásobení počtu stran dospějeme jednoduchými geometrickými úvahami ke vzorečku pro vztah t_n a t_{2n} (sledujte Obr. 4 vlevo):

$$t_{2n} = \frac{t_n}{1+\sqrt{1+t_n^2}} \,. \tag{2}$$

Označme S střed kružnice a nechť A je bod dotyku strany opsaného pravidelného n-úhelníku a kružnice, resp. $2n$-úhelníku a kružnice. Koncový bod strany n-úhelníku nechť je D a $2n$-úhelníku (na úsečce AD) nechť je C. Sestrojme bod P na přímce SA tak, aby úsečka CS byla rovnoběžná s úsečkou DP. Pak je trojúhelník SPD rovnoramenný (vztah středových úhlů příslušných stranám uvažovaných mnohoúhelníků ukazuje, že polopřímka SC půlí $\measuredangle ASD$; dále platí: $|\measuredangle SPD| = |\measuredangle ASC| = |\measuredangle CSD| = |\measuredangle SDP|$, tedy úhly při P a D v trojúhelníku SPD mají stejnou velikost), a tedy

$$t_{2n} = \frac{|AC|}{|AS|} = \frac{|AD|}{|AS|+|SP|} = \frac{|AD|}{|AS|+|SD|} = \frac{t_n}{1+\sqrt{1+t_n^2}} \,,$$

což je již vzorec (2).



Obr. 4.

Pro vepsané n-úhelníky podobně dostáváme pro *délky stran* $s_n = |BC|$ a $s_{2n} = |BD|$ (sledujte Obr. 4 vpravo) s ohledem na podobnost trojúhelníků ABD, BRD a ARC (trojúhelníky mají zřejmě stejně velké úhly)

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BR|}{|BD|} \qquad \text{a} \qquad \frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|RC|}{|BD|} \,,$$

z čehož plyne

$$\frac{|AB|+|AC|}{|AD|} = \frac{|BR|+|RC|}{|BD|} = \frac{|BC|}{|BD|} \,,$$

neboli

$$\frac{2+\sqrt{4-s_n^2}}{\sqrt{4-s_{2n}^2}} = \frac{s_n}{s_{2n}} \,, \qquad \text{a po úpravě} \qquad s_{2n}^2 = \frac{s_n^2}{2+\sqrt{4-s_n^2}} \,;$$

poslední úprava spočívala v rozšíření výrazy v obou jmenovatelích a umocnění na druhou, zbytek je pak zřejmý. Je tedy pro každé n

$$\sqrt{\frac{s_n^2}{2+\sqrt{4-s_n^2}}} < \frac{\pi}{n} < \frac{2t_n}{1+\sqrt{1+t_n^2}}\,. \tag{3}$$

Archimedes znal pro $\sqrt{3}$ odhady

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}\,,$$

a tak mohl s poměrně dobrou přesností začít od šestiúhelníků; po obdivuhodném výpočtu dostal použitím velmi pečlivého zaokrouhlování horního i dolního odhadu s využitím (3)

$$\frac{223}{71} < \frac{25344}{8069} < \pi < \frac{29376}{9347} < \frac{22}{7}\,,$$

neboli (v poněkud přehlednějším tvaru v zápisu s využitím desetinných rozvojů, které však tehdy známé nebyly)

$$3,140845\ldots < 3,140909\ldots < \pi < 3,142826\ldots < 3,142857\ldots\,.$$

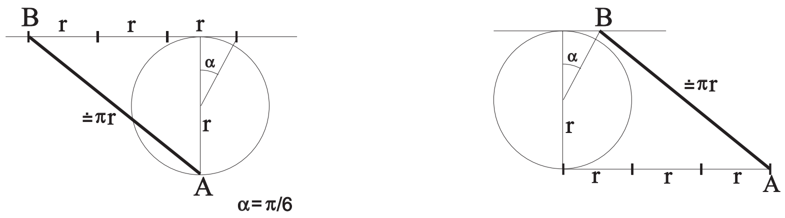
Věříme, že se Archimedes dostal s nalezenými odhady ještě blíže: jeden z jeho následovníků, Heron Alexandrijský (1. stol. n. l.), to uvádí ve spise *Metrica* z doby asi kolem roku 60 (tento spis se však podařilo objevit teprve v r. 1896). Tam se píše, že Archimedes dospěl k hornímu odhadu $211875 : 67441 > \pi$, neboli $3,1416349\cdots > \pi$.

Tento báječný výkon, s nímž souvisejí mj. i počátky teorie integrace, zůstal po mnoho století ideově nepřekonán (uvědomte si, že nebyly k dispozici počítače a že záznam při provádění výpočtů byl značně náročný). Po dlouhou dobu Archimedovi následníci prostě pouze zvyšovali počty stran aproximujících opsaných a vepsaných mnohoúhelníků a trpělivě počítali jeho metodou další a další platné cifry π. Srovnej s [1], [2], [3].

Důvody neřešitelnosti problému kvadratury kruhu či rektifikace kružnice leží z matematického hlediska již dosti hluboko. Tak např. i když je $\sqrt{2}$ iracionální číslo, lze úsečku o délce $\sqrt{2}$ pravítkem a kružítkem lehce sestrojit. Souvisí to s tím, že $\sqrt{2}$ je kořenem algebraické rovnice $x^2 - 2 = 0$ s celočíselnými koeficienty, tj. je to tzv. *algebraické číslo.* Čísla, která nejsou kořeny algebraických rovnic s celočíselnými koeficienty, nazýváme *transcendentní.* Ta jsou pravítkem a kružítkem nezkonstruovatelná ve smyslu, který dále v Historických poznámkách 1.6.11 upřesníme. Totéž platí i pro složitější algebraická čísla (problém zdvojení krychle vede na nalezení b, pro která platí $b^3 = 2a^3$ se známou délkou a), ale to v tuto chvíli není podstatné.

Existenci transcendentních čísel dokázal poprvé r. 1840 Joseph Liouville (1809 – 1882). Charles Hermite (1822 – 1901) dokázal r. 1873 transcendenci čísla e (základ tzv. přirozených logaritmů) a teprve v roce Liouvillova úmrtí dokázal Ferdinand Lindenmann (1852 – 1939) transcendenci π; tak bylo definitivně dokázáno, že úsečku o délce π nelze sestrojit pravítkem a kružítkem.

Příklad 5. Jednou z poměrně zdařilých geometrických konstrukcí z r. 1685, vedoucích k *aproximativní rektifikaci kružnice*, je konstrukce, jejímž autorem je polský jezuita, který žil nějaký čas i v Olomouci, Adam Adamandus Kochański (1631 – 1700). Postup je patrný z Obr. 5, ukazujícího dvě varianty této konstrukce; $\alpha = \pi/6$.



Obr. 5.

Výpočet ukazuje, že tak dostáváme

$$\pi r \sim \left(\left(3r - \frac{r}{\sqrt{3}} \right)^2 + 4r^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3} \right)^{1/2} r \doteq 3,141533r\,,$$

což dává $\pi \sim 3.141533\ldots$. Velice jednoduchá konstrukce tak vede k překvapivě přesnému výsledku. Poznamenejme, že Kochański byl po mnoho let v písemném styku s Leibnizem (viz dále).

Nekonečné součty

Všimněme si ještě krátce několika poznatků o řadách (spokojíme se opět s intuitivním chápáním tohoto pojmu). Sečtení *konečné* geometrické řady zvládal již Eukleides, který uměl dokázat platnost standardního vzorečku, i když o dost složitěji, než jak to zpravidla děláme dnes. Konkrétní *nekonečnou* geometrickou řadu „sečetl“ poprvé Archimedes v souvislosti s určením obsahu parabolické úseče exhaustivní metodou [7]).

Později sčítal geometrickou řadu v obecnější podobě také Nicole Oresme (1323 – 1382), který také poprvé dokázal asi v r. 1350 *divergenci* konkrétní (tzv. harmonické) řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\,, \tag{4}$$

jejíž n-tý člen konverguje k 0.

Divergenci *harmonické řady* lze dokazovat různě; zde zopakujme velmi starou a dnes již zcela standardní Oresmovu úvahu, která ukazuje prostředek, jak lze

[7]) Stěží lze však mluvit o sečtení nekonečné řady, neboť v té době ještě panovala jakási hrůza z nekonečna. Archimedes součet pochopitelně nedefinoval a pro konkrétní řadu ukázal principem dvojího sporu, které číslo je jejím „součtem“.

určit částečné součty harmonické řady větší než předem zvolené $n \in \mathbb{N}$ (musíme se vyrovnat s možností využít závorkování). Úvahu lze schematicky popsat takto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots > \\ > \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots . \end{aligned} \tag{5}$$

Toto je základní myšlenka důkazu, a tak také bývá důkaz divergence harmonické řady (4) nejčastěji prezentován.

Je vhodné si uvědomit nutnost precizovat pojmy a zacházet s novými objekty velmi opatrně a korektně; lze to ilustrovat např. následujícím „počítáním“:

$$\begin{aligned} 0 &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\ &= 1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots \\ &= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1 . \end{aligned}$$

Nalezený spor ukazuje, že takto mechanicky se s nekonečnými součty zacházet nedá a že je především nutné takový součet vhodným způsobem *definovat.*

Přitom některé úvahy, které se zdají být scestné, lze ještě zachránit. Ukažme si dvě, k nimž se ještě vrátíme v souvislosti s tzv. sčítatelností řad. Protože platí

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots ,$$

dostáváme dosazením $x=-1$ jako „součet řady (6)“ hodnotu $1/2$. A ještě další úvaha: označíme-li symbolem s „součet (6)“, platí

$$s = 1-1+1-1+\cdots = 1-(1-1+1-\cdots) = 1-s ,$$

a odtud dostaneme opět $s=1/2$. Poznamenejme však, že pracujeme s *divergentní* řadou (6).

Jiné úvahy lze zpřesnit snadněji. Poměrně brzo se podařilo sečíst (konvergentní) řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots .$$

Provedl to např. GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716), proto se tato řada často nazývá *Leibnizova řada.*

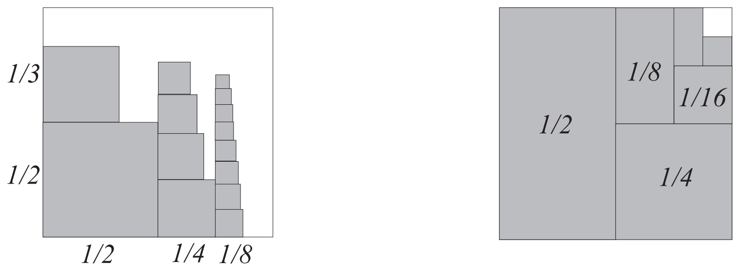
Dostatečně přesnou definici *konvergence řady* založenou na pojmu konvergence posloupnosti podal teprve kolem r. 1820 LOUIS AUGUSTIN CAUCHY (1789 – 1857). Zacházení s řadami v období mezi Archimedem a Cauchym nebylo sice postaveno na dobrých základech, byly však známy dosti hluboké výsledky. Např. LEONHARD EULER (1707 – 1783) dokázal jako první určit roku 1736 součet řady

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6} . \tag{6}$$

Příklad 6. Na Obr. 6 vlevo je ilustrována konečnost „nekonečného součtu“ (6) (pokud se spokojíme s mlhavou představou o řadách, kterými se budeme dále zabývat). Oddělíme první sčítanec a pak na sebe skládáme čtverečky, jejichž obsahy modelují další sčítance: nejprve 2, pak 4, 8, atd. Všimněme si zároveň, že výšky vytvářených „sloupečků ze čtverečků o obsahu $1/n^2$“ jsou vždy větší než $1/2$. Druhé schéma ukazuje konečnost součtu

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots,$$

souvisejícího se známou Zenonovou aporií *Achilles a želva.* V této souvislosti poznamenejme , že Zenon Elejský (asi 490 – asi 430 před n. l.) nepovažoval za možné, že by nekonečný součet kladných čísel mohl být konečné číslo.



Obr. 6.

Není bez zajímavosti si všimnout, jak Euler k výsledku (6) došel. Abychom si jeho postup přiblížili, musíme již použít hlubších poznatků z analýzy: k potřebnému vyjádření sinu pomocí řady dospěl jako první Isaac Newton (1643 – 1727) a my se k němu dostaneme za poměrně dlouhou dobu. Potřebujeme také vědět, že všechny kořeny rovnice $\sin x = 0$ jsou $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$. Euler postupoval tak, že ve vztahu

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots\right)$$

dostal po dělení x a po substituci $x^2 = y$ „rovnici nekonečného stupně“

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} + \cdots = 0\,. \tag{7}$$

Původní nulové body funkce sin dávají informaci o kořenech rovnice (7). Jsou to čísla $\pi^2, (2\pi)^2, (3\pi)^2, \ldots$. Naznačíme způsob jeho dalšího uvažování: tak např. pro rovnici druhého stupně $(x-a)(x-b) = 0$ s kořeny a, b dostaneme úpravou (předpokládáme $a, b \neq 0$) vztah $(1/ab)x^2 - (1/a + 1/b)x + 1 = 0$.

Vidíme, že když je absolutní člen v rovnici roven 1, je koeficient při x roven součtu převrácených hodnot kořenů rovnice s opačným znaménkem. Z tohoto vztahu platného v obdobné podobě i pro rovnice vyšších stupňů („stupeň rovnice“ by zde však byl nekonečný!) dostal porovnáním koeficientů pro rovnici (7) v proměnné y

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots,$$

a odtud násobením π^2 dostal

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Protože podobné vztahy platí (opět v případě konečnosti stupně rovnice!) i pro koeficienty u vyšších mocnin, mohl Euler pokračovat dále a odvodit postupně

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}, \quad \frac{\pi^6}{945} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}, \quad \frac{\pi^8}{9450} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8}, \ldots.$$

Takových příkladů, ukazujících na jedné straně značnou hloubku a obtížnost výpočtu, na druhé straně absenci potřebné teorie a přesnosti úvah, by bylo možno předložit daleko více.

Velmi krátce jsme se pokusili ukázat, že vývoj matematiky je složitý (ano, matematika se stále vyvíjí!) a v žádném případě není přímočarý. Mnohé myšlenky zrály řadu století, než se přiblížily té podobě, se kterou se budeme seznamovat. Na konci následujících kapitol nalezne čtenář vždy stručný historický komentář. Pokud jsou v textu uvedeny příklady, jsou důležité pro důkladné pochopení látky, i když jsou často velmi elementární.

V této úvodní kapitole jsme se nevyhýbali obrázkům. Umožnily nám rychleji chápat prováděné úvahy. Jak však již bylo řečeno, názor často nemusí být dobrým vodítkem k úvahám, operacím či důkazům a tak dále rozhodně vyloučíme „důkaz obrázkem“. Názorné obrázky, které nám pomohou si něco lépe zapamatovat, nezavrhujeme, avšak z technických důvodů jich mnoho v dalším výkladu neuvádíme.

Literatura:

[1] Beckman, P.: *A history of π (pi)*, St. Martin's Press, New York, 1971, (český překlad: *Historie čísla π* vydala Academia, Praha 1998).

[2] Bečvař, J., Fuchs, E. (ed.): *Historie matematiky I*, JČMF, Brno, 1994, (sborník semináře Historie matematiky, Jevíčko 1993).

[3] Edwards, C. H.: *The historical development of the calculus*, Springer, New York, 1979.

[4] Kline, M.: *Mathematical thoughts from ancient to modern time*, Oxford University Press, New York, Oxford, 1990.

[5] Struik, D. J.: *Dějiny matematiky*, Orbis, Praha, 1963, (asi nejlépe je dostupný ruský překlad z r. 1978, kniha však vyšla v angličtině a v němčině).

Kapitola 1

Základní poznatky

1.1 Logika a hovorový jazyk

Než přistoupíme k výkladu nové látky, připomeneme si základní fakta z *logiky* a *teorie množin*. Jsou vesměs elementární a jen některá mohou být pro čtenáře nová. Zatím nám půjde spíše o společný jazyk, než o výklad nějaké teorie.

Často budeme pracovat s *výroky*. Vystačíme s představou, že jde o (gramatické) věty, kterým lze přiřadit *pravdivostní hodnoty*, tedy rozhodnout, zda jsou, či nejsou pravdivé. Z výroků lze vytvářet další výroky působením *logických spojek* neboli *funktorů*. Funktor, který z pravdivého výroku vytváří nepravdivý a z nepravdivého pravdivý, nazýváme *negace*. Přisuzujeme-li nepravdivému výroku pravdivostní hodnotu 0 a pravdivému výroku pravdivostní hodnotu 1, popisuje působení funktoru negace tabulka

A	non A
0	1
1	0

Ta jen popisuje to, co již bylo řečeno, totiž, že je-li výrok A pravdivý, je výrok non A nepravdivý a obráceně, je-li výrok A nepravdivý, je výrok non A pravdivý. Tabulek pravdivostních hodnot se někdy užívá i jako důkazového prostředku.

Negovaný výrok A tedy značíme non A (ale také $\neg A$ apod.). Je-li například A výrok „Dnes je čtvrtek", je jeho negací non A výrok „Dnes není čtvrtek". Poněkud neobratně, ale správně, lze tuto negaci vyjádřit ve tvaru „Není pravda, že je dnes čtvrtek".

Daleko zajímavější jsou funktory, které operují se dvěma výroky. Jestliže ze všech možných „jednoargumentových" funktorů je zajímavá pouze negace, pak z „dvouargumentových" jsou nejběžnější čtyři, které nazýváme *konjunkce*, *disjunkce* (též *alternativa*), *implikace* a *ekvivalence*. Konjunkci (znak $\wedge$) odpovídá spojka *a* a její správné užívání v matematice většinou nepředstavuje žádnou obtíž. Disjunkci (znak $\vee$) odpovídá spojka *nebo* a zde již dochází k obtížím, neboť v hovorové řeči se tato spojka často chápe ve vylučovacím smyslu (proto je označení *alternativa* „logičtější“). Používání implikace (odpovídá jí znak $\Rightarrow$) je trochu složitější, avšak ekvivalence (znak $\Leftrightarrow$) opět většinou nečiní obtíže. Uvedené funktory popisuje tabulka

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$\neg A \vee B$	$A \wedge \neg B$
0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0

Znak $\wedge$ čteme „et“ a také „a“, znak $\vee$ čteme „vel“, resp. „nebo“. Znak $\Rightarrow$ čteme „implikuje“, často však používáme slovních obratů „A je postačující podmínkou pro B“, resp. také „B je nutnou podmínkou pro A“, nebo „Jestliže A, pak B“, apod. Pro začátečníka je nejobtížnější pochopit, že např. výrok „dvě je menší než jedna implikuje Brno je hlavní město ČR“ je pravdivý; zde je výrokem A nepravdivý výrok „dvě je menší než jedna“ a z tabulky vidíme, že v takovém případě bude výrok $A \Rightarrow B$ pravdivý jak tehdy, když je B pravdivý výrok, tak i tehdy, když B je nepravdivý výrok. Obtíž spočívá v tom, že čtení znaku implikace $A \Rightarrow B$ jako „z A plyne B“ svádí k domněnce, že mezi A a B musí být nějaká „hlubší příčinná souvislost“. To je však nesprávná představa. Rozdílů mezi hovorovým jazykem a tím, jak některých běžných slov budeme užívat v matematice, je ostatně více.

Znak pro ekvivalenci $\Leftrightarrow$ čteme například „A právě když B“ (v anglických textech obrat „if and only if“, který ekvivalenci odpovídá, bývá zkracován na tvar „iff“). V tabulce v předposledním sloupečku uvedený výrok má stejné pravdivostní hodnoty jako implikace $A \Rightarrow B$. Odtud vidíme, že implikaci lze vyjádřit i jiným způsobem a že vlastně výroky $A \Rightarrow B$ a $\neg A \vee B$ jsou ekvivalentní. Naproti tomu poslední sloupeček srovnáním s hodnotami pro implikaci ukazuje, jak lze implikaci negovat. Je $\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge \neg B$. Podobně se lze přesvědčit, že výroky $A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow \neg A$ jsou ekvivalentní. Podrobnější informace nalezne čtenář zpravidla v textech o logice či teorii množin. Odkazujeme čtenáře na [1] nebo na [11].

Nyní je již zřejmé, že se snažíme domluvit o tom, jak se budeme dorozumívat; naším cílem je, aby nedocházelo k nejasnostem. V matematice musí mít vše přesně vymezený význam. Nebudujeme tedy žádnou teorii či *výrokový počet*, domlouváme se pouze na určitých způsobech vyjádření.

Jestliže ve výroku „číslo 2 je prvočíslo“ nahradíme první část proměnnou x, dostaneme větu „x je prvočíslo“; to je tzv. *výroková forma*. Ta se stane výrokem po dosazení: výroky „Tři je prvočíslo“, resp. „Pět je prvočíslo“ vznikly dosazením za x a jsou oba pravdivé.

Z výrokové formy však může vzniknout výrok ještě jiným způsobem: proměnnou či proměnné můžeme vázat tzv. *kvantifikátory*. Budeme používat kvantifikátor *obecný* (také někdy *velký*), který značíme symbolem $\forall$ (obrácené písmeno ‘A’ souvisí s anglickým „all“), a kvantifikátor *existenční* (také nazývaný „malý“), který značíme $\exists$ (obrácené písmeno ‘E’ je odvozeno od „exists“). Kvantifikátor $\forall$ čteme zpravidla „pro všechna“, kvantifikátor $\exists$ obvykle „existuje“, „pro některé“ atp. Poznamenejme, že v některých starších knížkách se vyskytují označení

$$\prod \text{ nebo } \bigwedge \text{ pro } \forall \quad \text{a} \quad \sum \text{ nebo } \bigvee \text{ pro } \exists\,.$$

Uveďme jednoduchý příklad použití; z výrokové formy

„liché číslo x je prvočíslo“

vzniknou použitím těchto kvantifikátorů dva výroky (všimněte si, že proměnná x z formulace „všechna lichá čísla x jsou prvočísla“ v tomto případě dokonce mizí)

„všechna lichá čísla jsou prvočísla“,
„existuje liché číslo, které je prvočíslo“ .

První výrok zřejmě není pravdivý, druhý pravdivý je. Použijeme-li více kvantifikátorů za sebou, je třeba vyznačit, ke které proměnné se vztahují, např.

$$(\forall x)\,(\exists y)\,(x+y=2)\,. \tag{1.1}$$

Tento výrok je zřejmě pravdivý. Naproti tomu výrok

$$(\exists x)\,(\forall y)\,(x+y=2) \tag{1.2}$$

pravdivý není. Při negování přechází obecný kvantifikátor v existenční a existenční v obecný, pořadí zůstává zachováno. Tak např. negací předcházejícího výroku (1.2) je výrok

$$(\forall x)\,(\exists y)\,(x+y\neq 2)\,,$$

který je zřejmě pravdivý. Další věci tohoto typu si vysvětlíme přímo v průběhu výkladu, jakmile se k nim dostaneme. Zapamatujeme si ještě to, že vedle sebe stojící *stejné* kvantifikátory lze mezi sebou vyměnit a dostaneme ekvivalentní výrok. Proto výrok

$$(\forall x)\,(\forall y)\,(x+y=2) \quad \text{je ekvivalentní výroku} \quad (\forall y)\,(\forall x)\,(x+y=2)\,.$$

Nejsou-li však sousedící kvantifikátory stejné, zaměnit je nesmíme, neboť tak bychom dostali zcela jiný výrok. Čtenář může zkusit srovnat výrok

$$(\exists y)\,(\forall x)\,(x+y=2)$$

s výrokem (1.1), resp. i s (1.2).

Je-li výrok komplikovanější, pomáháme zvýšit jeho přehlednost závorkami. Většinou se ukazuje, že obtížnější je zvládnutí pojmů, v jejichž definici se vyskytují více nežli jen dva kvantifikátory. Je proto podstatně obtížnější pochopit např. definici limity, nežli pochopit definici omezené množiny. Protože budeme velmi často definovat některé věci pomocí rovnosti, bude se nám hodit následující úmluva:

Úmluva 1.1.1. Uzavřeme dohodu, že symbol „:=“ označuje rovnost, kterou definujeme symbol či výraz na straně dvojtečky (výjimečně užíváme i symbol „=:“).

Nastíníme ještě krátce náš budoucí postup: budeme vycházet z jistých tvrzení, která budeme považovat za základní a která *nebudeme dokazovat*; říkáme jim *axiómy*. Tato tvrzení budou „o něčem“, tj. budou v nich vystupovat určité (matematické) pojmy. Těm někdy říkáme *primitivní pojmy*. Pomocí nich budeme *definovat* další pojmy [1]) a budeme o nich *dokazovat* poměrně komplikované *matematické věty* (tvrzení, vyjádřená často větším počtem gramatických vět). Budeme tak deduktivním způsobem budovat matematickou teorii. Otázkami typu *nezávislosti* či *bezespornosti* axiómů se prakticky nebudeme zabývat. Jsou ostatně v intuitivní rovině vcelku snadno pochopitelné, i když nalezení příslušných odpovědí může být *velmi* složité.

Základ, na kterém budeme stavět, budou pro nás tvořit již probrané úmluvy o výrocích, výrokových formách, kvantifikátorech apod., základní poznatky o množinách a podrobnější popis reálných čísel. Jako doplňkovou četbu lze doporučit knihu [11].

1.2 Množinový jazyk

Připomeňme si krátce množinovou symboliku; opět pracujeme v intuitivní rovině a nebudujeme nějakou ucelenou teorii. *Množina* bude pro nás cosi jako souhrn, soubor, množství (poslední výraz se též kdysi v české literatuře pro množiny užíval) rozlišitelných prvků. Množina A je určena svými prvky. Lze tedy, alespoň teoreticky [2]), o každém prvku a rozhodnout, jestli je či není prvkem A: píšeme

$$a \in A, \quad \text{resp.} \quad a \notin A$$

a čteme „a je prvkem A“, „a není prvkem A“. Často užívaným obratům „a patří do A“, „a náleží do A“ se raději budeme vyhýbat; ne všichni lidé, kteří patří do blázince nebo do kriminálu, v nich skutečně jsou.

Konečná množina (zatím se spokojíme s intuitivní představou toho, co zde konečnost znamená) se zapisuje pomocí výčtu prvků: $\{x_1, x_2, x_3\}$ značí množinu o nejvýše [3]) třech prvcích x_1, x_2, x_3; obecně používáme vždy složených závorek $\{\ldots\}$, i když zápis může být trochu složitější. Vyjádření $\{x_k;\ k = 1, 2, 3\}$ připouští totiž snadné zobecnění, pokud index k necháme probíhat obecnější indexovou množinu A. Dostaneme tak např. množinu $\{x_k;\ k \in A\}$.

Pro některé množiny zavádíme zvláštní symboly. Symbol $\emptyset$ značí *prázdnou množinu*; tato množina nemá žádný prvek. Často se vyskytující množiny, jako jsou

[1]) Definice jsou logické ekvivalence, i když mají někdy ze zvykových důvodů formu implikace: „Jestliže …, pak říkáme, že ….“

[2]) Množina všech prvočísel je jedním z možných příkladů: není vždy jednoduché rozhodnout, zda je či není „velké“ přirozené číslo prvočíslem.

[3]) Obecně není zaručeno, že x_1, x_2, x_3 jsou různé.

např. *číselné obory*, označujeme také speciálními symboly. Uvedeme si je zatím jen pro přehled, neboť představy o nich budeme muset v dalším textu v mnohém zpřesňovat. Symbolem $\mathbb{N}$ značíme množinu všech *čísel přirozených* (tj. celých kladných čísel) a symbolem $\mathbb{N}_0$ množinu všech *nezáporných celých čísel* (pozor, je rozdíl mezi (nějakou) množinou přirozených čísel a množinou *všech* přirozených čísel $\mathbb{N}$). Písmenem $\mathbb{Z}$ značíme množinu všech *čísel celých*, písmenem $\mathbb{Q}$ množinu všech *čísel racionálních*. Nejčastěji budeme ovšem pracovat s množinou všech *reálných čísel*, kterou značíme $\mathbb{R}$ a někdy též s množinou všech *komplexních čísel* $\mathbb{C}$. Poznamenejme, že v hovorové řeči (a, bohužel, i v matematice), se velký kvantifikátor někdy vynechává (Lidé jsou smrtelní).

Připomeňme si, že $A \cup B$ (čteme: „A sjednoceno s B“) označuje množinu, jejímiž prvky jsou všechny prvky množiny A a také všechny prvky množiny B. Tuto množinu nazýváme *sjednocením množin* A a B. Platí

$$a \in A \cup B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (a \in A) \vee (a \in B)\,.$$

Zápis říká, že ekvivalence je zde vlastně definicí nového pojmu (sjednocení množin A a B); definovaný pojem stojí vždy na levé straně „definiční ekvivalence“.

Množina, kterou značíme $A \cap B$ (čteme: „A průnik B“), je množina všech prvků a, které jsou současně prvky A i B, tj.

$$a \in A \cap B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (a \in A) \wedge (a \in B)\,.$$

Nazýváme ji *průnikem množin* A a B Všimněte si v předcházejících definicích vnější podobnosti znaků $\vee$ a $\cup$ a znaků $\wedge$ a $\cap$, která *není* náhodná.

Je-li každý prvek množiny A zároveň prvkem množiny B, zapisujeme to $A \subset B$ a čteme „A je podmnožinou B“; pozor, *podmnožinou* množiny A je i množina A sama, tj. vždy platí $A \subset A$. Podobně platí i $\emptyset \subset A$ pro každou množinu A. Zápis $B \supset A$ značí totéž jako $A \subset B$; někdy pak hovoříme o B jako o *nadmnožině* množiny A. Tyto vztahy se nazývají *inkluze*.

Platí-li současně $A \subset B$ a $B \subset A$, zapisujeme to ve tvaru $A = B$ a hovoříme o *rovnosti množin* A, B. Zřejmě platí: „$A \subset B$, právě když $A \cap B = A$“; tento výrok je jednoduchým tvrzením (větou) teorie množin. Tato tvrzení (byť jsou velice jednoduchá neboli — jak říkáme — triviální) se musí dokazovat, my je však budeme považovat za známá. Podobně budeme užívat v přiměřené míře i poznatků z algebry a také je nebudeme dokazovat.

Množinu všech prvků množiny A, které nejsou prvky množiny B, značíme $A \setminus B$. Tak např. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je množina všech *iracionálních čísel* (zpravidla se pro ni nezavádí speciální označení). Někdy pracujeme pouze s prvky jedné množiny, například $\mathbb{R}$. Je-li $A \subset \mathbb{R}$, označíme $\complement A := \mathbb{R} \setminus A$. Množina $\complement A$ se nazývá *komplementem* (někdy též doplňkem) množiny A.

Připomeňme si v této souvislosti vzorce, pocházející od Augusta de Morgana (1806 – 1871), tzv. de Morganova pravidla. Je-li $A, B \subset X$ a pracujeme s doplňky v X, pak platí

$$\complement A \cup \complement B = \complement (A \cap B)\,, \quad \complement A \cap \complement B = \complement (A \cup B)\,.$$

Je-li např. x prvkem množiny na levé straně první rovnosti, neleží alespoň v jedné z množin A, B, tedy ani v jejich průniku. Je tedy prvkem množiny, stojící v rovnosti vpravo. Druhá inkluze se dokáže podobně. Tvrzení však platí i pro libovolný konečný počet uvažovaných množin, ba i mnohem obecněji, kdy pracujeme s obecnou neprázdnou indexovou množinou (důkaz je stále stejně lehký). V takových případech se pracuje se symboly

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k\,, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\,, \quad \text{případně} \quad \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\,;$$

čteme např. „sjednocení A_k od jedné do nekonečna“ apod. Obecný případ de Morganových pravidel má tak tvar (předpokládáme, že platí $A_\gamma \subset X$ pro všechna $\gamma \in \mathit{\Gamma}$ a píšeme $X \setminus A_\gamma$ místo $\complement A_\gamma$):

$$\bigcup_{\gamma\in\mathit{\Gamma}} (X \setminus A_\gamma) = X \setminus \bigcap_{\gamma\in\mathit{\Gamma}} A\gamma\,, \quad \bigcap_{\gamma\in\mathit{\Gamma}} (X \setminus A_\gamma) = X \setminus \bigcup_{\gamma\in\mathit{\Gamma}} A_\gamma\,. \tag{1.3}$$

Čtenář by si měl důkaz pro obecný případ zkusit samostatně podrobně sepsat.

Důležitým nástrojem teorie množin je vytváření tzv. *kartézského součinu* množin A, B. Je to množina všech *uspořádaných dvojic* (a, b) takových, že $a \in A$ a $b \in B$. Značíme ji symbolem $A \times B$. Je-li $R \subset A \times B$, je R *relace.* Často místo $(a, b) \in R$ píšeme $a\,R\,b$ a čteme „(a, b) je v relaci R“ nebo „a je v relaci R s b“ apod. Jestliže uspořádaná dvojice (a, b) není prvkem R, pak říkáme, že relace $a\,R\,b$ neplatí. Zpravidla pracujeme s *relací na množině* A, čímž rozumíme podmnožinu $A \times A$.

Poznámka 1.2.1. I velmi názorné pojmy je nutno vždy definovat. To platí např. i o uspořádané dvojici: kdybychom si kladli za cíl zpřesnit i toto, museli bychom pracovat s množinami množin typu $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ a pomocí nich definovat i to, co je to uspořádaná dvojice. Nám zde ale postačí pouze konstatování, že lze uspořádanou dvojici definovat opět pouze na základě teorie množin.

Až dospějeme o něco níže k *axiomatice reálných čísel*, budeme pracovat s *operacemi* sčítání a násobení (tyto pojmy znáte jistě z algebry) a také s relací *ekvivalence* a s *uspořádáním.* Co to vlastně je?

Je-li R relace na množině A, pak říkáme, že R je *tranzitivní*, platí-li pro všechny prvky a, b, c množiny A: je-li $a\,R\,b$ a $b\,R\,c$, je také $a\,R\,c$. Uveďme další tři důležité vlastnosti relací: je-li $a\,R\,a$ pro všechna $a \in A$, říkáme, že relace R je na A *reflexivní.* Pokud pro žádný prvek $a \in A$ neplatí $a\,R\,a$, říkáme, že relace R je *antireflexivní.* Platí-li $a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a$ pro každou dvojici $(a, b) \in A \times A$, říkáme, že relace R je *symetrická.* Pokud platí $(a\,R\,b) \wedge (b\,R\,a) \Rightarrow (a = b)$, říkáme, že relace R je *antisymetrická.*

Reflexivní, symetrickou a tranzitivní relaci na množině A nazýváme *ekvivalencí na* A. Budeme využívat některých vlastností ekvivalence, které *nebudeme* dokazovat. Je-li např. R ekvivalence na množině X, můžeme pro každé $x \in X$ definovat množinu

$$T(x) := \{y \in X;\, y\, R\, x\}\,.$$

Systém těchto podmnožin nazýváme *rozklad X na podmnožiny podle ekvivalence R*; tyto podmnožiny se také nazývají *třídy*, indukované relací R. Každý prvek *y třídy $T(x)$* se nazývá zpravidla *reprezentant* třídy $T(x)$. Mají-li indukované třídy společný prvek, jsou si rovny. Sjednocení všech těchto tříd je množina X. Každému systému podmnožin s těmito popsanými vlastnostmi odpovídá právě jedna ekvivalence na X; pokuste se tato tvrzení eventuálně samostatně dokázat.

Reflexivní, antisymetrická a tranzitivní relace R na množině A se nazývá *částečné uspořádání*, někdy jen *uspořádání* na A. Důvod spočívá v tom, že mohou existovat prvky $a, b \in A$ takové, že není ani $a\, R\, b$, ani $b\, R\, a$. Pokud pro uspořádání R platí vždy $a\, R\, b$ nebo $b\, R\, a$ (každé dva prvky $a, b \in A$ jsou „porovnatelné" pomocí R), nazývá se *lineární uspořádání*. U uspořádání není terminologie zcela jednotná a odchylky mohou být i podstatnější, vždy však je relace uspořádání alespoň tranzitivní.

Na množině všech reálných čísel $\mathbb{R}$ budeme pracovat s relací „je menší nebo rovno" ($\leq$ nebo $\leqq$), která je (lineárním) uspořádáním na $\mathbb{R}$. Množinu všech podmnožin množiny A můžeme považovat za (částečně) uspořádanou pomocí relace inkluze ($\subset$); tato relace neumožňuje porovnat libovolné dvě podmnožiny A, je to však (částečné) uspořádání.

Na množině $\mathbb{R}$ budeme pracovat i s relací „je menší než" ($<$), která je antireflexivní, tranzitivní a má vlastnost trichotomie: pro každou dvojici prvků a, b platí právě jeden z případů $a < b$ nebo $b < a$ nebo $a = b$ [4]).

Pomocí pojmu relace se často definuje zobrazení. My tento pojem zavedeme dále nezávisle na pojmu relace. Základní pojmy teorie množin jsou složitější, než se na první pohled může zdát. Jsou součástí samostatné teorie; zde jsme se jí věnovali jen minimálně a spokojili se pouze s elementárními poznatky. Teorie množin je pro nás vlastně jen základním dorozumívacím prostředkem. Upozorňujeme na to, že budeme někdy používat i poznatky hlubší, které se mohou zdát samozřejmé, které však z předcházejících nelze odvodit. Jedním takovým je tzv. *axiom výběru*. Ten říká, že *kartézský součin každé neprázdné množiny Γ neprázdných množin A_γ je opět neprázdná množina A*. Prvek $(a_\gamma) \in A$ „vybírá" totiž jednoznačně z každé množiny A_γ prvek a_γ. Využívá se však zejména tvrzení s ním ekvivalentních, která však mají formulace podstatně složitější. Jsou prostředkem například k důkazu existence báze obecného lineárního prostoru. Tyto hlubší poznatky nalezne čtenář např. v [1].

---

[4]) Někdy se relace tohoto typu nazývá *ostré uspořádání*; není to příliš vhodně volený název, tato relace *není uspořádáním* podle naší definice.

1.3 Reálná čísla

Pro náš další výklad potřebujeme kromě jednoduchých znalostí z teorie množin a výrokového počtu přesně vymezit, co jsou to reálná čísla. Budeme již mnohem přesnější, avšak mnoho věcí a vztahů pouze popíšeme nebo naznačíme, jak se k nim dojde. Přesněji: sepíšeme si nyní axiómy, kterými bude popsána množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$. Zde se dopouštíme jisté nepřesnosti: máme ve skutečnosti na mysli složitou strukturu. Jde nejen o množinu, ale též o operace sčítání a násobení, které jsou na ní definovány, a také o relaci uspořádání na této množině. To vše je přitom mezi sebou axiómy relativně komplikovaně provázáno. Ukáže se sice, že jsme se *téměř se všemi* těmito axiómy v nějaké formě již dříve seznámili, ale zde je na místě varování: pochopit tak komplikovanou strukturu je *těžké.* Zejména poslední axióm (13) je včetně všech důsledků obtížně pochopitelný, avšak právě jeho důsledky činí látku z hlediska analýzy zajímavou. Přistupme nyní k popisu $\mathbb{R}$. Ten je vlastně velmi dlouhým tvrzením *o existenci množiny* $\mathbb{R}$. *Obor reálných čísel* je čtveřice $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ s následujícími třinácti vlastnostmi; ty popisují objekt, kterým je *úplné uspořádané těleso.* Vybíráme je tak, aby připomínaly „zákony“ či „pravidla“, se kterými se čtenář setkával dříve na střední škole. Symbol $\mathbb{R}$ značí množinu, na které jsou definovány operace *sčítání* (značíme ji $+$) a *násobení* (značíme ji $\cdot$) a dále „porovnávací“ relace (tu značíme $<$), které vyhovují následujícím axiómům:

Pro operaci *sčítání* ($+$) platí:

(1) sčítání je *komutativní*, tj. pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$a + b = b + a\,;$$

(2) sčítání je *asociativní*, tj. pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$a + (b + c) = (a + b) + c\,;$$

(3) existuje (neutrální) *nulový prvek* $0 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$ platí

$$a + 0 = a\,;$$

(4) pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje *opačný prvek* (značíme ho $-a$) tak, že je

$$a + (-a) = 0\,.$$

Tedy $\mathbb{R}$ je vzhledem ke sčítání tzv. *komutativní* (někdy říkáme *Abelova*) *grupa* s *neutrálním prvkem* 0. Grupy jsou důležitým objektem studia v algebře.

Podobně se chová $\mathbb{R}$ vůči násobení. Pro operaci *násobení* ($\cdot$) platí tedy [5]):

[5]) Užíváme obvyklou konvenci o vynechávání znamení $\cdot$ pro násobení, tj. ab je totéž co $a \cdot b$.

(5) násobení je *komutativní*, tj. pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$ab = ba\,;$$

(6) násobení je *asociativní*, tj. pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$a(bc) = (ab)c\,;$$

(7) existuje (neutrální) *jednotkový prvek* $1 \neq 0$, $1 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$ je

$$a \cdot 1 = a\,;$$

(8) pro každé $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, existuje *inverzní prvek* (značíme ho a^{-1}) tak, že je

$$a(a^{-1}) = 1\,.$$

Je zřejmé, že $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je vůči operaci násobení také komutativní grupa (jestliže to použijeme k definici $\mathbb{R}$, je automaticky zaručeno $1 \neq 0$, ale (5) a (6) platí „na $\mathbb{R}$“). Obě popsané operace sčítání a násobení svazuje vzájemně *distributivní zákon*, tj. platí

(9) pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$a\,(b + c) = ab + ac\,.$$

Jako *axióm* jsme neuvedli to, že obě operace jsou na množině $\mathbb{R}$ definovány, to je však věc formální úpravy (důležité je, že to bylo řečeno). Dosud uvedené axiómy říkají, že $\mathbb{R}$ je *pole* (v češtině se užívá i starší termín *komutativní těleso*).

Dále musíme svázat operace na $\mathbb{R}$ s uspořádáním. Popíšeme nejprve vlastnosti relace *menší než* ($<$); to lze udělat např. pomocí následujících tří axiómů:

(10) relace $<$ je *trichotomie*, tj. pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ nastává právě jeden z případů (připomínáme, že jako obvykle zápis $a < b$ čteme „a je menší než b“)

$$a < b\,, \qquad a = b\,, \qquad b < a\,;$$

(11) relace $<$ je tranzitivní, tj. pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$(a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow a < c\,;$$

(12) pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí

$$(a < b) \Rightarrow a + c < b + c\,, \quad (a < b) \wedge (0 < c) \Rightarrow ac < bc\,.$$

Axióm (12) zaručuje monotonii vůči sčítání a monotonii vůči násobení (kladným číslem). Nyní musíme ještě *definovat*

$$a > b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} b < a\,,$$
$$a \le b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (a < b) \vee (a = b)\,, \quad a \ge b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} b \le a\,;$$

a připomenout, že $a \le b$ a $a \leqq b$ znamená totéž. Relace $\le$ je (lineárním) uspořádáním na $\mathbb{R}$.

Z axiómů (1) – (12) vyplývá, že $\mathbb{R}$ je *uspořádané pole*; o něco později se budeme věnovat poslednímu axiómu (13). Poznamenejme, že i množina všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$ má všechny výše uvedené vlastnosti (v axiómech stačí zaměnit $\mathbb{Q}$ za $\mathbb{R}$); se všemi axiómy (vlastnostmi) se pracuje již na střední škole. Tam se z nich odvozují např. všechny „poučky o zacházení s nerovnostmi" apod., proto toto odvozování nebudeme opakovat. Uvedeme pouze jedno tvrzení jako příklad.

Tvrzení 1.3.1. *Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a nechť platí $a < c$, $b < d$. Potom platí*

$$a + b < c + d\,.$$

Důkaz. Podle axiómu (12) dostáváme z nerovnosti $a < c$ „přičtením b" nerovnost $a+b < c+b$. Podobně z nerovnosti $b < d$ opět pomocí (12) dostaneme $b+c < d+c$. Odtud s použitím axiómu (1) dostaneme nerovnost $c + b < c + d$. Z odvozených nerovností plyne podle axiómu (11) i žádaná nerovnost. □

Poznámka 1.3.2. Tvrzení, které jsme právě dokázali, se odráží v pravidlu „souhlasné nerovnosti můžeme sčítat", jehož smysl je, přes nepřesné vyjádření, jistě zřejmý. Poznamenejme jako varování, že „souhlasné nerovnosti *mezi kladnými čísly* můžeme i násobit", ale že z $-2 < 3$ a $-3 < 1$ *neplyne* $6 < 3$. Často se stane, že neověřování takovýchto samozřejmostí dovede studenta matematiky ve složitějších případech k neuvěřitelným chybám.

Poslední axióm, který odliší $\mathbb{R}$ od $\mathbb{Q}$ (*oba* obory jsou uspořádaná pole) obdařuje $\mathbb{R}$ vlastností, která se nazývá *úplnost*. Ta teprve dodává $\mathbb{R}$ jistou krásu, neboť, populárně řečeno, postuluje fakt, že v $\mathbb{R}$ nejsou žádné „díry". Na střední škole se ztotožní reálná čísla s délkami úseček na přímce, kterou nazýváme *reálnou osou*. Tak se vlastně postupuje stejně jako ve starověku po objevení faktu, že existují nesouměřitelné veličiny (viz úvodní kapitola).

Úplnost je ta vlastnost $\mathbb{R}$, která je, jak již bylo řečeno, z hlediska analýzy nejzajímavější. Lze ji popsat pomocí jediného dalšího axiómu, který však lze formulovat mnoha způsoby; v každém případě však musíme zavést některé nové pojmy.

Poznámka 1.3.3. Připomeňme, jak probíhá tradiční postup postupného získávání znalostí o číselných oborech na základní a střední škole. Nejdříve se žáci seznamují s oborem všech *přirozených čísel* $\mathbb{N}$. Na základě *pozorování* dospívají k tomu, že pro prvky $\mathbb{N}$ platí (1), (2), resp. (5), (6). V souvislosti s problémem řešitelnosti rovnice

$$m + x = n \tag{1.4}$$

vzhledem k neznámé x pro $m, n \in \mathbb{N}$ se jeví nutné rozšířit číselný obor $\mathbb{N}$ a zavést množinu $\mathbb{Z}$ všech *čísel celých.* V tomto číselném oboru bude rovnice (1.4) již vždy řešitelná. Povšimněme si zavedení celých čísel po formální stránce blíže. Problém neřešitelnosti rovnice (1.4) spočívá tom, že je-li $n \leq m$, pak z intuitivních znalostí o celých číslech očekávaný „přirozený kandidát“ na řešení $n - m$ neleží v $\mathbb{N}$. To nás vede k následující úvaze: je-li $n_1 - m_1 = n_2 - m_2$, kde $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, pak v případě, že rozdíly v rovnosti jsou čísla z $\mathbb{N}$, platí také rovnost

$$n_1 + m_2 = n_2 + m_1 .$$

Ta má v $\mathbb{N}$ rozumný smysl vždy, a to i v případě, že některý z výchozích rozdílů v $\mathbb{N}$ smysl nemá. Definujeme proto na množině všech uspořádaných dvojic $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaci $\sim$ (je to ekvivalence na této množině)

$$(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} n_1 + m_2 = n_2 + m_1 .$$

Vzhledem k této ekvivalenci se rozpadá $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na třídy ekvivalentních uspořádaných dvojic. Pak už zbývá položit

$$T(k, l) := \big\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\, ; \, (n, m) \sim (k, l)\big\}$$

a *třídy* $T(k, l)$ budou tvořit nový obor, který označíme $\mathbb{Z}$ a nazveme oborem všech celých čísel. Zřejmě každá uspořádaná dvojice (k, l) určuje právě jednu třídu $T(k, l)$, avšak v každé třídě leží mnoho (dokonce nekonečně mnoho) takových dvojic. Snadno též nahlédneme, že třídy, obsahující prvky $(k + 1, 1)$, lze ztotožnit s prvky $k \in \mathbb{N}$.

Zbývá však ještě hodně práce (zavést sčítání tříd, ukázat, že má potřebné vlastnosti atd.), ale nejde o nic složitého. Podobně lze postupovat při rozšiřování $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{Q}$; tyto věci však spíše spadají do algebry a my se jimi nebudeme detailně zabývat (srovnej s [2]).

Z provedených úvah bychom však nezískali solidní základy, neboť by nám zbyl ještě velký dluh, totiž zavést přesně (nejen intuitivně) obor $\mathbb{N}$. Musili bychom vymezit přesně (např. opět axiomaticky) jeho základní vlastnosti. Místo axiomatického zavedení $\mathbb{N}$, k němuž bychom takto dospěli, zavádíme axiomaticky přímo obor všech reálných čísel $\mathbb{R}$. Potom ukážeme, jak lze v $\mathbb{R}$ vymezit obory $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ tak, aby měly potřebné a nám již důvěrně známé vlastnosti; přitom musíme např. zdůvodnit, proč „funguje“ důkaz *matematickou indukcí*, což je v podstatě *jeden z axiómů* oboru přirozených čísel, pokud se s tímto oborem začíná. Také se zmíníme alespoň v poznámkách o dalších tvrzeních, která lze, převážně pouze s pomocí tohoto axiómu, dokázat.

Dále budeme postupovat již trochu formálněji tak, jak se to v matematice při budování nějaké teorie obvykle dělává.

Definice 1.3.4. Číslo $M \in \mathbb{R}$ se nazývá *horní odhad* (nebo též horní závora) množiny $A \subset \mathbb{R}$, jestliže platí

$$(\forall x \in A)(x \leq M) .$$

Je-li horní odhad x_0 množiny A prvkem A, tedy platí-li pro $x_0 \in A$ tvrzení

$$(\forall x \in A)(x \leq x_0) ,$$

říkáme, že x_0 je *maximem* množiny A. Zapisujeme to pomocí vztahu $x_0 = \max A$.

Je zřejmé, že za popsané situace je také číslo $x_0 + 1$ (a obecně též každé $y \in \mathbb{R}$, $y \geq x_0$), horním odhadem A, avšak žádné číslo menší než x_0 horním odhadem množiny A být nemůže. Zvolíme-li libovolné číslo $M' \in \mathbb{R}$, $M' < x_0$, pak M' horním odhadem množiny A *není*, neboť neplatí $x_0 \leq M'$.

Poznámka 1.3.5. Číslo $m \in \mathbb{R}$ se nazývá *dolní odhad* množiny (nebo též dolní závora) množiny $A \subset \mathbb{R}$, jestliže platí

$$(\forall x \in A)(x \geq m)\,.$$

Je-li dolní odhad x_0 množiny A prvkem A a platí-li tedy pro $x_0 \in A$

$$(\forall x \in A)(x \geq x_0)\,,$$

říkáme, že x_0 je *minimem* množiny A.

Srovnáním Poznámky 1.3.5 s Definicí 1.3.4 vidíme, že jsme ji prakticky s drobnými změnami opsali. Příště zvolíme buď úspornější zápis, nebo jen popíšeme odlišnosti a přesnou formulaci znění přenecháme čtenáři. Proto jsme také zvolili označení Poznámka. Zároveň je zřejmé, že je-li $M \in A$, je M *nejmenším* horním odhadem A a podobně, je-li $m \in A$, je m *největším* dolním odhadem A.

Definice 1.3.6. Říkáme, že množina $A \subset \mathbb{R}$ je *shora omezená*, pokud existuje v $\mathbb{R}$ alespoň jeden její horní odhad. Podobně říkáme, že množina $A \subset \mathbb{R}$ je *zdola omezená*, pokud existuje v $\mathbb{R}$ alespoň jeden její dolní odhad. Množina, která je současně shora omezená i zdola omezená, se nazývá krátce *omezená* množina.

Příklad 1.3.7. Je zřejmé, že např. množina $\mathbb{R}$ nemá žádný horní odhad ani žádný dolní odhad. Rozmysleme si, jak to je s prázdnou množinou: v takovém případě je každé $a \in \mathbb{R}$ horním i dolním odhadem $\emptyset$.

Definice 1.3.8. Říkáme, že číslo $S \in \mathbb{R}$ je *nejmenší horní odhad* množiny $A \subset \mathbb{R}$ neboli *supremum* množiny $A \subset \mathbb{R}$, jestliže platí

(1) $(\forall x \in A)(x \leq S)$, tj. S je horní odhad A, a

(2) $(\forall S' \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x \leq S') \Rightarrow S \leq S'$, tj. S je nejmenší horní odhad.

Říkáme, že číslo $s \in \mathbb{R}$ je *největší dolní odhad* množiny $A \subset \mathbb{R}$ neboli *infimum* množiny $A \subset \mathbb{R}$, jestliže platí

(1') $(\forall x \in A)(x \geq s)$, tj. s je dolní odhad A, a

(2') $(\forall s' \in \mathbb{R})(\forall x \in A)(x \geq s') \Rightarrow s \geq s'$, tj. s je největší dolní odhad.

K označení užíváme pro S symbol $\sup A$ a pro s symbol $\inf A$.

Lemma 1.3.9. *Nechť $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}$. Potom $S = \sup A$, právě když je S horní závorou A a platí*

$$(2^*) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)(x > S - \varepsilon)\,;$$

obdobně i pro infimum.

Důkaz. Provedeme důkaz sporem: je-li $S = \sup A$, pak pokud by neexistovalo $x \in A$, $x > S - \varepsilon$, platilo by $S - \varepsilon =: S' < S$ a $x \leq S'$ pro všechna $x \in A$. Nechť je dále S horní závora s vlastností (2^*). Pokud by existovala horní závora $S' < S$, stačí volit $\varepsilon := S - S'$ a dostaneme opět spor. Tím je lemma dokázáno a my budeme tuto ekvivalentní podmínku často používat. □

Příklady 1.3.10. Snadno si rozmyslíte, že je $\sup\{x;\ 1 \leq x < 3\} = 3$, nebo podobně $\inf\{x;\ 1 \leq x < 3\} = 1$. Všimněte si, že supremum není prvkem vyšetřované množiny, ale infimum ano, takže infimum je zároveň minimem. Supremum $\sup \mathbb{N}$ v $\mathbb{R}$ neexistuje, avšak $s := \inf A$ pro každou neprázdnou $A \subset \mathbb{N}$ existuje a je $s \in A$. To jsou však úvahy o něčem, co jsme ještě *nedefinovali*, byť intuitivně víme, co to množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ je.

Poznámka 1.3.11. Je zřejmé, že podle předchozí definice mohou mít supremum v $\mathbb{R}$ pouze shora omezené a neprázdné množiny; podobně pouze zdola omezené neprázdné množiny mohou mít infimum. Tento nedostatek však zakrátko odstraníme.

Nyní již můžeme vyslovit poslední axióm, popisující množinu všech reálných čísel $\mathbb{R}$:

(13) Každá neprázdná shora omezená množina $A \subset \mathbb{R}$ má supremum (v $\mathbb{R}$).

Je pochopitelné, že je možné užít i formulace s infimem (Každá neprázdná zdola omezená množina $A \subset \mathbb{R}$ má infimum); toto je nyní jisté tvrzení v naší teorii. Pokud bychom je užili jako axióm, museli bychom tvrzení axiómu (13) dokázat.

Také každé další matematické tvrzení o $\mathbb{R}$, které budeme používat, lze z uvedených axiómů (1) – (13) dokázat; my to však provedeme pouze u některých, protože jde o úvahy, z nichž řada byla provedena dříve, např. v rámci středoškolské výuky. Pro úsporné vyjadřování se nám bude v dalším hodit následující značení.

Označení 1.3.12. Jsou-li $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, definujeme

$$[\,a, b\,] := \{x \in \mathbb{R}\,; a \leq x \leq b\}\,, \quad (a, b) := \{x \in \mathbb{R}\,; a < x < b\}\,.$$

Množinu $[\,a, b\,]$ nazýváme *uzavřený interval* (s krajními body a, b),nožinu (a, b) nazýváme *otevřený interval*. Podobně užíváme též označení (opět jen pro případ $a < b$)

$$(a, b\,] := \{x \in \mathbb{R}\,; a < x \leq b\}\,, \quad [\,a, b) := \{x \in \mathbb{R}\,; a \leq x < b\}\,.$$

Tyto množiny nazýváme *polouzavřenými* (*polootevřenými*) intervaly. Dále pro všechny tyto intervaly nazýváme jejich *délkou* číslo $b-a$. Mezi intervaly je užitečné zařazovat i některé další množiny. Klademe

$$\begin{gathered}[a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R}\,; x \geq a\}, \quad (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R}\,; x \leq a\},\\ (a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R}\,; x > a\}, \quad (-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R}\,; x < a\},\\ (-\infty,\infty) := \mathbb{R}\,.\end{gathered}$$

Symboly $+\infty$ a $-\infty$ čteme „plus nekonečno“ a „minus nekonečno“ a zatím jim nebudeme přisuzovat žádný další význam: jsou jen formou určitého označení. Později se k nim vrátíme.

Definice 1.3.13. Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$|x| := \begin{cases} \;\;x & \text{pro} \quad x \geq 0\,,\\ -x & \text{pro} \quad x \leq 0\,.\end{cases}$$

(symbol $|x|$ čteme „absolutní hodnota x“).

Věta 1.3.14. *Absolutní hodnota má následující vlastnosti:*

$$\begin{gathered}(1) \quad |x| \geq 0 \text{ pro všechna } x \in \mathbb{R}\,, \qquad (2) \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0\,,\\ (3) \quad |xy| = |x| \cdot |y|\,, \qquad (4) \quad |x+y| \leq |x| + |y|\,.\end{gathered}$$

Důkaz. První tři vlastnosti absolutní hodnoty jsou zřejmé. Poslední vlastnost se nazývá *trojúhelníková nerovnost* a v poněkud obecnějším tvaru si ji nyní dokážeme: pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y| \tag{1.5}$$

(u zdvojeného znamení platí nerovnosti s kterýmkoli z nich).

Platí $a \leq |a|$, $|xy| = |x||y|$, tudíž $-2|x||y| \leq 2xy \leq 2|x||y|$. Přičteme v nerovnostech výraz $x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2$, takže dostaneme

$$|x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 \leq x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2,$$

z čehož dostaneme (je $a^2 \leq b^2 \Leftrightarrow |a| \leq |b|$)

$$||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|\,,$$

Dosazením $-y$ za y dostaneme zbytek. □

Poznámka 1.3.15. V tomto stádiu bychom mohli zavést množinu všech *komplexních čísel* $\mathbb{C}$ a pracovat s nimi od začátku všude tam, kde by to nevyžadovalo žádné zvýšení úsilí, tj. prakticky téměř všude v Kapitolách 2 a 3. Přesto je z pedagogického hlediska lepší odložit zavedení komplexních čísel až na dobu, kdy je budeme opravdu nezbytně potřebovat.

Poznámka 1.3.16. Často se hodí následující *označení* (srovnej s Definicí 1.3.4):

$$\max(a,b) := \max\{a,b\}\,, \quad \min(a,b) := \min\{a,b\}\,.$$

Je tedy $\max(a,b) = b$ pro $a \le b$ a $\max(a,b) = a$ pro $a > b$. Speciálně klademe pro $a \in \mathbb{R}$

$$a^+ := \max(a,0) = (|a| + a)/2\,, \quad a^- := \max(-a,0) = (|a| - a)/2\,. \tag{1.6}$$

Číslo a^+ se nazývá *kladná část* a a číslo a^- se nazývá *záporná část* a.

Množinu všech přirozených čísel $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ bychom patrně intuitivně popisovali jako množinu

$$\mathbb{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, \ldots\}\,,$$

takže $1 \in \mathbb{N}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je i $n+1 \in \mathbb{N}$. Naše definice bude poněkud komplikovanější, abychom vystihli zároveň fakt, že je to v jistém smyslu nejmenší množina s touto vlastností. To musíme zpřesnit; připomeňme též již zavedené označení $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definice 1.3.17. Množina $A \subset \mathbb{R}$ se nazývá *induktivní*, jestliže pro ni platí

$$(1) \quad 1 \in A\,, \qquad (2) \quad x \in A \Rightarrow x+1 \in A\,.$$

Příklad 1.3.18. Zřejmě $\mathbb{R}$ je induktivní množina; zkuste popsat některé další.

Definice 1.3.19. Vycházíme-li z axiómů (1) – (13) pro $\mathbb{R}$, definujeme $\mathbb{N}$ jako průnik všech induktivních množin $A \subset \mathbb{R}$.

Zřejmě $\mathbb{N}$ je také induktivní množina a je nejmenší. Je-li totiž A induktivní, platí podle předchozí definice vždy $\mathbb{N} \subset A$. Odtud plyne tato

Věta 1.3.20. *Nechť $A \subset \mathbb{N}$ a platí*

$$(1) \quad 1 \in A\,, \qquad (2) \quad x \in A \Rightarrow x+1 \in A\,.$$

Potom je $A = \mathbb{N}$.

Důkaz je zřejmý. Předchozí věta umožňuje důkaz tzv. *matematickou indukcí*. Je-li $A(n)$ nějaký výrok či tvrzení o přirozeném číslu n, $A(1)$ platí a z $A(n)$ plyne $A(n+1)$, pak $A(n)$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Důkaz tedy probíhá ve dvou krocích. Ukažme si příklad dalšího tvrzení o $\mathbb{N}$, které však již jen zformulujeme, ale dokazovat je nebudeme. Princip důkazu spočívá ve volbě vhodných induktivních množin.

Věta 1.3.21. *Nechť $p, q \in \mathbb{N}$. Potom platí* (1) $p + q \in \mathbb{N}$, (2) $pq \in \mathbb{N}$, (3) $p \ge 1$, (4) *je-li $p > q$, pak $p - q \in \mathbb{N}$.*

Dále lze definovat některé další pojmy pomocí tzv. *induktivní definice*. Nebudeme to formálně provádět, zjednodušeně lze princip pochopit např. ze zavádění mocnin. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$x^1 := x, \quad x^2 := x \cdot x, \; \dots, \quad x^{n+1} := x \cdot x^n, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Je ještě užitečné položit $x^0 := 1$ a $x^{-n} = 1/x^n$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. I když se čtenáři na této definici nebude patrně zdát nic podezřelého, v rámci teorie je nutné zdůvodnit i samotný *princip* definice tohoto typu, umožňující jednoduše definovat nekonečný počet objektů. Některá fakta o $\mathbb{N}$ si alespoň uvedeme.

Poznámka 1.3.22. Dá se dokázat, že platnost Věty 1.3.20 je ekvivalentní následujícímu tvrzení o $\mathbb{N}$:

> *Jestliže je $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, potom existuje takové $k \in A$, že pro všechna $n \in A$ platí $k \leq n$.*

Popsaná vlastnost říká, že množina $\mathbb{N}$ je *dobře uspořádaná*. Toto a další tvrzení, podle nichž je $\mathbb{N}$ uzavřená vůči sčítání a násobení, se dokazují velmi podobně pomocí induktivních množin. Jako ilustraci dokážeme toto jednoduché tvrzení:

> *Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, pak rovněž $(n-1) \in \mathbb{N}$.*

Důkaz povedeme sporem: označme $k \in \mathbb{N}$ to číslo, pro něž tvrzení neplatí, tj. pro něž $k - 1 \notin \mathbb{N}$. Položme $A = \mathbb{N} \setminus \{k\}$ a ukažme, že $A = \mathbb{N}$; potom rovnost $\mathbb{N} = A = \mathbb{N} \setminus \{k\}$ dává žádaný spor. Jelikož je $k \neq 1$, je $1 \in A$. Je-li dále $n \in A$, pak i $(n+1) \in A$, neboť při $(n+1) \notin A$ bychom dostali $n + 1 = k$, a tedy $n = k - 1 \notin A$. Tím jsme dospěli ke sporu. Množina A je tedy induktivní množina obsahující 1 a je $A \subset \mathbb{N}$, platí tedy žádaná rovnost.

Pomocí tvrzení tohoto typu se dokáže analogické tvrzení o množině $\mathbb{Z}$:

> *Je-li $A \subset \mathbb{Z}$ zdola omezená, pak existuje* $\min A$*; podobně je-li $A \subset \mathbb{Z}$ shora omezená, pak existuje* $\max A$.

Příklady důkazů matematickou indukcí jsou předmětem středoškolské látky, zde si uvedeme jen ty, které jsou pro nás z různých důvodů důležité.

Příklad 1.3.23. Nechť $n \in \mathbb{N}$; platí-li $x_k \geq 0$ pro všechna $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, nebo $0 \geq x_k \geq -1$ pro všechna $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, je

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + \dots + x_n\,. \tag{1.7}$$

Tvrzení zřejmě platí pro $n = 1$ (dokonce se znamením rovnosti). Nechť tedy $x_k > -1$, $k = 1, \dots, n+1$; předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$ a násobme nerovnost (1.7) kladným číslem $(1 + x_{n+1})$. Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\begin{aligned}(1 + x_1) \dots (1 + x_n)(1 + x_{n+1}) &\geq (1 + x_1 + \dots + x_n)(1 + x_{n+1}) = \\ &= 1 + \dots + x_n + x_{n+1} + (x_1 + \dots + x_n)x_{n+1}\,.\end{aligned}$$

Poslední součin je nezáporný (x_k mají totéž znaménko); tím je podle Věty 1.3.20 tvrzení dokázáno.

Poznámka 1.3.24 (Jacob Bernoulli 1670). Jako zřejmý důsledek nerovnosti (1.7) ihned dostaneme pro $x \geq -1$ a $n \in \mathbb{N}$ tzv. *Bernoulliho nerovnost*

$$(1+x)^n \geq 1 + n\,x\,.$$

Někdy se tímto názvem označuje i poněkud obecnější nerovnost z předcházejícího příkladu. Nerovnost platí dokonce pro $x \geq -2$ a lze ji opět dokázat (trochu složitěji) indukcí. Ta se aplikuje zvlášť pro sudá a zvlášť pro lichá n; viz např. [9].

Definice 1.3.25. Definujme pro $n \in \mathbb{N}_0$ číslo $n!$ (čteme „en faktoriál") tak, že $0! = 1$ a $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Položíme pro $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$,

$$\binom{n}{k} := \frac{n\,!}{(n-k)\,!\,k\,!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

(definovaný symbol čteme „en nad ká"; poslední „názorná" rovnost však platí jen pro čísla $k, n \in \mathbb{N}$) a připomeneme, že platí

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\left(1 + \frac{n-k}{k+1}\right) = \binom{n}{k}\frac{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{1.8}$$

Příklad 1.3.26. Není obtížné matematickou indukcí dokázat (opět jde o středoškolskou látku) tzv. *binomickou větu*: pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\,.$$

Stačí rozepsat součin $(a+b)(a+b)^n$ s použitím vzorce (1.8) a upravit; tak dostaneme obtížnější část důkazu indukcí.

Poznámka 1.3.27. V souvislosti s předcházejícím příkladem připomeneme ještě další vzorce: pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})\,,$$
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots + ab^{2n-1} - b^{2n})\,.$$

Důkaz se provede přímým výpočtem.

Následující důkaz klasické nerovnosti mezi *aritmetickým průměrem* n nezáporných čísel $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$ a jejich *geometrickým průměrem* $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}$ se zpravidla na střední škole nedělá, je však poměrně jednoduchý. Provedeme ho podrobně. Nerovnost zapíšeme v méně obvyklém ekvivalentním tvaru, neboť jsme dosud nedefinovali n-tou odmocninu z nějakého (kladného) čísla a nevíme, zda vůbec existuje.

Lemma 1.3.28 (AG-nerovnost). *Nechť je $n \in \mathbb{N}$ a nechť pro čísla $x_1, \dots, x_n$ platí $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, \infty)$. Potom*

$$x_1 x_2 \cdots x_n \le \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n, \tag{1.9}$$

přičemž rovnost nastává právě jen v případě, že jsou si všechna x_k, $k = 1, 2, \dots, n$, rovna.

Důkaz. Pro nás je podstatné, že tuto nerovnost umíme dokázat tak jednoduchým prostředkem, jako je matematická indukce. Pro jednoho činitele je její zdůvodnění triviální. Pro dva činitele dostáváme

$$x_1 x_2 \le \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 \le \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2, \tag{1.10}$$

přičemž nerovnost přejde v rovnost, právě když $x_1 = x_2$. Často se AG-nerovnost používá v tomto speciálním případě, který v podstatě uvádí již Eukleides (asi 365 – asi 300 před n. l.) v [4].

Dále indukcí dokážeme, že tvrzení platí pro všechna n tvaru 2^m, $m \in \mathbb{N}$; potom ukážeme, jak z platnosti tvrzení pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ plyne jeho platnost pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k < n$. Někdy se takovému postupu říká „zpětná indukce“. Poznamenejme, že tento důkaz pochází od Louise Augustina Cauchyho (1789 – 1857).

Nejprve si povšimneme, že tvrzení zřejmě platí v případě, že alespoň jedno z čísel x_k, $k = 1, 2, \dots, n$, je 0, nebo platí-li $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Tyto případy dále neuvažujeme. Pro číslo $m \in \mathbb{N}$ položme $n := 2^m$, takže $2^{m+1} = 2 \cdot 2^m = 2n$. Jestliže mezi čísly $x_1, \dots x_{2n}$ jsou alespoň dvě navzájem různá, pak z (1.9) plyne

$$\begin{aligned}
x_1 \cdots x_{2n} &= (x_1 \cdots x_n) \cdot (x_{n+1} \cdots x_{2n}) < \\
&< \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}\right)^n = \\
&= \left[\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)\left(\frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n}\right)\right]^n \le \\
&\le \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{2n}\right)^{2n}.
\end{aligned}$$

Odtud plyne indukcí platnost (1.9) pro všechna $n = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Platí-li (1.9) pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $1 < k < n$, položíme

$$y_1 = x_1, \dots y_k = x_k, \quad y_{k+1} = \cdots = y_n = \frac{x_1 + \cdots + x_k}{k} = C.$$

Pak snadno dostáváme

$$x_1 \cdots x_k \, C^{n-k} = y_1 \cdots y_n < \left(\frac{x_1 + \cdots + x_k + (n-k)\, C}{n}\right)^n = \left(\frac{k\, C + (n-k)\, C}{n}\right)^n,$$

neboli $x_1 \cdots x_k\, C^{n-k} < C^n$, a tedy $x_1 \cdots x_k < C^k$, což však již je nerovnost (1.9) pro $n = k$. $\square$

Naznačme ještě postup v případě, že se bude užívat „obyčejná indukce"; zřejmě stačí popsat, jak se provede druhý krok důkazu. První jsme již dělali a lze ho snadno udělat dalšími způsoby; stačí např. uvážit, že $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$. Nahradíme-li v (1.9) všechna x_k násobky Ax_k, $A \in (0, \infty)$, vidíme, že stačí dokázat (1.9) pro případ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n$. S ohledem na komutativitu sčítání a násobení a předem vyloučené případy stačí ukázat, že platí $x_1 x_2 \cdots x_n < 1$. Nechť tedy tvrzení platí pro jisté $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že platí $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = n + 1$, přičemž sčítanci nejsou vesměs rovny 1. Můžeme předpokládat, že platí $x_{n+1} = 1 - \varepsilon < 1$, $x_n = 1 + \eta > 1$, kde $0 < \varepsilon < 1$, $\eta > 0$. Nyní pro $x'_n = x_n + x_{n+1} - 1 = 1 + \eta - \varepsilon$ platí $x_1 + x_2 + \cdots + x'_n = n$, a tedy $x_1 x_2 \cdots x'_n \leq 1$ podle indukčního předpokladu. S ohledem na

$$x_n x_{n+1} = (1 + \eta)(1 - \varepsilon) = (1 + \eta - \varepsilon) - \eta\varepsilon < x'_n$$

platí $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} < x_1 x_2 \cdots x'_n \leq 1$ a druhý indukční krok je tak dokončen. Pak stačí použít přímo Větu 1.3.20. Dali jsme přednost Cauchyho důkazu pomocí „zpětné indukce", který pochází z r. 1821; viz ještě Historické poznámky na konci této kapitoly.

Příklad 1.3.29. Dokažte pro všechna $n \in \mathbb{N}$ vzorec:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \neq 1. \tag{1.11}$$

Je zřejmé, že vzorec platí pro $n = 1$. Zbývá ještě ukázat, že z platnosti (1.11) plyne platnost analogického vzorce, v němž nahradíme číslo n číslem $(n + 1)$. Úpravami snadno dostaneme pro $x \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \Bigl(\sum_{k=0}^{n} x^k\Bigr) + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + \frac{(1 - x)x^{n+1}}{1 - x} =$$
$$= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

Tvrzení nyní vyplývá z již dokázané části pomocí Věty 1.3.20. Toto tvrzení je sice jednoduché, ale mimořádně důležité.

Příklad 1.3.30. Dokažme pro všechna $n \in \mathbb{N}$ následující vzorce:

$$\sum_{k=0}^{n} k \;= 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2.$$

První vzorec zřejmě platí pro $n = 1$ (dokonce pro $n = 0$). Provedeme druhý krok důkazu matematickou indukcí; je

$$\sum_{k=0}^{n+1} k \;= (n + 1) + \sum_{k=0}^{n} k \;= (n + 1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

a odtud plyne tvrzení podle Věty 1.3.20. Druhý vzorec se dokáže obdobně.

Příklad 1.3.31. Obdobně se dokáží pro všechna $n \in \mathbb{N}$ následující vzorce:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1+2+3+\cdots n)^2\,.$$

Odvození součtů $\sum_{k=1}^{n} k^p$ pro další $p \in \mathbb{N}$ vyžaduje prakticky jen znalost elementární matematiky. Viz např. [7] nebo [13].

Jestliže máme vymezenou množinu $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ čísel přirozených, můžeme rozšiřováním (analogicky k postupu budování číselných oborů z $\mathbb{N}$ zmíněnému výše) vymezit obory $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Položíme (definici $\mathbb{N}_0$ pouze připomínáme)

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}\,, \qquad \mathbb{Z} := \{x \in \mathbb{R}\,; (x \in \mathbb{N}_0) \vee (-x \in \mathbb{N}_0)\}\,,$$
$$\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R}\,; x = m/n, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Tvrzení 1.3.32. *Množina $\mathbb{N}$ není v $\mathbb{R}$ shora omezená.*

Důkaz. Budeme dokazovat sporem. Předpokládejme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $n \le S$, kde $S = \sup \mathbb{N}$. Pak by ale muselo existovat alespoň jedno $m \in \mathbb{N}$, pro něž platí $m > S - 1$; pro něj pak platí $m + 1 > S$, přičemž $m + 1 \in \mathbb{N}$, což je spor. □

Odtud plyne okamžitě tvrzení, které hrálo významnou roli v řecké matematice; používal ho i Archimedes, a proto se vlastnosti, kterou popisuje, říká *Archimedova vlastnost*.

Tvrzení 1.3.33 (Archimedův axióm). *Pro každé $a > 0$ a každé $b \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že platí $na > b$.*

Důkaz. Opět budeme dokazovat sporem. Pokud by tvrzení neplatilo, dostáváme

$$na \le b\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ \text{a tedy } n \le b/a\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Omezenost $\mathbb{N}$ shora je ve sporu s Tvrzením 1.3.32, které jsme však již dokázali. □

Poznámka 1.3.34. Je vhodné se zmínit o terminologii: každé uspořádané pole, které má analogickou vlastnost k vlastnosti popsané v předcházejícím tvrzení se nazývá *archimedovsky uspořádané*, resp. někdy *archimedovské*. Jak $\mathbb{R}$, tak i $\mathbb{Q}$ jsou archimedovská pole, dá se však ukázat, že existují uspořádaná pole, která nejsou archimedovská; jde však o složitější konstrukce, které nebudeme uvádět. Archimedovské pole *nemusí splňovat* axióm (13).

Axióm (13) bude mít pro nás v dalším výkladu mimořádnou důležitost. Z něj například dokážeme existenci kladného řešení rovnice $x^2 = 2$, tj. čísla $\sqrt{2}$. Není např. složité ukázat, že lze definovat

$$\sqrt{2} := \sup\{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}\,. \tag{1.12}$$

Existence takového čísla je důsledkem axiómu (13), takže stačí ukázat, že platí $(\sqrt{2})^2 = 2$. K těmto věcem se vrátíme již v následující kapitole.

Poznámka 1.3.35. Axiómy (1) – (13) vymezují vlastnosti $\mathbb{R}$. Na začátku jsme uvedli, že axiomaticky popisovaný objekt, tj. $\mathbb{R}$, *existuje.* Další jeho podstatnou vlastností je, že je do jisté míry určen jednoznačně. Přesněji, použijeme-li znalostí z oblasti algebry, každé dvě struktury s popsanými vlastnostmi jsou isomorfní.

1.4 Zobrazení

Všimneme si nyní blíže pojmu *zobrazení.* Nechť X, Y jsou libovolné neprázdné množiny. Označme f předpis, kterým je *každému* $x \in X$ přiřazen nějaký prvek $y \in Y$. Zpravidla tento prvek y značíme $f(x)$. Každý takový předpis se nazývá *zobrazení množiny* X *do množiny* Y. Značíme ho zpravidla

$$f : X \to Y\,, \quad \text{nebo} \quad f : x \mapsto f(x)\,, \quad x \in X\,.$$

Ve druhém případě jde o užívanou licenci: po čárce *vždy* následuje vymezení příslušné zobrazované množiny. Samo zobrazení lze popsat trochu složitěji (a zdánlivě mnohem „vědečtěji“) takto:

Definice 1.4.1. Nechť $X, Y \neq \emptyset$ a nechť $f \subset X \times Y$, pro kterou platí

(1) $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)((x, y) \in f)\,,$

(2) $(((x, y_1) \in f) \wedge ((x, y_2) \in f)) \Rightarrow y_1 = y_2\,.$

Potom f je *zobrazení* X *do* Y. Budeme ho značit $f : X \to Y$.

Cena takového popisu spočívá v tom, že ukazuje, že f je „množinový objekt“, a vychází tak ze znalostí, které předpokládáme. Popsaná *množina* f se někdy též nazývá grafem zobrazení f, takže z jistého pohledu dochází ke ztotožnění předpisu f a grafu f, který značíme G_f. My se dále budeme zabývat zobrazeními množin (reálných) čísel, avšak některé věci z obecné terminologie budeme používat. Všimněte si také, že zobrazení je speciálním případem relace. Vlastnost (2) se též někdy vyjadřuje tak, že říkáme „ke každému $x \in X$ *existuje právě jedno* $y \in Y$ tak, že $(x, y) \in f$“.

Poznámky 1.4.2. Zobrazení, tak jak jsme je zavedli, je dvojice, složená z předpisu a množiny, v definici se však mluví o (jediné) podmnožině kartézského součinu. Rovnost dvou zobrazení je tedy rovností množin, tedy předpisu i množiny, na níž tento předpis uvažujeme. Proto např.

$$f : x \mapsto x^2, \quad x \in (0,1) \qquad \text{a} \qquad g : x \mapsto x^2, \quad x \in (0,2)$$

jsou *dvě různá zobrazení,* neboť $(0,1) \neq (0,2)$. Aby naše vyjadřování nebylo příliš těžkopádné, nejsme vždy zcela důslední a mluvíme někdy o „funkci f na $(0,1)$“ a „funkci f na $(0,2)$“. Rozebereme tuto situaci podrobněji. Pracovali jsme s jedním předpisem na více množinách. Je-li však $A \subset X$ a $f : X \to Y$, zajímá nás velmi často pouze chování f na A, tj. zobrazení

$$x \mapsto f(x), \quad x \in A\,.$$

Toto zobrazení se nazývá *zúžení* nebo *restrikce* zobrazení f na množinu A; značíme ho zpravidla $f|A$, častěji však popisujeme zúžení slovy, nebo ho značíme jiným písmenem. Zhusta se však užívá stejný symbol f i pro zúžení a je třeba umět takové nepřesnosti rozeznat. Jde tedy o *konvence*, kterými si usnadňujeme vyjadřování, pokud není nebezpečí z nedorozumění. V uvedeném příkladě si musíme stále uvědomovat, že jde o dvě různé funkce.

Podobně se každé zobrazení $f : X \to Y$, jehož restrikce na $A \subset X$ je g (tj. $g : A \to Y$ a pro všechna $x \in A$ je $g(x) = f(x)$), nazývá *rozšíření* g na X. Takové rozšíření však již není obecně (na rozdíl od zúžení) jednoznačně určeno.

Obou těchto pojmů budeme užívat pouze tam, kde bude hrozit nebezpečí nedorozumění. Také je nutné důsledně rozlišovat mezi zobrazením f a hodnotou tohoto zobrazení $f(x)$ v bodě x. Jak dále uvidíme, toto důsledné rozlišení může být ve sporu s tradičním označením a pak opět dochází k nepřesnému vyjadřování. Tomu se lze vyhnout za cenu odklonu od tradičního značení nebo je třeba umět vždy takové nepřesnosti vysvětlit. Náš postup bude kombinací obojího přístupu.

Označení 1.4.3. Jsou-li dány množiny X, Y a je-li $f : X \to Y$, pak definujeme

$$\begin{aligned} D_f &:= X \quad (\textit{definiční obor } f)\,, \\ R_f &:= \{y \in Y;\, (\exists x \in X)(y = f(x))\} \quad (\textit{obor hodnot } f)\,. \end{aligned}$$

Obecněji: Pro $A \subset X$, $B \subset Y$ klademe

$$\begin{aligned} f(A) &:= \{f(x);\, x \in A\} \subset Y\,, \\ f^{-1}(B) &:= \{x \in X;\, f(x) \in B\} \subset X\,. \end{aligned}$$

Potom $f(A)$ je *obraz* množiny A a $f^{-1}(B)$ *vzor* množiny B při zobrazení f. Je tedy $R_f = f(X)$ a $D_f = X = f^{-1}(Y)$. Pro jednoprvkové množiny se dohodneme na jistém zjednodušení: je-li $a \in Y$, píšeme místo $f^{-1}(\{a\})$ pouze $f^{-1}(a)$.

Poznámka 1.4.4. Některým autorům se jeví účelné užívat označení $f : A \to B$ pro zobrazení *z A do B*, nám by však přineslo méně výhod než nevýhod. Pak je ovšem vyjádření $D_f = f^{-1}(Y)$ „přirozenější“ a koresponduje s $R_f = f(X)$.

Jednoduché vztahy mezi nově zavedenými pojmy je nutno promyslet a také prakticky procvičit. Uveďme několik ilustrativních příkladů.

Příklady 1.4.5. 1. Položme $f : x \mapsto 5,\ x \in (-5, 2)$. Pak je $f([-1, 1]) = \{5\}$, $f^{-1}(3) = \emptyset$, avšak $f^{-1}(5) = (-5, 2)$.

2. Je-li $f : X \to Y$ a $A \subset X$, pak platí $A \subset f^{-1}(f(A))$. Skutečně, pro každé $x \in A$ je $x \in f^{-1}(f(x))$. Obecně však neplatí rovnost, neboť např. pro funkci z předchozího příkladu je $f^{-1}(f([-1, 1])) = (-5, 2)$.

3. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení, $A, B \subset X$. Rozhodněte o platnosti rovností

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \quad f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)\ !$$

Snadno nahlédneme, že první rovnost platí: je

$$(x \in A \cup B) \Rightarrow (f(x) \in f(A) \cup f(B))\,, \quad \text{a také}$$
$$(y \in f(A) \cup f(B)) \Rightarrow ((\exists x_1 \in A)(f(x_1) = y) \vee ((\exists x_2 \in B)(f(x_2) = y)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y \in f(A \cup B))\,.$$

Ve druhém případě již obecně rovnost neplatí, neboť např. pro $f(x) = x^2$ je $f(-1) \cap f(1) = \{1\}$, ale $\{-1\} \cap \{1\} = \emptyset$.

3. Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení, $A, B \subset Y$. Dokažte, že platí rovnosti

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)\ !$$

Definice 1.4.6. Zobrazení $f : A \to B$, pro které existuje $b \in B$ tak, že $R_f = \{b\}$, se nazývá *konstantní.* Jestliže pro $f : A \to A$ platí $f(x) = x$, $x \in A$, nazývá se f *identické zobrazení na A*, kratčeji pouze *identita na A.*

Příklad 1.4.7. Položíme-li $f(x) := x^2,\ x \in \mathbb{R}$, zobrazuje f množinu $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, ale také do intervalu $[0, \infty)$, protože čtverec reálného čísla je vždy číslo nezáporné. Viděli jsme, že existují hodnoty, kterých se nabývá ve více bodech $\mathbb{R}$, ale v intervalu $[0, \infty]$ bychom dva různé body, v nichž se nabývá stejné hodnoty, nenalezli (proč?). Vůbec ale není zřejmé, že platí $f([0, \infty)) = [0, \infty)$.

Definice 1.4.8. Je-li $f : X \to Y$ a $f(X) = Y$, říkáme, že f zobrazuje X *na* Y; takové zobrazení se nazývá *surjekce.* Jestliže má zobrazení f vlastnost

$$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)\,,$$

tedy každé $y \in Y$ má *nejvýše jeden* vzor $f^{-1}(y)$, nazývá se f *prosté* zobrazení (*injekce*). Je-li zobrazení $f : X \to Y$ zobrazením na (často píšeme $f : X \overset{\text{na}}{\to} Y$, kde „na“ nad šipkou má zřejmý smysl) a je současně prosté, nazývá se *bijekce* (nebo vzájemně jednoznačné zobrazení) X na Y (při použití názvu bijekce se stává „na“ nad šipkou zbytečné).

Poznámka 1.4.9. Obecně přiřazení

$$y \mapsto f^{-1}(y),\ y \in Y$$

nepopisuje zobrazení ze dvou důvodů: pro některá $y \in Y$ může být $f^{-1}(y) = \emptyset$ a pro některá jiná může mít $f^{-1}(y)$ více než jeden prvek. Jestliže je však zobrazení $f : X \to Y$ *prosté* a *na*, určuje toto přiřazení jisté zobrazení definované na Y, které nazýváme *inverzním zobrazením* k f. Označení f^{-1}, ač někdy ne zcela vhodné pro možnost záměny s $1/f$, pochází z r. 1820, kdy ho užil John Frederic William Herschel (1792 – 1871) [6]).

[6]) Po něm, po jeho otci a jeho sestře jsou nazvány tři krátery na přivrácené straně Měsíce.

Příklad 1.4.10. Uveďme příklad tvrzení o souvislostech pojmů, které jsme dosud zavedli; důkaz přenecháme čtenáři, i když je trochu pracnější. Nechť $f : X \longrightarrow Y$ je zobrazení. Dokažte, že jsou následující podmínky ekvivalentní:

(1) f je prosté zobrazení;

(2) $f^{-1}(f(A)) = A$ pro každou $A \subset X$;

(3) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pro každé $A, B \subset X$;

(4) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$ pro každé $A, B \subset X$;

(5) $A, B \subset X, B \subset A \Rightarrow f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

Dále se seznámíme se *skládáním zobrazení*. Je to další způsob, jak vytvářet nová zobrazení, často poměrně již dosti složitá.

Definice 1.4.11. Nechť $f : A \to B$, $g : C \to D$ jsou zobrazení a nechť platí $f(A) \cap C \neq \emptyset$. Potom $f^{-1}(B \cap C) \neq \emptyset$ a lze definovat zobrazení

$$g \circ f : x \mapsto g(f(x)), \quad x \in f^{-1}(B \cap C).$$

Toto zobrazení, které značíme $g \circ f$ (také někdy $g * f$), se nazývá *složené zobrazení* ze zobrazení g a f. (Všimněte si toho, že v $(g \circ f)(x)$ a v $g(f(x))$ jsou uvedena písmena f, g ve stejném pořadí.[7]))

Poznámka 1.4.12. Velmi často (ale ne výlučně) budeme pracovat s předchozí definicí za situace, kdy bude navíc splněna podmínka $f(A) = C$. Pak se totiž situace podstatně zjednoduší a složené zobrazení $g \circ f$ je definováno na celé množině $A = f^{-1}(C)$.

Příklad 1.4.13. Nechť $f : X \to X$ je konstantní zobrazení. Vyšetřeme zobrazení $g : X \to X$, pro která platí $f \circ g = g \circ f$. Označíme-li $\{a\} := f(X)$, musí platit podmínka $g(a) = a$. Pak zřejmě pro každé $x \in X$ platí

$$f(g(x)) = a \qquad a \qquad g(f(x)) = g(a).$$

Zároveň vidíme, že pokud tato jednoduchá podmínka splněna není, rovnost složených zobrazení neplatí.

Příklad 1.4.14. Nechť $f(x) = 1/(1-x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Určíme $f \circ f$ a $f \circ f \circ f$. Jednoduchými úpravami snadno dostaneme

$$f(f(x)) = (x-1)/x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad f(f(f(x))) = x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Vyšetřete podobně pro funkci $g(x) = 1/(1+x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, několikanásobně složené funkce $g \circ g$, $g \circ g \circ g, \ldots$; před provedením výpočtu se pokuste odhadnout výsledek!

---

[7]) Někdy se užívá i obráceného pořadí, proto to speciálně připomínáme.

Definice 1.4.15. Je-li $f : \mathbb{N} \to B$, nazýváme f *posloupnost* prvků množiny B. Jak ještě později poznáme, užíváme poněkud odlišného označení, tj. klademe $b_k := f(k)$ a posloupnost zapisujeme ve tvaru $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$.

K ověření některých vlastností $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ potřebujeme pojem *mohutnosti množiny.* Ten je zobecněním intuitivně chápaného „počtu prvků" množiny M.

Definice 1.4.16. Nechť pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ existuje bijekce zobrazující množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ na A. Pak říkáme, že A je množina o n prvcích. Číslo n značíme $\#A$ a nazýváme je *kardinalita* nebo *mohutnost* množiny A, nebo také *kardinální číslo* množiny A. Pro $\emptyset$ definujeme $\#\emptyset = 0$. Množiny A, pro která je $\#A \in \mathbb{N}_0$ nazýváme *konečné množiny.* Ostatní množiny jsou *nekonečné množiny.* Existuje-li bijekce množiny $\mathbb{N}$ na A, říkáme, že množina A je *nekonečná spočetná množina*; její mohutnost se obvykle značí hebrejským písmenem s indexem 0: $\aleph_0$ (čteme „alef nula").

Poznámka 1.4.17. Ukazuje se, že je užitečné označovat jako *spočetné* množiny všechny konečné množiny a všechny nekonečné spočetné množiny; pak lze totiž řadu tvrzení o spočetných množinách vyslovit ve velmi jednoduchém tvaru. Poznamenejme, že definujeme-li pro konečnou množinu A s kardinalitou $\#A = n$ bijekci $j : k \mapsto j(k)$ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ na A, pak pro $x_k = j(k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, je $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Podobně v případě, že A je nekonečná spočetná množina, lze definovat bijekci $j : \mathbb{N} \to A$ a psát $A = \{x_k;\ k \in \mathbb{N}\}$.

Lemma 1.4.18. *Každá podmnožina* $\mathbb{N}$ *je spočetná.*

Důkaz. K důkazu stačí popsat konstrukci příslušné bijekce pro libovolnou $A \subset \mathbb{N}$. Jelikož podle Poznámky 1.3.22 obsahuje A nejmenší prvek, položme $j(1) = \min A$. Dále položíme $j(2) = \min\{A \setminus \{j(1)\}\}$, atd. Je zřejmé, že zobrazení j je bijekce množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, nebo celého $\mathbb{N}$, na A. $\square$

Lemma 1.4.19. *Neprázdná množina A je spočetná, právě když existuje prosté zobrazení f množiny A* do $\mathbb{N}$.

Důkaz. Je-li A spočetná, existuje $n \in \mathbb{N}$ a bijekce $j : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$, nebo bijekce $j : \mathbb{N} \to A$ a tedy $h = j^{-1}$ je prosté zobrazení A do $\mathbb{N}$.

Obráceně, existuje-li prosté zobrazení $f : A \to \mathbb{N}$, sestrojíme bijekci g množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, nebo celé množiny $\mathbb{N}$ na $f(A)$. Tato bijekce existuje podle Lemmatu 1.4.18; potom $f^{-1} \circ g$ je bijekce, z jejíž existence plyne spočetnost A. $\square$

Lemma 1.4.20. *Neprázdná množina A je spočetná, právě když existuje zobrazení* $\mathbb{N}$ *na A* (*tj. zde se již nepožaduje, aby toto zobrazení bylo prosté*).

Důkaz. Je-li A spočetná a g je bijekce $\{1, 2, \ldots, n\}$ nebo $\mathbb{N}$ na A, rozšíříme eventuálně g na $\mathbb{N}$ libovolným způsobem. Je-li obráceně $f : \mathbb{N} \overset{\text{na}}{\to} A$, definujeme prosté zobrazení $g : A \to \mathbb{N}$ tak, že položíme pro každé $a \in A$

$$g(a) = \min\{n \in \mathbb{N};\ f(n) = a\} = \min f^{-1}(a)\,;$$

definice je korektní, f je zobrazení *na* A, a tedy g je prosté zobrazení A do $\mathbb{N}$. $\square$

Poznámka 1.4.21. Zábavná interpretace srovnávání mohutnosti množin je obsažena v popisu, jak dva pocestní na poušti zjišťují, kdo má v pytli více datlí. Umějí počítat pouze do deseti a tak kladou datle do řady, vždy dvě proti sobě, aby zjistili, kdo dříve nebude mít „datli do páru“ [8]).

Poznámka 1.4.22. Snadno nahlédneme s přihlédnutím k poznámce 1.3.22, že $A \neq \emptyset$ je spočetná, právě když existuje konečná nebo nekonečná prostá posloupnost (tj. prosté zobrazení $\mathbb{N} \overset{\text{na}}{\to} A$) všech prvků z A. Předcházející Lemma 1.4.20 ukazuje, že ke spočetnosti A stačí, lze-li její všechny prvky A „seřadit do posloupnosti“ (ať již konečné nebo nekonečné).

Lemma 1.4.23 (Cantor 1873). *Jsou-li A, B spočetné množiny, je spočetná i množina $A \times B$.*

Důkaz. Jednoduchý důkaz tohoto tvrzení pochází od Cantora a spočívá v tom, že seřadíme podle Lemmatu 1.4.20 všechny prvky A do posloupnosti $\{x_n\}$ a všechny prvky B do posloupnosti $\{y_n\}$. Potom

$$A \times B = \{(x_k, y_l);\ (k, l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$$

a stačí ukázat konstrukci prostého zobrazení $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Toto zobrazení se sestrojí pomocí výčtu prvků konečných množin

$$C_n = \{(k, l);\ k + l = n\}\,;$$

posloupnost dvojic z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, kterou explicitně popíšeme

$$(1,1)|, (1,2), (2,1)|, (1,3), (2,2), (3,1)|, (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)|, (1,5), \ldots$$

určuje bijekci $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; svislé oddělovače $|$ označují skupiny C_n. Neuspokojí-li čtenáře tento „důkaz popisem“, pak podle Lemmatu 1.4.19 stačí sestrojit prosté zobrazení $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. To definujeme vztahem $f(k, l) = l + 2^{k+l}$. Dokažme, že f je prosté. Pro případ $f(k, l) = f(m, n)$ s $l \geq n$ platí

$$0 \leq l - n = 2^{m+n} - 2^{k+l} < l\,.$$

Dále je $l < 2^l < 2^{k+l}$, takže z předchozího dostáváme

$$2^{k+l} \leq 2^{m+n} < l + 2^{k+l} < 2^{k+l+1}\,.$$

Odtud pro exponenty plyne $k + l \leq m + n < k + l + 1$, takže $k + l = m + n$, a tedy $l - n = 2^{m+n} - 2^{k+l} = 0$. Platí tedy $l = n$ a $k = m$. $\square$

[8]) Jako motivační příklad užíval tuto historku prof. V. Jarník.

Lemma 1.4.24. *Nechť* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je spočetný systém spočetných množin* A_n*. Potom i* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *je spočetná množina.*

Důkaz. Z Lemmatu 1.4.20 vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje zobrazení f_n, $f_n : \mathbb{N} \overset{\text{na}}{\to} A_n$. Definujme $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ předpisem

$$F(n,m) = f_n(m)\,, \quad (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\,.$$

Snadno nahlédneme, že F zobrazuje $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na A, a protože podle Lemmatu 1.4.23 je $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ spočetná, je spočetná i A, neboť složením bijekce $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s F dostaneme zobrazení $\mathbb{N}$ na A. □

Poznámka 1.4.25. Následující schéma přibližuje způsob uspořádání prvků A do posloupnosti, což poskytuje názorný důkaz tvrzení

$$\begin{array}{lcllll}
A_1 & = & \{f_1(1), & f_1(2), & f_1(3), & \dots\}\,, \\
 & & \swarrow & \swarrow & & \\
A_2 & = & \{f_2(1), & f_2(2), & f_2(3), & \dots\}\,, \\
 & & \swarrow & & & \\
A_3 & = & \{f_3(1), & f_3(2), & f_3(3), & \dots\}\,, \dots
\end{array}$$

S tímto „uspořádáním po diagonálách“ se ještě později v několika souvislostech setkáme ve druhém díle tohoto textu.

Důsledek 1.4.26. *Množina všech racionálních čísel* $\mathbb{Q}$ *je spočetná.*

Protože podle předcházejících tvrzení jsou $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$ spočetné množiny, vytvářejí i zlomky p/q, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, spočetnou množinu. Množina všech navzájem rovných zlomků (racionálních čísel) je tedy též spočetná.

Tvrzení 1.4.27. *Označíme-li* $\exp(A)$*množinu všech podmnožin množiny* A*, pak neexistuje zobrazení* A *na* $\exp(A)$*. Speciálně pro* A nekonečnou spočetnou *není* $\exp(A)$ *spočetná množina.*

Důkaz. Nechť $F : A \overset{\text{na}}{\to} \exp(A)$. Definujme

$$B = \{a \in A; a \notin F(a)\}\,.$$

Potom neexistuje $a \in A$ tak, aby platilo $F(a) = B$, a tedy F není zobrazení na $\exp(A)$. Poslední tvrzení dokážeme sporem: kdyby platilo $F(a) = B$ pro nějaké $a \in A$, pak nemůže platit $a \in B$, protože pak by bylo $a \in F(a)$ a tedy $a \notin B$; tím jsme dostali spor (poznamenejme ještě, že nemůže platit ani $a \notin B$, protože pak by bylo $a \in B$). Avšak pak je $B \neq F(a)$ pro každé $a \in A$ a tedy F není zobrazení *na* $\exp(A)$. □

Poznámka 1.4.28. I když je množina racionálních čísel „jen spočetná“, snadno nahlédneme, že v každém intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$ leží alespoň jedno racionální číslo.

Zvolíme-li $n \in \mathbb{N}$ tak, že $n^{-1} < b - a$, pak platí$\{k/n;\ k \in \mathbb{Z}\} \cap (a, b) \neq \emptyset$. Stejně zřejmé je i to, že $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (a, b) \neq \emptyset$.

Poznámka 1.4.29. Snadno si sami rozmyslíte, že je-li $r = p/q \in \mathbb{Q}$, sestrojíte algoritmem pro dělení $p : q$ desetinný rozvoj čísla r (ten bude konečný či nekonečný, avšak periodický). Odkud plyne existence desetinného rozvoje pro libovolné $a \in \mathbb{R}$? Věnujme tomuto problému následující poznámku.

Poznámka 1.4.30. Dělíme-li při vyjádření čísla 12/5 číslo 12 číslem 5, mohou se mezi *zbytky* teoreticky vyskytnout čísla 0,1,2,3,4. Při prvním kroku je to v tomto případě číslo 2. V dalším kroku dostaneme 4 a zbytek 0, takže proces v tomto případě končí. Je tedy $12/5 = 2,4$ a toto číslo je vyjádřeno *konečným desetinným rozvojem*. Snadno si rozmyslíte, že toto nastane v každém případě, ať je na místě čísla 12 libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Při vyjádření čísla 15/7 se různých *zbytků* vyskytne více a nebude mezi nimi číslo 0. Teoreticky to mohou to být čísla $0, \dots, 6$, a jak snadno ověříme výpočtem, budou to postupně čísla 1, 3, 2, 6, 4 a 5. Tak dostáváme vyjádření

$$15/7 = 2{,}142857142857\ldots = 2{,}\overline{142857}\,,$$

kde pruh vyznačuje stálé opakování příslušné skupiny číslic. Skupina se nazývá *perioda*. Proto je číslo 15/7 vyjádřeno *nekonečným desetinným rozvojem*, který má 6-ti člennou periodou 142857.

Je-li dáno $s \in \mathbb{R}$, pak je lze napsat ve tvaru

$$s = p + r\,,$$

kde p je největší celé číslo menší či rovné s a pro r platí $0 \le r < 1$. Pro toto p používáme označení $p = [s]$ a říkáme, že p je *celá část* čísla s; rozdíl $s - [s] = r$ značíme někdy $\{s\}$ a nazýváme ho *lomená část* s. Zabývejme se dále vyjádřením čísla $s \ge 0$ desetinným rozvojem (pokud je $s < 0$, přejdeme k $-s$ a po vyjádření ho opět násobíme -1).

Před desetinnou čárkou v desetinném rozvoji bude (dekadicky vyjádřené) přirozené číslo $[s]$. Označíme ho a_0. Zbývá popsat vyjádření $\{s\} = r$ desetinným rozvojem. Zvolme v prvním kroku číslo $a_1 \in \mathbb{Z}$ tak, aby platilo

$$0 \le r - \frac{a_1}{10} < \frac{1}{10}\,,$$

tj. $a_1 \le 10r < a_1 + 1$. K tomu opět použijeme funkci celá část a položíme $a_1 = [10r]$. Protože zřejmě platí $0 \le 10r < 10$, je $0 \le a_1 \le 9$ a $a_1 \in \mathbb{Z}$. Tak jsme získali i první číslici rozvoje r.

Předpokládejme nyní, že již byla nalezena čísla $a_k \in \mathbb{Z}$, pro něž je $0 \le a_k \le 9$, $k = 1, 2, \dots, n$ a

$$0 \le r - \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{10^2} - \cdots - \frac{a_n}{10^n} < \frac{1}{10^n}\,. \tag{1.13}$$

Máme nalézt číslo $a_{n+1} \in \mathbb{Z}$, $0 \le a_{n+1} \le 9$, pro něž bude platit

$$0 \le r - \frac{a_1}{10} - \frac{a_2}{10^2} - \cdots - \frac{a_n}{10^n} - \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^{n+1}}\,.$$

Odtud plyne

$$a_{n+1} \le 10^{n+1} r - 10^n a_1 - \cdots - 10 a_n < a_{n+1} + 1\,.$$

Položíme $a_{n+1} = [10^{n+1}r - \cdots - 10a_n]$. Z nerovnosti (1.13) plyne $0 \le a_{n+1} \le 9$ a je zřejmě $a_{n+1} \in \mathbb{Z}$. Tím jsme popsali konstrukci desetinného rozvoje $a_0, a_1a_2a_3\ldots$ reálného čísla s. Je to opět induktivní vyjádření jako v případě definice mocnin apod. Stranou ponecháme možnou nejednoznačnost vyjádření (je např. $0{,}0\overline{9} = 0{,}1$) a přesný smysl vyjádření desetinným rozvojem v případě, že je tento rozvoj nekonečný; vrátíme se k němu po zvládnutí základních poznatků o řadách. Popsaný aparát však stačí k získání představy o libovolně přesné aproximaci čísla s speciálními racionálními čísly.

Jestliže máme k dispozici vyjádření reálných čísel ve formě desetinného rozvoje (ten může být zvolen konečný nebo periodický nekonečný pro každé číslo z $\mathbb{Q}$), lze již na úrovni střední školy ukázat nespočetnost $\mathbb{R}$ v podobě, kterou lze opět nalézt již u Cantora (jeho první důkaz však nevyužíval tzv. *diagonální metody*; viz dále Historické poznámky).

Lemma 1.4.31 (Cantor 1873). *$\mathbb{R}$ není spočetná množina.*

Důkaz. Budeme dokazovat sporem: předpokládejme, že $\mathbb{R}$ je spočetná množina. Pak je spočetná i její podmnožina $(0, 1)$. Seřaďme všechna $x \in (0, 1)$ do posloupnosti (užijeme horních indexů) $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$. Pak vyjádříme každé x^n jedním způsobem [9]) pomocí desetinného rozvoje x^n_k, $k = 0, 1, 2\ldots$, kde $x^n_0 := [x^n] = 0$ (celá část x^n) a x^n_k jsou číslice $0, 1, \ldots, 9$ desetinného rozvoje x^n; dolní index k říká, že x^n_k je číslice, která ve vyjádření x^n stojí na k-tém místě za desetinnou čárkou. Pak definujeme číslo $a = 0, a_1a_2a_3\ldots$ (a_i jsou opět číslice desetinného rozvoje a) tak, že je $a_k \ne x^k_k, k \in \mathbb{N}$ a $a_k \ne 9$. Zřejmě je tedy $a \ne x_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, což je spor s tím, že $\{x_n\}$ obsahuje jakožto členy *všechna* reálná čísla. Zde však používáme toho, že nalezený rozvoj je rozvojem nějakého reálného čísla, což dokážeme až v Kapitole 3. □

Poznámka 1.4.32. Tvrzení 1.4.27 ukazuje, jak lze konstruovat množiny se stále „většími mohutnostmi“. Množina A všech podmnožin $\mathbb{N}$ je nespočetná. Také $\mathbb{R}$ je nespočetná, označíme-li však c mohutnost $\mathbb{R}$, je $\#A=\#\mathbb{R}$. Poznamenejme však, že *nevíme*, zda každá nespočetná množina $B \subset \mathbb{R}$ má mohutnost c. Domněnka, že to platí, pochází od Riemanna a nazývá se *hypotéza kontinua*.

Příklad 1.4.33. Z Pythagorovy věty plyne, že délka úhlopříčky čtverce o délce strany 1 je $\sqrt{2}$, tedy číslo iracionální; toto se dokazuje již na střední škole a je to patrně jeden z prvních nepřímých důkazů, se kterým se žáci setkají. Standardní důkaz, založený na dělitelnosti, jen připomeneme: předpokládáme, že $\sqrt{2} = p/q$, kde $p, q \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná. Pak postupně z $p^2 = 2q^2$ dostaneme dělitelnost p dvěma, z ní i dělitelnost q dvěma, a to je potřebný spor. Podobně lze postupovat i v případě $\sqrt{p}$, kde p je prvočíslo.

Existuje i „geometrický důkaz“ iracionality $\sqrt{2}$ pomocí obrázku, který neuvádíme (viz např. [3], str. 9). Ten však vede k méně známému analytickému důkazu,

[9]) Později si ukážeme, že existují taková $x \in \mathbb{R}$, která mají *dva* různé desetinné rozvoje; to je však jediný typ nejednoznačného vyjádření. Viz Příklad 3.2.6.

který pro zajímavost uvedeme: vyjádříme $\sqrt{2} = p/q$ s nejmenším možným $q \in \mathbb{N}$, takže opět $p^2 = 2q^2$. Nyní položme

$$m = p - q\,, \quad n = 2q - p\,.$$

Zřejmě je $0 < q < p < 2q$, a tedy $0 < m < q$, avšak

$$n^2 = (2q-p)^2 = 4q^2 - 4pq + p^2 = 2q^2 - 4pq + 2p^2 = 2(p-q)^2 = 2m^2\,,$$

což dává spor s minimalitou q. Číslo $\sqrt{2}$ není „složité“, úsečku o délce $\sqrt{2}$ lze pravítkem a kružítkem snadno zkonstruovat. To však neplatí o všech iracionálních číslech (viz např. zmínka v Historickém úvodu).

1.5 Algebraická a transcendentní čísla

I obor iracionálních čísel se dále dělí. I když ne v detailech, přeci je nutné si něco říci o dalších významných podmnožinách $\mathbb{R}$. Mají přímou souvislost s možností konstrukce délek pravítkem a kružítkem.

Definice 1.5.1. Budeme říkat, že $x \in \mathbb{R}$ je *algebraické číslo*, jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$ a $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$ tak, že platí

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\,. \tag{1.14}$$

Říkáme, že x je algebraické číslo stupně n, je-li n nejmenší přirozené číslo, pro které x vyhovuje rovnici tvaru (1.14). Ta reálná čísla, která nejsou algebraická, nazýváme *transcendentní*. Jinými slovy, algebraická čísla jsou ta reálná čísla, která jsou kořeny nějakého polynomu s koeficienty ze $\mathbb{Z}$.

Poznámka 1.5.2. Tzv. *základní věta algebry* říká, že každý polynom stupně $n \geq 1$ má alespoň jeden (obecně komplexní) kořen. Z ní se snadno ukáže, že má nejvýše n kořenů, z nichž některé mohou splývat. Je-li $m \in \mathbb{N}$, je počet prvků množiny A_m všech kořenů polynomů s celými koeficienty tvaru (1.14), splňujících podmínku

$$n + \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq m\,,$$

konečný. Sjednocení těchto množin přes $m \in \mathbb{N}$ tvoří množinu všech algebraických čísel; ta je proto spočetná. Transcendentních čísel, která tvoří doplněk množiny všech algebraických čísel v nespočetné množině $\mathbb{R}$, je proto *nespočetně mnoho.* Dá se dokázat, že čísla π a e, se kterými se zakrátko seznámíme, jsou transcendentní; to však nedokážeme, neboť je to relativně náročné.

1.6 Speciální zobrazení

V dalších kapitolách budeme vyšetřovat některá velmi speciální zobrazení. Při práci s nimi si budete moci shora uvedené abstraktní pojmy na příkladech promýšlet. Zatím jsme poznali, co je to posloupnost prvků nějaké množiny.

Definice 1.6.1. Je-li $f : X \to Y$ a $Y \subset \mathbb{R}$, nazýváme f *reálná funkce*. Podobně je-li $f : X \to Y$ a $Y \subset \mathbb{C}$, nazýváme f *komplexní funkce*. Je-li navíc $X \subset \mathbb{R}$, nazýváme f reálná (komplexní) funkce *reálné proměnné*.

Poznámka 1.6.2. V některých knížkách je význam slova funkce širší a užívá se prakticky jako synonymum pro zobrazení.

Definice 1.6.3. Je-li $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, nazýváme f *posloupnost reálných čísel*, kratčeji jen *posloupnost* (toto je příklad další licence, kterou budeme užívat).

Úmluva 1.6.4. Někdy je užitečné pracovat s *konečnými posloupnostmi*, tj. zobrazeními tvaru $f : \{1, 2, \dots, n\} \to Y$. V tomto případě mluvíme o posloupnosti n prvků množiny Y. Pro snadnější vyjadřování je vhodné uzavřít tuto dohodu: není-li řečeno něco jiného nebo dokud se neumluvíme jinak, znamená posloupnost vždy nekonečnou (spočetnou) posloupnost reálných čísel ve smyslu předcházející definice a vše ostatní musíme explicitně vyjádřit podrobněji. Tomu budou přizpůsobeny i úmluvy o označení v následující kapitole.

Poznámka 1.6.5. Jelikož jsou posloupnosti a funkce speciálními zobrazeními, nemusíme např. zvlášť definovat, co je to *prostá funkce* nebo *prostá posloupnost*. Podobně není třeba definovat pojem *inverzní funkce*. Posloupnosti jsou navíc ještě speciálním případem funkcí. I když bychom mohli na tomto principu mnoho věcí udělat úsporněji, nebudeme se duplicitám striktně vyhýbat; opakováním se látka lépe zafixuje.

Příklad 1.6.6. Shrňme některé poznatky o inverzních funkcích. Je-li f prostá funkce a $f : D_f \overset{\text{na}}{\to} H_f$, pak pro inverzní funkci $g = f^{-1}$ platí $g : H_f \overset{\text{na}}{\to} D_f$. Dále zřejmě platí

$$(g \circ f)(x) = x, \quad x \in D_f, \qquad \text{a} \qquad (f \circ g)(y) = y, \quad y \in H_f\,, \tag{1.15}$$

a také $D_f = H_g$ a $D_g = H_f$. Kterýkoli z dvojice vztahů v (1.15) charakterizuje inverzní funkci g k funkci f. Má-li funkce f graf G_f, je $G_f \subset D_f \times H_f$. Je-li G_g graf funkce g, lze jednoduše popsat jejich vzájemný vztah. Platí

$$(a, b) \in G_f\,, \qquad \text{právě když} \qquad (b, a) \in G_g\,.$$

I v případě, že $f : D_f \to \mathbb{R}$ je prostá, není vždy jednoduché přesně vymezit H_f. Tato úloha je ekvivalentní s problémem, pro která $y \in \mathbb{R}$ je řešitelná rovnice $f(x) = y$.

Definice 1.6.7. Nechť $f : X \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, $A \subset X$ neprázdná množina. Jestliže je množina $f(A)$ omezená shora (zdola), budeme říkat, že *funkce f je omezená shora* (*zdola*) *na* (*množině*) *A*. Jestliže je množina $f(A)$ omezená, budeme říkat, že *funkce f je omezená na množině A*, nebo kratčeji pouze *f je omezená na A*.

Lemma 1.6.8. *Funkce $f : X \to \mathbb{R}$ je omezená na A, právě když existuje $M > 0$ tak, že platí*

$$|f(x)| \le M\,, \quad x \in A\,. \tag{1.16}$$

Důkaz. Je-li splněna podmínka (1.16), je $-M \le f(x) \le M$ pro každé $x \in A$ a tedy funkce f je omezená na A. Existují-li $K, L \in \mathbb{R}$ tak, že platí $K \le f(x) \le L$ pro každé $x \in A$, je též $-L \le -f(x) \le -K$ a

$$|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\} \le \max\{L, -K\}\,.$$

Stačí tedy položit $M = \max\{L, -K\}$ a jsme hotovi. □

Definice 1.6.9. Nechť f, g jsou reálné funkce definované na množině X. Potom *součet, rozdíl, součin a podíl* funkcí f, g jsou reálné funkce, které definujeme následovně:

$$\begin{aligned}(f \pm g)(x) &:= f(x) \pm g(x)\,, \quad x \in X\,,\\ (fg)(x) &:= f(x) \cdot g(x)\,, \quad x \in X\,,\\ (f/g)(x) &:= f(x)/g(x)\,, \quad x \in \{y \in X; g(y) \neq 0\}\,.\end{aligned}$$

(Pokud se vyskytují ve vztahu znamení $\pm$ a $\mp$, čtou se v nich současně pouze horní nebo dolní znaménka.) Někdy se říká, že tyto operace jsou definovány „bod po bodu“, nebo kratčeji *bodově*. Dále jsou operace s funkcemi vždy chápány právě v tomto smyslu.

Poznámka 1.6.10. Snadno si rozmyslíte, jak se definuje násobek funkce číslem $c \in \mathbb{R}$: je $(cf)(x) := cf(x)$. Vzhledem ke sčítání funkcí z předcházející definice a takto definovanému násobení reálnými čísly tvoří množina všech reálných funkcí definovaných na X *lineární prostor* (v algebře se častěji užívá ekvivalentního názvu *vektorový prostor*) nad polem reálných čísel. Podobně (ve zřejmém smyslu) tvoří i všechny posloupnosti reálných čísel lineární prostor, který se značívá s. Tento prostor s je jednoduchým příkladem prostoru, který nemá konečnou dimenzi. Snadno zjistíte, že systém všech posloupností s vesměs nulovými členy kromě jediného, který je roven 1, je lineárně nezávislý. Definici lineárního prostoru explicitně nepřipomínáme; znalostí z algebry budeme dále velmi často využívat, aniž bychom je podrobněji vysvětlovali.

Historické poznámky 1.6.11. S ohledem na roli této kapitoly o základech, na nichž dále vše ostatní budujeme, je příslušná historická pasáž obsažnější než u následujících kapitol.

Teorie množin dnes tvoří samostatnou matematickou disciplínu. Jejím tvůrcem je Georg Cantor (1845 – 1918), od něhož pochází pojem *množiny.* Zásadní práce z této oblasti publikoval v letech 1895 a 1897. Později se seznámíme i s dalšími poznatky, které od něj pocházejí. Je zajímavé, že Cantorovým motivem pro práci s množinami nebyla potřeba pouze něco zobecnit, nýbrž hlubší studium konvergence trigonometrických řad. Metodám, které jsme použili pro důkaz Lemmatu 1.4.23 a Lemmatu 1.4.31, se říká často

Cantorova diagonální metoda (CDM). Pro odlišení se metoda důkazu Lemmatu 1.4.23 někdy nazývá „první“ CDM a metoda důkazu Lemmatu 1.4.31 „druhá“ CDM. V Kapitole 2 dokážeme tzv. Cantorovu větu o vložených intervalech. Tu Cantor použil k prvému důkazu nespočetnosti $\mathbb{R}$. Viz Historické poznámky 2.4.24.

V české matematické literatuře staršího data nalezneme pro množinu název *množství*, nynější termín se pravděpodobně ustálil vlivem EDUARDA ČECHA (1893 – 1960); poprvé ho patrně užil MATYÁŠ LERCH (1860 – 1922). Spolu se *základy logiky* tvoří elementární poznatky z teorie množin nezbytný základ našich dalších úvah, zde se však omezujeme převážně na zvládnutí základního aparátu a jazyka, kterým se budeme domlouvat.

Podrobnější komentář si dále zaslouží *reálná čísla*. Některá *iracionální čísla* se ve formě *nesouměřitelných veličin* objevila již v 5. stol. před n. l. Z té doby pochází např. poznatek, že délky strany a úhlopříčky čtverce jsou nesouměřitelné, tj. že jejich poměr není vyjádřen *racionálním číslem*. Objev vedl k rozsáhlé krizi v matematice, kterou matematici starého Řecka dokázali řešit jen poměrně nedokonalým způsobem. Čísly byla pro ně totiž pouze čísla přirozená, resp. racionální (souměřitelné veličiny) a vedle nich existovaly délky, pomocí těchto čísel nevyjádřitelné. Ty bylo možné graficky, tj. pomocí již tehdy známých geometrických konstrukcí, sestrojit a s nimi jako s čísly i pracovat. Podobně se pracovalo i s obsahy rovinných obrazců a dalšími geometrickými veličinami. Jen tak bylo možné s některými výrazy s odmocninami zacházet. Objasnění tehdejší značné přesnosti výpočtu čísla $\sqrt{2}$ je složitější, uvedené přiblížení je přepisem vyjádření v „šedesátkové“ soustavě, které se objevuje u Babyloňanů; viz [5], str. 21 a Historické poznámky v další kapitole.

Teoretický základ práce s iracionálními čísly tak sahá zpět až do 5. stol. před n. l. K čelným průkopníkům této teorie patřil EUDOXOS Z KNIDU (asi 408 – asi 355 před n. l.). Byl žákem PLATONOVÝM (427 – 347 před n. l.). Patřil k nejlepším astronomům své doby. S astronomií se seznámil v Egyptě u egyptských kněží, proslul však též jako lékař a filosof. Jeho dílo se nám v písemné podobě nezachovalo, všeobecně se však soudí, že řadu poznatků od něj převzal Eukleides.

Eukleidova *Elementa* (Základy, řecky Stoicheia) se skládají ze 13 částí. Běžně se označují jako knihy. Elementa patří k nejvýznačnějším matematickým dílům starověku. Po Eukleidovi je nazvána řada pojmů a poznatků (Eukleidovy věty, eukleidovský prostor apod.). O jeho životě mnoho nevíme; pracoval v Alexandrii za vlády Ptolemaia I. (asi 366 – asi 283 před n. l.), který byl po smrti Alexandra Velikého (365 – 323 před n. l.) správcem Egypta. V Knize V. Základů nalezneme např. formulace následujícího typu: Jsou-li a, b geometrické veličiny téže povahy (tj. obě jsou délky nebo obsahy či objemy), pak pro stejné veličiny c, d platí $a : b > c : d$, právě když existují čísla (rozumí se přirozená) m, n taková, že $na > mb$ a $nc \leq md$. Rovnost $a : b = c : d$ platí, pakliže není $a : b$ větší či menší než $c : d$. Na takovém teoretickém základě jsou vytvářeny další elementární poznatky.

Infinitezimální počet, jehož výkladu se budeme dále podrobně věnovat, byl budován na základě značně mlhavých představ o reálných číslech, založených na jejich znázornění přímkou (reálnou osou). Vzniku infinitezimálního počtu předcházelo budování analytické geometrie. Z pohledu tvůrců, ke kterým počítáme PIERRA DE FERMAT (1601 – 1665) a RENÉ DESCARTA (1596 – 1650), nepředstavovalo zacházení s iracionálními čísly žádný vážný problém. A tak k přesnému budování teorie reálných čísel došlo mnohem později, ve druhé polovině 19. století. Na počátku tohoto vývoje stál v Čechách žijící a pracující matematik a filozof BERNARD BOLZANO (1781 – 1848). V mnohém předběhl svoji dobu a propracoval se až k základům teorie množin i teorie reálných čísel; velmi málo však ovlivnil své současníky, neboť jako katolický kněz byl pro své progresívní názory perzekvován a prožil podstatnou část života v izolaci. S jeho jménem se mnohokrát setkáme. Poznamenejme, že spolu Cauchym patřil Bolzano k prvním matematikům důsledně užívajícím kvantifikátory.

Analytická definice reálných čísel, oproštěná od geometrického názoru, pochází teprve z r. 1872. V tutéž dobu se objevilo více řešení tohoto po staletí zrajícího problému. Podali je nezávisle již dříve zmíněný Cantor a dále JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND (1831 – 1916), EDUARD HEINRICH HEINE (1821 – 1881), CHARLES ROBERT MÉRAY (1835 – 1911). Cantor založil svoji teorii na „cauchyovských posloupnostech“ (viz dále), Dedekind na pojmu *řezů* množiny racionálních čísel. Takovým řezem v $\mathbb{Q}$ je v podstatě například množina v (1.12) (spolu se svým komplementem v $\mathbb{Q}$).

Axiomatizace reálných čísel je záležitostí pozdější, za otce moderního axiomatického přístupu v matematice lze považovat DAVIDA HILBERTA (1862 – 1943). Korektní odvození všech vlastností $\mathbb{R}$ ze soustavy axiómů provedl např. EDMUND LANDAU (1877 – 1938) v knize z r. 1930. On sám napsal, že je to v některých partiích „namáhavá nuda“. Pro nás je zajímavé i to, že u něj pracoval VOJTĚCH JARNÍK (1897 – 1970), v jehož učebnici [8] lze nalézt tuto partii pomocí řezů zpracovánu podrobněji.

Popsaný systém axiómů pro $\mathbb{R}$ rozhodně není nezávislý, některé lze ze zbývajících odvodit. Je přirozené se ptát, je-li jimi systém $\mathbb{R}$ jednoznačně určen. Pozitivní odpověď na tuto otázku jsme již naznačili: jde o jednoznačnost „až na izomorfismus“.

Zmiňme se krátce o historii některých konkrétních poznatků z této kapitoly. Axiomatiku přirozených čísel vytvořili zmíněný Dedekind a GIUSEPPE PEANO (1858 – 1932). ARCHIMEDES (283 – 212 před n. l.) uvádí vlastnost popsanou v Tvrzení 1.3.33 v jedné práci (v lehce odlišné podobě) jako axióm. Později dostala jeho jméno, někdy však tato vlastnost bývá spojována s EUDOXEM (asi 406 – asi 355 před n. l.); Archimedes se na něj odvolává.

Pojem pole se objevuje poprvé patrně u Dedekinda. Označení pro absolutní hodnotu ve tvaru $|x|$, stejně jako název, pocházejí z roku 1859, kdy je použil Cantorův učitel CARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815 – 1897). Spočetnost množiny racionálních čísel dokázal Cantor v r. 1873. Současně dokázal i nespočetnost $\mathbb{R}$. Poznamenejme, že k zastáncům teorie množin patřili např. Dedekind a Weierstrass, mezi její zásadní odpůrce pak LEOPOLD KRONECKER (1823 – 1891). Tomu se připisuje výrok: *Přirozená čísla vytvořil náš milý Bůh, vše ostatní je dílem člověka.* Z již zmíněných českých matematiků patřil ke Cantorovým propagátorům Lerch.

Značný zájem matematiků po mnoho století přitahovaly problémy *konstruovatelnosti.* Tak např. konstrukce pravidelného pětiúhelníka byla známa již Eukleidovi, avšak teprve CARL FRIEDRICH GAUSS (1777 –1855) dokázal v jedné z prvních prací r. 1801 konstruovatelnost pravidelného 17-tiúhelníka (a některých obecnějších pravidelných mnohoúhelníků). Podstatného pokroku v oblasti konstruovatelnosti dosáhl EVARISTE GALOIS (1811 – 1832), z jehož výsledků mj. vyplývá neřešitelnost problémů trisekce úhlu a zdvojení krychle, ne však *kvadratury kruhu.* První *dostatečně rigorózní* důkaz neřešitelnosti problému zdvojení krychle však podal až PIERRE WANTZEL (1814 – 1848) v r. 1837. Ten rovněž ukázal, že pravítkem a kružítkem je trisekce úhlu o velikosti $\pi/3$ neřešitelná.

Patrně nejznámějším dlouho neřešeným problémem byl problém konstruktivního řešení kvadratury kruhu, o kterém jsme se zmínili již v Úvodu. Pokusme se nyní vágní formulaci o konstruovatelnosti pravítkem a kružítkem zpřesnit, např. pro problém rektifikovatelnosti. Nechť M_n jsou množiny, sestávající se z bodů splňujících následující požadavky:

(1) Množina M_0 obsahuje body A, B o vzdálenosti $|AB| = 1$.

(2) Při n-tém kroku narýsujeme všechny různé přímky spojující body z M_{n-1} a všechny různé kružnice, které mají střed v M_{n-1} a poloměr rovný vzdálenosti nějakých dvou bodů z M_{n-1}.

(3) Množina M_n je sjednocení M_{n-1} s množinou všech průsečíků přímek a kružnic narýsovaných v n-tém kroku.

Potom pro žádné $n \in \mathbb{N}_0$ neobsahuje M_n dvojici bodů X, Y s vlastností $|XY| = \pi$.

Kořeny užívané terminologie sahají do doby překladů řeckých pramenů do latiny. Martianus Capella asi kolem r. 470 n.l užíval při překladu slova *irrationabilis*, zatím co Cassiodorus (475 – 570) použil slov *rationalis* a *irrationalis*. Slova *algebraická* a *transcendentní* se objevují u Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646 – 1716) prokazatelně již r. 1682 v souvislosti s křivkami. O číslech π a e, se kterými se čtenář patrně již setkal, se ví, že jsou transcendentní. Iracionalitu e si později dokážeme, iracionalitu π dokázal teprve r. 1767 Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777). Transcendentní čísla jsou relativně náročným pojmem. Jejich existenci dokázal až r. 1844 Joseph Liouville (1809 - 1882) a právě v roce jeho úmrtí dokázal Ferdinand Lindenmann (1852 – 1939) transcendenci π; tak byl definitivně vyřešen problém kvadratury kruhu. Liouvillův příklad transcendentních čísel je založen na součtech tvaru $\sum a_k/10^{k!}$, kde a_k jsou přirozená čísla, $1 \leq a_k \leq 9$. Transcendentní čísla se nedají zkonstruovat ve smyslu výše uvedeného popisu, některá algebraická čísla (ne všechna!) však takto zkonstruovat lze. Později se setkáme s reálnými čísly definovanými pomocí součtu řady, o nichž dokonce dodnes není známo, zda jsou racionální či iracionální.

Binomická věta a binomické koeficienty [10]) jsou velmi dávného původu. Binomická čísla se objevila v Indii již ve 2. stol. před n. l. a později u různých autorů. Mezi nimi byl i Michael Stifel (asi 1487 – 1567), u kterého se vyskytly v práci z r. 1544. Binomickou větu doprovázenou známým *Pascalovým trojúhelníkem* uvádí Blaise Pascal (1623 – 1662) v práci z r. 1654. Odtud pochází standardně užívané jméno. Binomická věta se poprvé objevuje r. 1303 u Chu Shin-Chieha, v tištěné podobě je známa z r. 1527 z knihy, kterou napsal Peter Apian (1495 – 1527). V poslední Kapitole 16 budou vyšetřována tzv. *Bernoulliho čísla*. Pokud bychom chtěli nezávisle na tam uvedených výsledcích odvodit vzorce pro součty p-tých mocnin prvních n přirozených čísel, lze k tomu využít modifikovaný Pascalův trojúhelník; viz [12], str. 52.

Důležitou Bernoulliho nerovnost z Poznámky 1.3.24 dokázal dříve v r. 1670 Newtonův učitel Isaac Barow (1630 – 1677). Patrně zcela nezávisle ji objevil Jacob Bernoulli (1654 – 1705); uveřejnil ji až v r. 1689. Po něm je také obvykle nazývána.

Aritmetický, geometrický a harmonický průměr byly zkoumány již pythagorejci. Je známo, že nerovnost z Lemmatu 1.3.28 (AG-nerovnost) byla v geometrické podobě pro $n = 2$ známa již ve starověku. Pro libovolná $n \in \mathbb{N}$ ji r. 1729 patrně jako první dokázal Colin Maclaurin (1698 – 1746). Nejznámější její důkaz pochází od Cauchyho z r. 1821; někdy proto bývá nazývána Cauchyho nerovnost. V jedné moderní knize o nerovnostech, kterou napsali Beckenbach a Bellman, je možno nalézt 12 odlišných důkazů této nerovnosti. Také klasická kniha [6] uvádí řadu důkazů tohoto tvrzení a

[10]) Též někdy *kombinační čísla*.

historických poznámek o jejich původu. Poznamenejme, že řadu tvrzení, která budeme dále dokazovat, lze dokázat často jak z Bernoulliho nerovnosti, tak i z AG-nerovnosti. Je zajímavé, že se u nás tyto nerovnosti na středních školách v posledních desetiletích často opomíjejí, ač představují krásné a velmi užitečné příklady pro důkaz matematickou indukcí.

Literatura:

[1] Balcar, B., Štěpánek, P.: *Teorie množin*, Academia, Praha, 1984.

[2] Blažek, J., Calda, E., Koman M., Kussová B.: *Algebra a teoretická aritmetika*, SPN, Praha, 1983.

[3] Browder, A.: *Mathematical analysis. An introduction*, Springer, New York, Berlin, 1996.

[4] Eukleides: *Základy* (*Stoicheia*), Praha, 1907, (přeložil František Servít).

[5] Hairer, E., Wanner, G.: *Analysis by its history*, Springer, New York, 1996.

[6] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[7] Herman, J., Kučera, R., Šimša, J.: *Metody řešení matematických úloh I*, Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Brno, 1996.

[8] Jarník, V.: *Diferenciální počet I*, Academia, Nakladatelství ČSAV, 1963.

[9] Rokyta, M.: *Bernoulliova nerovnost pro* $x < -1$, Rozhledy mat.-fyz. **77** (1999), str. 49 – 56.

[10] Schwabik, S.: *Několik postřehů k vývoji matematické analýzy*, obsaženo v: *Matematika v 19. století*, str. 7 – 37, Prometheus, Praha, 1996.

[11] Tarski, A.: *Úvod do logiky a metodologie deduktivních věd*, Academia, Praha, 1966, (překlad 3. anglického vydání).

[12] Veselý, J.: *Poznámky k historii funkce gama*, obsaženo v: *Člověk – Umění – Matematika*, str. 49 – 72, Prometheus, Praha, 1996.

[13] Walter, W.: *Analysis I*, Springer, Berlin, 1992, (3. přepracované vydání).

Kapitola 2

Posloupnosti

V této části jsou vyloženy *základní poznatky* o posloupnostech, k jejich dalšímu studiu se ještě vrátíme. V následující kapitole těchto poznatků využijeme k zobecnění součtů na případ nekonečně mnoha sčítanců, tj. k výkladu základů teorie řad. V ní nalezne čtenář i nejjednodušší přirozenou aplikaci poznatků z Kapitoly 2.

2.1 Základní pojmy

Při práci s posloupnostmi je zvykem užívat vžitá označení, ta se však mohou v detailech lišit. Posloupnost prvků množiny A je zobrazení f množiny $\mathbb{N}$ do množiny A. Označení $n \mapsto f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, je naprosto korektní, ale téměř výlučně se setkáte s tím, že se posloupnosti popisují poněkud odlišně: píšeme a_n místo $f(n)$ a místo f symbol $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Připomeňme definici posloupnosti; srovnej s již dříve uvedenou Definicí 1.6.3.

Definice 2.1.1. Je-li každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazeno číslo $a_n \in \mathbb{R}$, pak toto zobrazení nazýváme *posloupnost reálných čísel*, kratčeji jen *posloupnost.* Čísla a_n nazýváme *členy*, nebo *prvky* posloupnosti (někdy o a_n hovoříme jako o n-tém členu posloupnosti). Pro zápis posloupnosti budeme užívat symbolů

$$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}\,, \qquad \text{nebo} \qquad \{a_k\}_1^{\infty}\,, \qquad \text{nebo} \qquad \{a_k\}\,.$$

Poznámka 2.1.2. Ve středoškolských učebnicích se často setkáte s označením posloupnosti (a_n) kulatými závorkami místo složených; k indexování budeme zpravidla používat písmen k, m, n, l; někdy se volí i jiný typ písma, aby nedocházelo k záměně mezi „el“ a „jedničkou“, my to však dělat nebudeme.

K zápisu posloupností se někdy užívá poněkud vágní označení. Tak např. v případě $a_n = 2n/(n+3), n \in \mathbb{N}$ se posloupnost $\{a_n\}$ zapíše ve tvaru

$$\left\{\frac{2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{6}, \frac{8}{7}, \dots\right\}.$$

Je třeba mít na vědomí, že *obecně* pouhý výčet prvních k členů posloupnosti $\{a_n\}$ neurčuje *bez dodatečné informace* členy $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$. A tak zápis $\{0, 0, 0, \ldots\}$ může popisovat nulovou posloupnost $a_n = 0, n \in \mathbb{N}$, stejně jako posloupnost $a_n = (n-5)^+$, $n \in \mathbb{N}$, která má rovněž několik (v tomto případě 5) prvních členů rovných 0 (užíváme označení z Poznámky 1.3.16).

V praxi bývají často výsledkem měření posloupnosti číselných údajů, které však jsou ze zřejmých důvodů *konečné*. Pro získání lepší představy o vývoji určitých dat (kurz dolaru, denní teploty, denní záznamy o procentu škodlivin v ovzduší apod.) se k jejich znázornění používají různé typy grafů, které nám však příliš mnoho nepomohou, neboť nás budou zajímat především nekonečné posloupnosti a jejich chování „u nekonečna". Jak jsme se již domluvili, bude-li řeč o konečné posloupnosti, bude to muset být explicitně řečeno a také vyznačeno, např. tak, že budeme psát $\{a_k\}_{k=1}^n$.

Poznámka 2.1.3. V případě, že pro konečný počet $n \in \mathbb{N}$ není a_n definováno, dostaneme vynecháním *konečně mnoha prvků* objekt podobný posloupnosti:

$$n \mapsto a_n\,, \qquad n \geq k\,,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

který zapisujeme pomocí symbolu $\{a_n\}_{n=k}^\infty$. Definičním oborem tohoto zobrazení není $\mathbb{N}$, ale $\{n \in \mathbb{N};\ n \geq k\}$. Mohli bychom vždy přejít k posloupnosti $\{a_{n+k-1}\}_{n=1}^\infty$, bylo by to však těžkopádné a také zbytečné. Později se budeme zabývat obecnějšími posloupnostmi, které vzniknou z dané posloupnosti vynecháním členů; viz Definice 2.4.3. Zajímají nás převážně vlastnosti posloupností, které se na takto vzniklé posloupnosti z původní posloupnosti přenesou, tj. např. vlastnosti, které „nezávisejí na konečně mnoha prvcích".

Aparát, který chceme popsat, nám má umožnit zpřesnit představu o tom, že se prvky nějaké posloupnosti $\{a_n\}$ „blíží" nějakému číslu $a \in \mathbb{R}$. Idea je jednoduchá: „$\{a_n\}$ se blíží a", resp. „limita $\{a_n\}$ je a" se vyjádří takto: zvolíme-li jakkoli interval $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ tak, aby platilo $a \in (\alpha, \beta)$, musí vždy všechny členy a_n, $n \in \mathbb{N}$, *až na konečný počet* ležet v intervalu (α, β).

I když jde již o značně přesnější představu, než je ta, se kterou jsme se seznámili v historickém úvodu, musíme jí dát přesnější tvar a také ještě popsat, kdy se eventuálně posloupnost „blíží k nekonečnu". Jde o úkol vcelku jednoduchý, jehož realizace se opírá o *měření vzdáleností* a o představu, že se musíme starat především o „malá" okolí (v matematice nemají slova „velký" či „malý" rozumný smysl, byť je někdy užíváme).

Definice 2.1.4. Je-li dáno $\varepsilon > 0$, pak množinu všech řešení nerovnic

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\,. \tag{2.1}$$

nazýváme *ε-okolím bodu a* (čteme „epsilonovým okolím bodu a") a používáme pro ni symbol $\mathcal{U}(a, \varepsilon)$, resp. $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$.

Poznámka 2.1.5. Geometrická interpretace je zřejmá. Okolí $\mathcal{U}(a, \varepsilon)$ je tvořeno právě všemi body $y \in \mathbb{R}$, které jsou od bodu a vzdáleny méně než o ε. Používáme přirozeným způsobem geometrické představy a hovoříme o čísle a jako o bodu; není to nic špatného, pomáhá nám to lépe některým pojmům rozumět. Reálná čísla si představujeme jako body přímky (číselné osy), na ní měříme vzdálenosti atp. Nyní již můžeme přistoupit k definici limity posloupnosti $\{a_n\}$, která přesněji popisuje „přibližování prvků posloupnosti" k nějakému bodu $a \in \mathbb{R}$. Srovnej s [6].

Definice 2.1.6 (d'Alembert 1765, Cauchy 1821*). Říkáme, že číslo $a \in \mathbb{R}$ je *limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $k \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq k$ je

$$|a_n - a| < \varepsilon\,.$$

Píšeme pak $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, nebo $a_n \to a$, nebo jen kratčeji, není-li nebezpečí z nedorozumění, $\lim a_n = a$.

Definice 2.1.7 (Symbolický přepis). Jelikož jde o základní pojem, musíme mu důkladně rozumět. Zapišme proto definici pomocí logických symbolů:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(|a_n - a| < \varepsilon)\,.$$

Protože čísel $1, 2, \ldots, k-1 \in \mathbb{N}$ je jen *konečně mnoho*, tvrdíme cosi o všech a_n s výjimkou konečně mnoha a_n (říkáme: „až na konečně mnoho").

Poznámky 2.1.8. 1. Jde o složitější pojem, pochopení významu sledu *tří* kvantifikátorů je náročnější. Často je to právě přechod od dvou ke třem kvantifikátorům, který se může stát téměř nepřekonatelnou překážkou k pochopení další látky; čtenář by mu měl proto věnovat velkou pozornost.

2. Budeme užívat spojení „pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$" v tomto smyslu: *výrok $V(n)$ platí pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$*, pokud množina $\{n \in \mathbb{N}\,; V(n) \text{ neplatí}\}$ je *konečná.* To lze jinak pomocí kvantifikátorů vyjádřit tak, že

$$(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(V(n) \text{ platí})\,.$$

V zápisu lze užít i zkratky *pro s.v. n*. Definice limity tedy říká, že pro každé $\varepsilon > 0$ platí nerovnost $|a_n - a| < \varepsilon$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

3. Při $a_n \to a \in \mathbb{R}$ říkáme, že $\{a_n\}$ *konverguje* k a. Říkáme také, že $\{a_n\}$ *je konvergentní*, nebo že $\{a_n\}$ *konverguje.* Přesněji: Posloupnost $\{a_n\}$ konverguje, existuje-li $a \in \mathbb{R}$ tak, že $\lim a_n = a$. V této souvislosti užíváme též pojmu *vlastní limita*, který vyjadřuje, že $a \in \mathbb{R}$. Smysl této terminologie bude jasnější později až pojem limity ještě zobecníme. Ve všech ostatních případech říkáme, že $\{a_n\}$ *je divergentní* nebo že $\{a_n\}$ *diverguje.*

4. Rozmyslete si, že pro $a \in \mathbb{R}$ platí

$$a_n \to a\,, \qquad \text{právě když} \qquad a_n - a \to 0\,.$$

5. Později zavedeme i tzv. *nevlastní limity*, tj. budeme definovat, co znamená i $a_n \to +\infty$, $a_n \to -\infty$. V tom případě říkáme např. „a_n diverguje k plus nekonečnu" apod. Symbol ∞ zavedl r. 1655 John Wallis (1616 – 1703), příslušnou definici podal r. 1821 Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857).

Lemma 2.1.9. *Pokud je* $\lim a_n = a$*, je tato limita určena* jednoznačně.

Důkaz. Předpokládejme, že existují dvě různé limity

$$\lim a_n = a\,, \qquad \lim a_n = b\,, \qquad a < b\,.$$

Potom k $\varepsilon = (b-a)/3$ leží skoro všechna a_n v $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ a také skoro všechna a_n v $\mathcal{U}_\varepsilon(b)$. Skoro všechna a_n leží tedy v průniku okolí $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ a $\mathcal{U}_\varepsilon(b)$, avšak tato množina je prázdná! Nalezený spor ukazuje, že musí platit $a = b$. □

Poznámka 2.1.10. Pokud někdy okamžitě tvrzení či důkaz nechápete, nezbývá než se zamyslet a eventuálně si to, co se tvrdí, rozepsat. Např. v předcházejícím Lemmatu 2.1.9 ke zvolenému ε pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon\,,$$

ale to je spor, protože pro *žádné* reálné číslo a_n nemůže platit $a_n < a_n$.

Poznámka 2.1.11. S podobnou situací, jakou popisuje Definice 2.1.6, jste se již setkali jistě dříve. Na střední škole, např. při výkladu o $\sqrt{2}$, se hledají nějaká „přiblížení" této hodnoty (např. pomocí kalkulačky) typu

$$\begin{aligned} 1 \le \sqrt{2} \le 2\,, &\quad \text{protože} \quad 1^2 \le 2 \le 2^2\,,\\ 1,4 \le \sqrt{2} \le 1,5\,, &\quad \text{protože} \quad (1,4)^2 \le 2 \le (1,5)^2\,, \ldots\,. \end{aligned}$$

Takto lze sestrojit dvě posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ postupně stále přesnějších přiblížení hodnoty $\sqrt{2}$, mezi jejichž prvky s týmž indexem n je $\sqrt{2}$ stále „těsněji" sevřena. Intervaly $[\,a_n, b_n\,]$ jsou do sebe vloženy, neboť je

$$[\,a_{n+1}, b_{n+1}\,] \subset [\,a_n, b_n\,]\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Zvláštní chování těchto posloupností nás inspiruje k definici rostoucí, resp. klesající posloupnosti, či poněkud obecněji neklesající a nerostoucí posloupnosti.

Definice 2.1.12. Jestliže pro posloupnost $\{a_n\}$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $a_n \ge a_{n+1}$, nazývá se tato posloupnost *nerostoucí*; platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $a_n \le a_{n+1}$, nazývá se tato posloupnost *neklesající*. Posloupnost, která je nerostoucí nebo neklesající, se nazývá *monotónní*.

Podobně jestliže pro posloupnost $\{a_n\}$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $a_n > a_{n+1}$, nazývá se tato posloupnost *klesající*; platí-li pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $a_n < a_{n+1}$, nazývá se tato posloupnost *rostoucí*.

Jestliže je posloupnost $\{a_n\}$ zároveň nerostoucí a neklesající, tj. pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = a_{n+1}$, je $\{a_n\}$ *konstantní* posloupnost.

Poznámky 2.1.13. 1. Je přirozené položit si otázku, zda vůbec nějaká posloupnost limitu má. Zřejmě např. *konstantní posloupnost* $\{a_n\}$, pro niž $a_n := a$, má limitu a, neboť

$$|\,a_n - a\,| = |\,a - a\,| = 0 < \varepsilon$$

pro každé $\varepsilon > 0$ a všechna $n \in \mathbb{N}$, tedy za k lze volit 1 nezávisle na volbě ε.

2. Vyšetřeme posloupnost z Poznámky 2.1.2. S ohledem na rovnosti

$$a_n = \frac{2n}{n+3} = 2 - \frac{6}{n+3}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{platí} \quad |a_n - 2| = \frac{6}{n+3} < \varepsilon$$

pro libovolně zvolené kladné $\varepsilon > 0$, jakmile platí $n \geq k > (6 - 3\varepsilon)/\varepsilon$; posloupnost o členech $6/(n+3)$ je totiž zřejmě klesající. Pro $\varepsilon = 10^{-2}$ stačí např. volit $k = 598$. V tomto případě číslo k již závisí na volbě ε. Dokázali jsme z definice, že platí $\lim_{n\to\infty} 2n/(n+3) = 2$. Všimněte si užití Archimedova axiómu.

Ze střední školy čtenář patrně zná aritmetické a geometrické posloupnosti. Ty lze zavést např. následujícím způsobem:

Definice 2.1.14. Existuje-li $d \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n + d\,, \tag{2.2}$$

říkáme, že $\{a_n\}$ je *aritmetická posloupnost*, jejíž *diference* je d. Podobně existuje-li $q \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = q\,a_n\,, \tag{2.3}$$

říkáme, že $\{a_n\}$ je *geometrická posloupnost* s *kvocientem* q.

Poznámka 2.1.15. Snadno si rozmyslíme, že vztahy (2.2) a (2.3) při daném d či q neurčují aritmetickou či geometrickou posloupnost jednoznačně.

Teprve předepsáním hodnoty a_1 jsou příslušné posloupnosti určeny jednoznačně. Obě posloupnosti jsou speciálním případem *rekurentně určených* posloupností. V těchto posloupnostech je n-tý člen určen pomocí hodnot jednoho či několika členů, které mu předcházejí, pomocí tzv. *rekurence.* To znamená, že je dáno $k \in \mathbb{N}$ a zobrazení f tak, že platí $a_{n+k+1} = f(a_{n+1}, \ldots, a_{n+k})$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Aby byla posloupnost rekurencí jednoznačně určena, je nutno hodnoty členů $a_1, \ldots, a_k$ zadat ve formě počátečních podmínek.

Všimněte si ještě, že v aritmetické posloupnosti je n-tý člen *aritmetickým průměrem* sousedních členů, tj. platí

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Podobné tvrzení lze zformulovat (s trochou opatrnosti) i pro geometrické posloupnosti; musíme se např. omezit na posloupnosti s nezápornými členy. Pak platí

$$a_n = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}\,, \quad n = 2, 3, \ldots\,,$$

tj. a_n je *geometrickým průměrem* sousedních členů. Zde mlčky předpokládáme, že čtenář ví ze střední školy, co je to (druhá) odmocnina. K její definici se dostaneme později. Poznamenejme ještě, že pro $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, platí

$$a_n = \frac{2a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n-1} + a_{n+1}}\,, \quad n = 2, 3, \dots\,,$$

tj. v této posloupnosti je každý člen *harmonickým průměrem* obou „sousedních“ členů.

Cvičení 2.1.16. Je-li $\{a_n\}$ aritmetická posloupnost s diferencí d, platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Podobně pro geometrickou posloupnost s kvocientem q platí

$$a_n = a_1 q^{n-1}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Dokažte.

Poznámka 2.1.17. Je užitečné již teď říci, jak budeme postupovat v další kapitole. Budeme definovat význam *symbolu* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kde a_k jsou členy posloupnosti $\{a_k\}$, tedy „nekonečný součet“. Pro posloupnost reálných čísel $\{a_k\}$ nejprve definujeme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \quad n \in \mathbb{N}\,;$$

takto definovaná čísla s_n nazýváme *částečné součty* řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Jestliže dále platí $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, tj. existuje limita $\{s_n\}$, pak říkáme, že *řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje* k s (má součet s).

Poznámka 2.1.18. K významným středověkým matematikům patří též LEONARDO Z PISY (1180 – 1240), známější pod jménem *Fibonacci*. V r. 1202 vydal knihu *Liber Abaci*, v níž se vyskytuje problém o růstu králičí populace. Ten vede na posloupnost popsanou rekurencí

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots \tag{2.4}$$

s počáteční podmínkou $a_1 = a_2 = 1$. Položme ještě $a_0 = 0$. Členy této posloupnosti se nazývají *Fibonacciho čísla*. Lze tuto posloupnost popsat jinak, tj. najít vzorec pro její n-tý člen?

Budeme tuto posloupnost vyhovující vztahu (2.4) (počáteční podmínku, která spolu s (2.4) určuje posloupnost jednoznačně, nebudeme zatím uvažovat) hledat ve tvaru geometrické posloupnosti. Položme $a_n = x^n$; z (2.4) dostáváme rovnice

$$x^{n+1} = x^n + x^{n-1}\,, \quad \text{resp.} \quad x^2 = x + 1\,.$$

Poslední rovnice má za kořeny čísla g a g', se kterými jsme se setkali v úvodní kapitole (viz zlatý řez). Snadno nahlédneme, že posloupnosti $\{g^n\}$ a $\{(g')^n\}$ vyhovují rekurenci (2.4). Tutéž vlastnost má i posloupnost

$$\{ag^n + b(g')^n\}$$

s libovolně zvolenými $a, b \in \mathbb{R}$. Položíme-li nyní $a_0 = a + b = 0$, $a_1 = ag + bg' = 1$, snadno určíme $a = -b = 1/\sqrt{5} = 1/(g - g')$. Odtud dostaneme tzv. *Binetovu formuli* pro Fibonacciho čísla (značívají se F_n)

$$F_n = \frac{g^n - (g')^n}{g - g'} = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}},$$

kterou (znovu)objevil [1]) v 19. stol. francouzský matematik JACQUES–PHILIPP–MARIE BINET (1786 – 1856); když je již formule známá, lze její platnost dokazovat i matematickou indukcí. Toto je jedna *z mnoha* překvapivých souvislostí zlatého řezu s něčím zdánlivě velmi odlehlým.

Bez dalších informací o posloupnostech by se nám řešily i základní problémy jen velmi obtížně. Proto si vytvoříme potřebné „teoretické zázemí“.

Věta 2.1.19. *Neklesající shora omezená posloupnost reálných čísel má limitu a platí*

$$\lim a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Důkaz. Protože platí $a := \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takový člen posloupnosti a_k, že

$$a - \varepsilon < a_k \le a.$$

Posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající, platí proto tato nerovnost i pro indexy $k+1$, $k+2, \dots$ a zřejmě platí $a - \varepsilon < a_n \le a < a + \varepsilon$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ (všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \ge k$). $\square$

Poznámka 2.1.20. Analogicky se dokáže obdobné tvrzení pro nerostoucí zdola omezenou posloupnost a infimum.

Připomeňme, že všechny posloupnosti reálných čísel tvoří lineární prostor (viz např. [1] nebo [2]), pokud pro ně zavedeme operace sčítání a násobení číslem přirozeným způsobem, tj. „člen po členu“; tento prostor se obvykle značí s. Velmi často se zkoumají na obecném lineárním prostoru X funkce, které nazýváme *lineární funkcionály*, tj. funkce f, pro něž platí

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

pro každé dva prvky $x, y \in X$ a pro všechna α, β z příslušného pole skalárů prostoru X. Takovými lineárními funkcionály, se kterými se setkáme, budou např. limita, derivace nebo integrál.

Pokud se totiž omezíme na prostor c všech konvergentních posloupností, který, jak později uvidíme, je podprostorem lineárního prostoru s všech posloupností (píšeme $c \subset\subset s$), je na něm limita lineárním funkcionálem. Postupně si to dokážeme.

---

[1]) Tento vzorec objevil již dříve r. 1718 pomocí tzv. *vytvořující funkce* (bylo to historicky první užití této užitečné metody) ABRAHAM DE MOIVRE (1667 – 1754).

Připomínáme, že podle Lemmatu 1.6.8 je posloupnost $\{a_n\}$ omezená, právě když existuje $M \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n| \leq M\,.$$

Lemma 2.1.21. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Důkaz. Označme vyšetřovanou posloupnost $\{a_n\}$ a definujme $a := \lim a_n$. To znamená, že pro každé $\varepsilon > 0$, tedy např. pro $\varepsilon = 1$, existuje takové $k \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq k$ platí

$$a - 1 < a_n < a + 1\,, \text{ a tedy } |a_n| < 1 + |a|\,.$$

Proto platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| < 1 + |a| + \max\{|a_k|; k = 1, 2, \ldots, n-1\}\,,$$

tj. $\{a_n\}$ je omezená. To bylo ostatně již zřejmé, neboť každá konečná množina je omezená a sjednocení (dvou, resp. konečně mnoha) omezených množin je omezená množina (zkuste si to dokázat). □

Věta 2.1.22. *Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}$ jsou konvergentní posloupnosti. Potom platí*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n\,, \\ \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\,. \end{aligned}$$

Poznámka 2.1.23. Předešlá věta ukazuje, že součet, rozdíl i součin dvou konvergentních posloupností je konvergentní posloupnost; dokonce navíc říká, jaká je souvislost mezi jejich limitami. Všimněte si, že zápisem vztahů automaticky vyjadřujeme první část tvrzení o konvergenci „součtové“ a „součinové“ posloupnosti; tuto konvenci budeme často užívat.

Důkaz věty 2.1.22. Velmi zhruba řečeno, pro důkaz první části věty musíme ukázat, že pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je výraz $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)|$ „libovolně malý“. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|\,, \tag{2.5}$$

což ukazuje cestu k důkazu. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolíme $k_1 \in \mathbb{N}$ tak, aby pro všechna $n \geq k_1$ platilo $|a_n - a| < \varepsilon/2$, a $k_2 \in \mathbb{N}$ tak, aby pro všechna $n \geq k_2$ platilo $|b_n - b| < \varepsilon/2$. V nerovnosti (2.5) lze výraz na pravé straně pro $k \geq \max\{k_1, k_2\}$ odhadnout součtem $\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, takže platí $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| < \varepsilon$. Dokázali jsme, že

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(|a_n \pm b_n) - (a \pm b)| < \varepsilon)\,,$$

což dává první část tvrzení.

Všimněte si, že základem důkazu bylo nalezení nerovnosti (2.5), zbytek byl jen technickým manipulováním se dvěma různými „skoro všemi n“.

K důkazu druhé rovnosti uvážíme, že například $\{a_n\}$ (ale i $\{b_n\}$) je omezená, a existuje proto $M \in \mathbb{R}$ tak, že $|a_n| \leq M$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dále platí

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = \\ &= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq M|b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Technickou manipulaci zaměřenou na to, že chceme odhad pravé strany nerovnosti (2.6) libovolným $\varepsilon > 0$, můžeme popsat podrobněji i následovně: je-li $\varepsilon' > 0$, zvolme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby platily současně nerovnosti

$$|b_n - b| < \varepsilon' \qquad \text{a} \qquad |a_n - a| < \varepsilon'$$

pro všechna $n \geq k$. Pak pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ lze odhadnout vyšetřovaný výraz $|a_n b_n - ab|$ číslem $(M + |b|) \cdot \varepsilon'$, které může být libovolně malé, tj. k danému číslu ε lze zvolit ε' tak, aby platilo $(M + |b|)\,\varepsilon' < \varepsilon$. To dokazuje zbytek tvrzení. □

Poznámka 2.1.24. Obecněji je třeba umět vysvětlit, proč stačí odhad typu $K\varepsilon$ s K *nezávislým* na ε: zvolí se $\varepsilon' = \varepsilon/K$ a k němu nalezneme příslušné $k \in \mathbb{N}$, pro které platí

$$(\forall n \geq k)(|a_n b_n - ab| < K\varepsilon' = K \cdot (\varepsilon/K) = \varepsilon)\,.$$

Tento obrat se dále běžně užívá bez dalšího komentáře.

Důsledek 2.1.25. *Je-li $c \in \mathbb{R}$, $a_n \to a \in \mathbb{R}$, pak platí $ca_n \to ca$.*

Tvrzení tohoto typu se zpravidla nedokazují a je na čtenáři, aby si je promyslil. V tomto případě si stačí uvědomit, že v předešlé větě lze volit $b_n := c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a zbytek je již zřejmý. Všimněme si, že jsme použili „úspornějšího zápisu“ v duchu našich předchozích úmluv. Tím jsme také dokončili slíbený důkaz linearity funkcionálu $f \equiv$ „lim“ na prostoru c. Z Věty 2.1.22 a Důsledku 2.1.25 vyplývá nejen

$$f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x) + f(\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)\,,$$

ale zároveň i poznatek, že systém všech konvergentních posloupností tvoří lineární prostor.

Označení 2.1.26. Nyní, ale také často později, se nám bude hodit toto označení:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1\,, & \text{pro} \quad x > 0\,, \\ 0\,, & \text{pro} \quad x = 0\,, \\ -1\,, & \text{pro} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Definujeme tak vlastně na $\mathbb{R}$ další funkci, kterou zpravidla nazýváme *signum* a značíme sgn.

Lemma 2.1.27. *Nechť* $\lim a_n = a, a \neq 0, a \in \mathbb{R}$. *Potom pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $\operatorname{sgn} a_n = \operatorname{sgn} a \ \neq 0$*; speciálně je* $a_n \neq 0$ *pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. V definici limity stačí volit např. $\varepsilon = |a|/2$. Pak pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a - |a|/2 < a_n < a + |a|/2$ a tedy pro $a > 0$ je $a_n > a/2 > 0$ a pro $a < 0$ je $a_n < a/2 < 0$. □

Věta 2.1.28. *Je-li* $a_n \to a \in \mathbb{R}$*, pak* $|a_n| \to |a|$*. Platí* $a_n \to 0$*, právě když* $|a_n| \to 0$.

Důkaz. Je-li $a = 0$, je $||a_n| - |0|| = ||a_n|| = |a_n| = |a_n - 0|$, z čehož dostáváme tvrzení pro tento speciální případ. Pro ostatní případy si stačí uvědomit, že podle trojúhelníkové nerovnosti je $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$.

Pro $a \neq 0$ lze však argumentovat i takto: je-li $a_n \to a$, pak platí $\operatorname{sgn} a_n \to \operatorname{sgn} a$, a podle Věty 2.1.22, části o násobení posloupností, dostáváme

$$|a_n| = a_n \operatorname{sgn} a_n \to a \operatorname{sgn} a \ = |a|\,,$$

z čehož opět plyne zbytek tvrzení. □

Poznámka 2.1.29. Pozor, ekvivalence platí *pouze* pro $a = 0$. Např. $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ je divergentní posloupnost, avšak $|a_n| \to 1$. První část Věty 2.1.28 má formu implikace, druhá je ekvivalencí; někdy to popisujeme slovy: pro $a = 0$ lze větu obrátit.

Věta 2.1.30. *Předpokládejme, že platí* $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$*,* $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$ *a* $b \neq 0$*; potom je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}\,.$$

Poznámka 2.1.31. Z $b_n \to b$ plyne $|b_n| \to |b|$, a $|b_n| \geq |b|/2$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Z toho vyplývá, že podíl a_n/b_n je pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ definován. Bez újmy obecnosti budeme tedy předpokládat, že je $b_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Také si povšimneme toho, že by stačilo dokázat trochu méně: pokud bychom dokázali, že

$$\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}\,,$$

potom by z již dokázané Věty 2.1.22 o násobení plynul žádaný výsledek.

Důkaz věty 2.1.30. Pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí ($b_n = 0$ nastat může, ale jen pro konečně mnoho n, naopak pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $|b_n| > |b|/2$)

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \frac{|a_n b - a b_n|}{|b_n| \cdot |b|} = \frac{|a_n b - ab + ab - a b_n|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \\ &\leq 2 \cdot \frac{|b| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|}{|b|^2}\,.\end{aligned}$$

Protože pro libovolné $\varepsilon > 0$ jsou výrazy $|a_n - a|$, $|b_n - b|$ menší než toto ε pro skoro všechna n, odhadneme výraz vpravo hodnotou $2\cdot(|a| + |b|) \cdot \varepsilon/|b|^2$, což podle Poznámky 2.1.24 stačí k dokončení důkazu. $\square$

2.2 Modifikace pro $\mathbb{R}^*$

Dále si všimněme blíže limit a nerovností. Již tak jednoduché zobrazení $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$, jakým je identita, určuje posloupnost $\{a_n\} = \{n\}$, která nemá limitu v dosud popsaném smyslu. Nežli to budeme řešit, vrátíme se pro inspiraci k jedné ukázce z historie, kterou jsme uvedli v úvodu. Připomínáme, že jde o návrat do vzdálené minulosti, do období kolem r. 1350; základní myšlenka je tedy značně stará. Harmonická řada (z Poznámky 2.1.15 již víme, odkud pochází její označení) $\sum k^{-1}$ nekonverguje; přiblížili jsme si to v (5). Zvolíme-li $a \in \mathbb{R}$ libovolně, lze nalézt částečný součet s_m této řady tak, že bude větší než a. Protože jsou členy řady kladné, je posloupnost částečných součtů rostoucí a odhad pomocí a bude platit pro všechna $n \geq m$, a tedy pro skoro všechna n. Skutečně, stačí užít odhad (5) a snadno dostaneme

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq (n+1)\,\frac{1}{2}\,. \tag{2.7}$$

Částečné součty tvoří rostoucí posloupnost, která *není* shora omezená; supremum množiny členů posloupnosti částečných součtů neexistuje (množina nemá horní odhad v $\mathbb{R}$).

Zároveň však vidíme, že pro každý interval tvaru $(a, +\infty)$ leží skoro všechny částečné součty vyšetřované řady v tomto intervalu. Intuitivně cítíme, že mohou být „libovolně veliké“, a že platí cosi jako $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = +\infty$. Jak se od tohoto intuitivního chápání dostat k přesnému matematickému vyjádření? Předně je třeba vědět, co znamená $a_n \to +\infty$. Symboly $+\infty$ a $-\infty$ označovaly dosud pouze „chybějící konečné meze“ v neomezených intervalech. Nyní s nimi budeme pracovat častěji a jejich pojetí více přiblížíme reálným číslům (proto se jim někdy též říká *nevlastní čísla*).

Začněme se samostatnou definicí nevlastních limit, která je prakticky totožná s právě vytvořenou představou.

Definice 2.2.1. Říkáme, že pro posloupnost $\{a_n\}$ platí

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty\,, \qquad \text{resp.} \qquad a_n \to +\infty\,,$$

jestliže pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq k$ platí $a_n > a$, neboli jestliže tato nerovnost platí pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Analogicky definujeme i $a_n \to -\infty$.

Nyní symboly $+\infty$ (znaménko často vynecháváme a píšeme jen ∞) a $-\infty$ obdaříme některými dalšími vlastnostmi čísel. Nejprve si všimneme jejich uspořádání.

Definice 2.2.2. K prvkům $\mathbb{R}$ (reálným číslům) přidáme další dva různé prvky s označením $+\infty$ a $-\infty$ a položíme

$$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Nyní pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme $-\infty < x < +\infty$; analogicky rozšíříme definice relací $>$, $\geq$, $\leq$ na $\mathbb{R}^*$.

Definice 2.2.3. Je-li $A \subset \mathbb{R}^*$, pak každé $M \in \mathbb{R}^*$, pro které platí $x \leq M$ pro všechna $x \in A$ je *horním odhadem* A v $\mathbb{R}^*$. Obdobně definujeme *dolní odhad* $A \subset \mathbb{R}^*$ v $\mathbb{R}^*$.

Důsledek 2.2.4. *Je-li $M \subset \mathbb{R}^*$, $M \neq \emptyset$, pak má M v $\mathbb{R}^*$* vždy *horní i dolní odhad, neboť pro všechna $x \in M$ platí $-\infty \leq x \leq +\infty$.*

Úmluva 2.2.5. V Definici 1.3.8 jsme definovali supremum (nejmenší horní odhad) a infimum (největší dolní odhad) v $\mathbb{R}$ tak, abychom tuto „starou“ definici snadno rozšířili na případ $\mathbb{R}^*$, eventuálně libovolné (lineárně) uspořádané množiny. Po rozšíření $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^*$ se situace zjednoduší, neboť v $\mathbb{R}^*$ existují horní i dolní odhady ke *všem* podmnožinám $\mathbb{R}^*$, tedy i k těm, které podle definice nejsou omezené. Jediné, co se v definici suprema a infima změní, jsou vztahy $S \subset \mathbb{R}$ a $A \subset \mathbb{R}$, které zaměníme vztahy $S \subset \mathbb{R}^*$ a $A \subset \mathbb{R}^*$ (obdobně pro infimum s).

Poznámky 2.2.6. Všimněme si podrobněji změn, které modifikace definice suprema a infima v $\mathbb{R}^*$ přináší.

1. Je-li $M \subset \mathbb{R}^*$, pak pro $M \neq \emptyset$ platí $\inf M \leq \sup M$ a $\inf M$ i $\sup M$ v $\mathbb{R}^*$ *vždy existují.*

2. I pro prázdnou množinu existují sup a inf, avšak platí $\sup \emptyset < \inf \emptyset$. Jakékoli číslo z $\mathbb{R}^*$ je totiž horním odhadem pro $\emptyset$ a infimum této množiny všech horních odhadů je $-\infty$; podobně pro všechny dolní odhady a jejich supremum. Je tedy $\sup \emptyset = -\infty$ a $\inf \emptyset = +\infty$.

3. Úmluva 2.2.5 *rozšiřuje* definici suprema (resp. infima), jak ve věci jeho existence, tak i hodnoty: zvažte, že je-li S supremum množiny M v $\mathbb{R}$, je S i supremem množiny M v $\mathbb{R}^*$.

Tvrzení 2.2.7. *Každá $M \subset \mathbb{R}^*$ má v $\mathbb{R}^*$ supremum.*

Důkaz. Pro $\emptyset$ je $\sup \emptyset = -\infty$. Obsahuje-li M prvek $+\infty$, je $\sup M = +\infty$. Pro $M = \{-\infty\}$ platí $\sup M = -\infty$. Je-li $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná, která *není* shora omezená, je opět $\sup M = +\infty$. Jestliže je $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná a shora omezená je $\sup M \in \mathbb{R}$; totéž supremum má i množina $M \cup \{-\infty\}$. Tím jsme vyčerpali všechny možné případy a věta je tak dokázána. $\square$

Poznámka 2.2.8. Dále rozšíříme definici limity posloupnosti tak, aby zahrnovala i případy nevlastních limit. To však neznamená jen definovat limitu posloupnosti tak, aby mohla být rovna $\pm\infty$, ale dokázat pro ni i analogie všech tvrzení o (konečných) limitách, které jsme již dokázali.

V této souvislosti upozorňujeme, že pod posloupností i *nadále rozumíme posloupnost čísel z* $\mathbb{R}$, nikoli prvků z $\mathbb{R}^*$.

Lemma 2.2.9. *Nechť jsou pro posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $a \in \mathbb{R}^*$, splněny podmínky*

(1) *pro každé $a' \in \mathbb{R}$, $a' < a$, je $a_n > a'$ pro skoro všechna n,*

(2) *pro každé $a'' \in \mathbb{R}$, $a'' > a$, je $a_n < a''$ pro skoro všechna n.*

Potom pro případ $a \in \mathbb{R}$ platí $\lim a_n = a$.

Důkaz. Nechť je $a \in \mathbb{R}$ a nechť jsou splněny obě podmínky z Lemmatu 2.2.9. K $\varepsilon > 0$ volme speciálně $a' = a - \varepsilon$, $a'' = a + \varepsilon$.

Potom pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a - \varepsilon = a' < a_n < a'' = a + \varepsilon$$

a tedy $\lim a_n = a$ podle Definice 2.1.6 a Poznámek 2.1.8. V případě, že $\lim a_n = a$ podle Definice 2.1.6 a $a' < a < a''$ jsou dána, lze volit v Definici 2.1.6 číslo $\varepsilon < \min\{a - a', a'' - a\}$ a z nerovností v Definici 2.1.6 dostaneme splnění obou podmínek Lemmatu 2.2.9. $\square$

Definice 2.2.10. Nechť jsou pro posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $a \in \mathbb{R}^*$, splněny podmínky

(1) pro každé $a' \in \mathbb{R}$, $a' < a$, je $a_n > a'$ pro skoro všechna n,

(2) pro každé $a'' \in \mathbb{R}$, $a'' > a$, je $a_n < a''$ pro skoro všechna n.

Potom říkáme, že a je limitou a_n a píšeme podobně jako dříve $\lim a_n = a$.

Poznámky 2.2.11. 1. Tato definice zahrnuje obě *předcházející definice*, tj. Definici 2.1.6 a Definici 2.2.1; je bližší původní „naivní představě“ o limitě s intervalem (α, β).

2. Jestliže je $a = +\infty$ nebo $a = -\infty$, je vždy jedna z podmínek (1) a (2) v Definici 2.2.10 prázdná. Snadno nahlédnete, že definice „pokrývá“ i případy nevlastních limit z Definice 2.2.1.

3. Nyní vidíme, že bychom mohli uvést rovnou Definici 2.2.10 a vyřešit najednou případy z dříve uvedených Definic 2.1.6 a 2.2.1, takto však měl čtenář možnost si vše promyslit a „ohmatat“ pro oba případy zvlášť.

4. Znovu na tomto místě připomínáme, že pouze v případě $\lim a_n = a$ a $a \in \mathbb{R}$ říkáme, že $\{a_n\}$ *konverguje* k a a $\{a_n\}$ *je konvergentní*. Pokud víme pouze to, že limita existuje v $\mathbb{R}^*$, pak říkáme, že $\{a_n\}$ *má limitu* [2]).

Věta 2.2.12. *Každá monotónní posloupnost má limitu v* $\mathbb{R}^*$.

Důkaz. Je-li posloupnost $\{a_n\}$ monotónní, je nerostoucí, nebo neklesající. Je-li např. $\{a_n\}$ neklesající, je zřejmě $a_n \geq a_1$ a $\{a_n\}$ je zdola omezená. Je-li navíc omezená (tj. omezená i shora), existuje $\sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ podle posledního axiómu (13) pro $\mathbb{R}$. Podle Věty 2.1.19 platí

$$\lim a_n = \sup\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}\,.$$

Není-li $\{a_n\}$ shora omezená, pak zřejmě pro libovolně zvolené $a' < +\infty$ je pro jisté $k \in \mathbb{N}$ splněna nerovnost $a_k > a'$ a tedy $a_n > a'$ pro všechna $n \in \mathbb{N}, n \geq k$. To znamená, že $\lim a_n = +\infty$. Podobně lze postup zopakovat pro nerostoucí posloupnost; lze si však také uvědomit, že při $\{a_n\}$ neklesající je $\{-a_n\}$ nerostoucí a převést tento případ na případ předcházející. □

Příklad 2.2.13. Nechť $a_n \to a \in \mathbb{R}^*$, $a \neq 0$. Potom pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\operatorname{sgn} a_n = 1$ pro $a > 0$ a $\operatorname{sgn} a_n = -1$ pro $a < 0$.

Jde vlastně o velmi jednoduchou modifikaci Lemmatu 2.1.27, neboť např. v případě $a_n \to +\infty$ je $\operatorname{sgn} a_n = 1$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 2.2.14. V Příkladu 2.1.16 jsme odvodili vzorce pro n-tý člen aritmetické a geometrické posloupnosti. Pomocí nich snadno nahlédneme, že aritmetická posloupnost konverguje, právě když pro její diferenci platí $d = 0$, tj. posloupnost je konstantní.

Vyšetřeme ještě jednoduchou geometrickou posloupnost $\{q^n\}$. Dokážeme, že pro $|q| < 1$ tato posloupnost konverguje k 0. To je zřejmé pro $q = 0$. S ohledem na Větu 2.1.28 to stačí dokázat pro $0 < q < 1$. Pak ale platí $q^{-1} > 1$, a tedy $q^{-1} = 1 + h$ pro nějaké $h > 0$. Zvolíme-li $\varepsilon > 0$, pak platí podle Bernoulliho nerovnosti (viz Příklad 1.3.24)

$$q^{-n} = (1+h)^n > 1 + nh > nh > \varepsilon^{-1}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > (\varepsilon h)^{-1}$. Pro všechna tato n platí $q^n < \varepsilon$. Tím je tvrzení dokázáno. Pro $q = 1$ posloupnost konverguje, neboť je konstantní.

[2]) Často se užívá i obratu „posloupnost diverguje k $+\infty$ nebo $-\infty$“.

2.3 Případ nevlastních limit

Máme-li k dispozici pojem nevlastních limit, je přirozené pokusit se rozšířit již dokázaná tvrzení i na nevlastní limity. Připomeňme, že jestliže $a_n \to +\infty$, pak říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní limitu*, nebo že $\{a_n\}$ *diverguje* (k $+\infty$); jakkoli je toto slovní vyjádření nepříliš šťastné, budeme ho užívat. Analogicky řešíme situaci pro $-\infty$. Některé věty o konvergentních posloupnostech rozšíříme na případ nevlastních limit, jiné dokážeme přímo již v této obecnosti. Zatím máme na $\mathbb{R}^*$ zavedeno pouze uspořádání, začneme proto s větou o limitách a nerovnostech.

Věta 2.3.1. *Předpokládejme, že platí $a_n \to a$ a $b_n \to b$, $a < b$. Potom pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < b_n$.*

Důkaz. Zvolme $c \in (a, b)$. Potom podle definice limity v $\mathbb{R}^*$, tj. Definice 2.2.10, je

$$\begin{aligned} a_n < c &\quad \text{pro skoro všechna} \quad n \in \mathbb{N}\,,\\ b_n > c &\quad \text{pro skoro všechna} \quad n \in \mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

a je proto $a_n < b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. □

Věta 2.3.2 (o limitě a nerovnostech). *Nechť pro posloupnosti reálných čísel $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ platí pro (skoro) všechna $n \in N$*

$$a_n \le c_n \le b_n\,.$$

Potom:

(1) *Je-li $a_n \to a$, $c_n \to c$, pak platí $a \le c$; mezi limitami platí „souhlasná, ale neostrá“ nerovnost jako mezi členy.*

(2) *Nechť $a_n \to a$ a $b_n \to a$. Pak platí $c_n \to a$.*

(3) *Nechť platí $c_n \to +\infty$. Potom i $b_n \to +\infty$.*

(4) *Nechť platí $c_n \to -\infty$. Potom i $a_n \to -\infty$.*

Poznámka 2.3.3. Část (2) tohoto tvrzení má řadu zajímavých jmen, pohybujících se na okraji matematického slangu, např. lemma „o dvou policajtech“, „sendvič-lemma“ apod. Další části tvrzení jsou modifikací sendvič-lemmatu pro případ nevlastních limit. Poznamenejme již zde, že ani z nerovností $a_n < c_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ *nedostaneme* v části (1) $a < c$.

Důkaz Věty 2.3.2. 1. První část tvrzení dokážeme sporem: při $a > c$ by podle předešlé věty platila pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $a_n > c_n$, což je ve sporu s předpoklady.

2. Pro $a \in \mathbb{R}$ volme libovolně $a' < a < a''$. Pak pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n > a'$ a také pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $b_n < a''$. Proto též pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je

$$a' < a_n \le c_n \le b_n < a''$$

a tedy $c_n \to a$. Při $a = \pm\infty$ stačí jen „půlka" předešlé úvahy: s a' pro $a = +\infty$ a s a'' pro $a = -\infty$. To vyjadřují další dvě části věty. $\square$

Pro formulaci i pro důkaz věty o aritmetických operacích a limitách potřebujeme zavést v $\mathbb{R}^*$ aritmetické operace, které by *rozšiřovaly* přirozeným způsobem operace na $\mathbb{R}$. To však již není *zcela* možné, některým konkrétním součtům (např. $+\infty + (-\infty)$) *nelze dát* rozumný smysl: pro $a > 0$ je $(n + a) + (-n) \to a$.

Definice 2.3.4. Abychom postupovali rychleji, dohodneme se, že ve výrazech se znameními $\pm$ a $\mp$ čteme vždy buď horní a nebo dolní znaménka. Této konvence jsme již užívali. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\begin{aligned} x + (+\infty) = x - (-\infty) = (+\infty) \pm x = +\infty\,, \\ x - (+\infty) = x + (-\infty) = (-\infty) \pm x = -\infty\,; \end{aligned}$$

dále definujeme

$$\begin{aligned} (+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty\,, \\ (-\infty) - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) = -\infty\,. \end{aligned}$$

Podobně, avšak s trochou opatrnosti, definujeme násobení: klademe

$$\begin{gathered} 1 \cdot (\pm\infty) = \pm\infty\,, \quad (-1) \cdot (\pm\infty) = \mp\infty\,, \\ x \cdot (\pm\infty) = (\operatorname{sgn} x) \cdot (\pm\infty)\,,\ \text{pokud } x \neq 0,\ x \in \mathbb{R}^*\,. \end{gathered}$$

Dále postulujeme, že ve všech uvedených případech pro sčítání a násobení záměna operandů nemění výsledek (jakási „komutativita"). Konečně definujeme pro všechna x, $x \neq 0$, $x \neq \pm\infty$

$$\frac{\pm\infty}{x} = (\operatorname{sgn} x) \cdot (\pm\infty)\,,$$

a pro $x \neq \pm\infty$ definujeme $x/(\pm\infty) = 0$; klademe též $|\pm\infty| = +\infty$.

Jak jsme si již řekli, je zvykem psát $+\infty = \infty$ a vynechávat nadbytečné závorky. Píšeme proto např. místo $(+\infty) + (+\infty)$ pouze $\infty + \infty$, atp. Řadu výrazů jsme nedefinovali. Definovány nejsou výrazy

$$\begin{gathered} \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\,, \quad \frac{\pm\infty}{\mp\infty}\,, \quad \frac{x}{0} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}^*\,, \\ 0 \cdot (\pm\infty)\,, \quad (\pm\infty) \cdot 0\,, \quad (\pm\infty) + (\mp\infty)\,, \quad (\pm\infty) - (\pm\infty). \end{gathered}$$

Až se budeme zabývat blíže mocninami, přidáme do tohoto seznamu některé další výrazy. Někdy, zejména ve starší literatuře, se tyto výrazy nazývaly *neurčité výrazy.* Pro stručnost vyjadřování se domluvíme, že budeme někdy říkat, že výraz (součet, rozdíl, součin a podíl) má smysl, pokud je výsledek podle předcházejících úmluv definován.

Věta 2.3.5. *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Potom platí*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b\,, \tag{2.8}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = a \cdot b\,, \tag{2.9}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = a/b\,, \tag{2.10}$$

jakmile mají jednotlivé výrazy na pravé straně rovností smysl (*pro platnost první rovnosti musí mít smysl výraz* $a \pm b$, *apod.*).

Důkaz. Předně je třeba si uvědomit, že tato věta v sobě zahrnuje již dříve dokázanou Větu 2.1.22 a také Větu 2.1.30 (v ní vyloučený případ $b = 0$ ovšem neřeší, neboť potom výraz a/b na pravé straně rovnosti nemá smysl). Máme proto větu pro mnoho případů, na které se důkaz tvrzení rozpadne, již dokázánu.

1. Protože pro případ $a = +\infty$, $b > -\infty$ má *součet* v rovnosti (2.8) na pravé straně smysl, dokažme rovnost (2.8). Z předpokladů plyne postupně pro b', $-\infty < b' < b$, platnost nerovnosti $b_n > b'$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ a pro libovolné $a' \in \mathbb{R}$ platnost nerovnosti $a_n > a' - b'$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Proto platí i

$$a_n + b_n > (a' - b') + b' = a' \text{ pro skoro všechna } n \in \mathbb{N}\,.$$

Odtud již plyne (2.8) pro vyšetřovaný případ. Ze symetrie plyne zároveň i případ $a > -\infty$, $b = +\infty$. Tím je dokázána rovnost (2.8) pro případ součtu, je-li jedna z limit rovna $+\infty$.

Případ, kdy součet limit má smysl a jedna z limit je rovna $-\infty$, se dokáže analogicky; shrnutím je případ rovnosti (2.8) pro součet vyřešen.

Také případ *rozdílu* v (2.8) vyřešíme podobně postupným vyčerpáním jednotlivých možností. Podstatné je zde pochopit princip, ostatní je jednoduchá technická záležitost.

2. Rovnost (2.9) dokážeme nejprve pro případ $a \neq 0$ a $b = +\infty$. Pak na pravé straně (2.9) dostáváme $(\operatorname{sgn} a)\cdot(+\infty)$. Pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $|a_n| > |a|/2 > 0$ a $\operatorname{sgn}(a_n) = \operatorname{sgn} a$. Zvolme bez újmy na obecnosti $0 < b' < \infty$. Potom pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $b_n > (2b')/|a|$ a pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ je tedy

$$\operatorname{sgn}(a_n b_n) = \operatorname{sgn} a, \quad |a_n b_n| > \frac{|a|}{2}\frac{2b'}{|a|} = b'\,,$$

z čehož pro vyšetřovaný případ plyne opět žádané. Pak uvážíme důsledky symetrie v a a b a to, jak se modifikuje vyšetření v případě $b = -\infty$, z čehož vyplyne platnost (2.9) pro všechny uvažované případy.

3. V posledním případě zvolíme k důkazu přechod přes vyšetření posloupnosti $1/b_n$ a rovnost (2.9). Případ se prakticky redukuje na vyšetření pro $a \in \mathbb{R}$, $b = \pm\infty$. Pak ale je $b_n = \operatorname{sgn}(b) \cdot |b_n|$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ a posloupnost $|1/b_n|$ stejně jako $1/b_n$ konverguje k 0. Zbytek plyne z Věty 2.1.22 s přihlédnutím k symetrii v a a b. Celý důkaz si podrobně promyslete. $\square$

Poznámky 2.3.6. Dokázaná kolekce tvrzení by měla indukovat celou řadu otázek. Na některé poskytneme ihned odpověď, jiné si čtenář musí rozmyslet sám.

1. Čtenář by se mohl domnívat, že platí více. Avšak z $a_n \to a$ a $b_n \to b$, $a \le b$ *neplyne* $a_n \le b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. To ukazuje tento protipříklad: Položme $a_n := 0$ a $b_n := (-1)^n/n$, $n \in \mathbb{N}$, je $a_n \to a = 0$ a $b_n \to b = 0$, to znamená $a \le b$, ale *neplatí* pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$b_n - a_n = (-1)^n n^{-1} \ge 0\,.$$

2. Podobně platí-li $a_n \le b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $a_n \to a$ a $b_n \to b$, pak podle věty platí $a \le b$. Ale i když pro $b_n := 1/n > 0$ je $b_n \to b = 0$ a $a_n := 0$, takže $a_n \to 0 = a$ a platí $a_n < b_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, přesto však *neplatí* ostrá nerovnost $a < b$.

3. Někdy se hodí následující vztahy: Z $a_n \to \infty$ plyne $(a_n)^{-1} \to 0$. Obráceně lze tvrdit o trochu méně: Z $a_n \to 0$, $a_n > 0$, plyne $(a_n)^{-1} \to \infty$; vynecháním předpokladu $a_n > 0$ dostaneme ale *neplatné* tvrzení.

2.4 Některé hlubší věty

Všechna tvrzení, která pro důkaz potřebují axióm (13), užitý při zavedení $\mathbb{R}$ [3]), jsou považována za hluboká; tím se rozumí zpravidla jistá myšlenková náročnost důkazu, ne nutně však náročnost technická. Po pochopení základní myšlenky je např. věta o limitě monotónní posloupnosti vcelku jednoduchá. Nyní ji využijeme pro důkaz věty trochu technicky složitější. Věta však má velmi názorný význam.

Věta 2.4.1 (Bolzano 1817, Weierstrass 1874*). *Nechť jsou intervaly* $[\alpha_n, \beta_n]$ *do sebe zařazené, tj. nechť pro* $-\infty < \alpha_n < \beta_n < \infty$ *platí*

$$[\,\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}\,] \subset [\,\alpha_n, \beta_n\,]$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$. *Potom* $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\,\alpha_n, \beta_n\,] \ne \emptyset$. *Je-li navíc* $\beta_n - \alpha_n \to 0$, *pak je tento průnik jednobodový.*

Historická poznámka 2.4.2. Tomuto tvrzení se často též říká *Cantorův princip vložených intervalů.* Bývá spojováno s Georgem Cantorem (1845 – 1918) v souvislosti s jeho přístupem k zavedení reálných čísel (1872). Bolzano a Weierstrass užívali jeho speciální tvar, tzv. „princip půlení intervalů“. Přiřazení jména Bolzanova u Věty 2.4.1 referuje k užití speciální varianty, nikoliv k tomu, že by Bolzano tuto větu dokázal. Bolzano užil princip k důkazu Věty 4.3.32, viz dále. Korektní důkaz tvrzení podal Weierstrass. Poznamenejme, že pokud bychom pracovali pouze v $\mathbb{Q}$, analogické tvrzení by *neplatilo.*

Důkaz. Z inkluzí plyne, že posloupnost $\{\alpha_n\}$ je neklesající a posloupnost $\{\beta_n\}$ je nerostoucí. Protože jsou obě posloupnosti omezené zdola číslem α_1 a shora číslem β_1, konvergují dle Věty 2.1.19 v $\mathbb{R}$. Platí

$$\alpha_n \to \alpha\,, \quad \beta_n \to \beta\,, \quad \alpha \le \beta\,.$$

[3]) Někdy se mu říká *axióm úplnosti*, avšak důvod tohoto označení bude jasný až později. Z tohoto axiómu vyplývá, že $\mathbb{R}$ je úplný metrický prostor.

Pro $\alpha < \beta$ je $[\,\alpha,\beta\,] \subset [\,\alpha_n,\beta_n\,]$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$; pro $\alpha = \beta$, platí $\alpha \in [\,\alpha_n,\beta_n\,]$ (jediná odlišnost je technická, nezavedli jsme „jednobodové intervaly“). Z poslední podmínky $\beta_n - \alpha_n \geq \beta - \alpha$, $\beta_n - \alpha_n \to 0$, dostáváme $\alpha = \beta$ a posléze též $\bigcap_n [\,\alpha_n,\beta_n\,] = \{\alpha\}$. □

Definice 2.4.3. Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a dále rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Potom $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je tzv. *vybraná posloupnost* z posloupnosti $\{a_n\}$ (někdy se užívá i termín *podposloupnost*).

Věta 2.4.4 (Weierstrass 1874). *Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost. Potom existuje vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$, která je konvergentní.*

Důkaz. Zvolme $m, M \in \mathbb{R}$ tak, že $m \leq a_n \leq M$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $m < M$. Dále označme $\alpha_1 := m$, $\beta_1 := M$ a zvolme $n_1 = 1$. Je $a_{n_1} \in [\alpha_1, \beta_1]$. Uvažujme intervaly

$$I_1 = \left[\alpha_1, \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}\right] \qquad \text{a} \qquad I_2 = \left[\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \beta_1\right].$$

Pro alespoň jedno $r \in \{1, 2\}$ je $\{n; a_n \in I_r\}$ nekonečná; nechť je to například $r = 1$; interval I_1 označíme $J_2 = [\alpha_2, \beta_2]$ a zvolíme $n_2 > n_1$ tak, že a_{n_2} leží v tomto intervalu; zřejmě platí $\beta_2 - \alpha_2 = (M - m)/2$. Jde opět o induktivní definici. Popišme ještě přechod od intervalu $[\alpha_s, \beta_s]$ o délce $\beta_s - \alpha_s = (M - m)/2^{s-1}$ k intervalu $[\alpha_{s+1}, \beta_{s+1}]$: uvažujeme intervaly

$$I_1 = \left[\alpha_s, \frac{\alpha_s + \beta_s}{2}\right] \qquad \text{a} \qquad I_2 = \left[\frac{\alpha_s + \beta_s}{2}, \beta_s\right].$$

Pro alespoň jedno $r \in \{1, 2\}$ je opět $\{n; a_n \in I_r\}$ nekonečná; nechť je to tentokrát například $r = 2$; interval I_2 zvolíme za $J_{s+1} = [\alpha_{s+1}, \beta_{s+1}]$ a zvolíme $n_{s+1} > n_s$ tak, aby $a_{n_{s+1}} \in [\alpha_{s+1}, \beta_{s+1}]$; je samozřejmě $\beta_{s+1} - \alpha_{s+1} = (M - m)/2^s$. Proces opakujeme pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Získáme tak posloupnost do sebe zařazených intervalů $J_s = [\,\alpha_s, \beta_s\,]$, pro kterou $(\beta_s - \alpha_s) \to 0$ pro $s \to \infty$. Označíme-li jejich jednobodový průnik α, platí podle Věty 2.3.2 také $\lim \alpha_{n_s} = \alpha$. Posloupnost $\{a_{n_s}\}_{s=1}^{\infty}$ je hledaná konvergentní vybraná posloupnost. □

Poznámka 2.4.5. Právě dokázaná Věta 2.4.4 bývá velmi často označována jako *věta Bolzano - Weierstrassova*. Je nějak možné pro danou posloupnost $\{a_n\}$ poznat, zda v $\mathbb{R}$ konverguje? Její omezenost k tomu nestačí, což ukazuje příklad posloupnosti $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$. Pro $\varepsilon < 1$ nemůže totiž okolí žádného $a \in \mathbb{R}$ obsahovat oba body -1 a 1 a tedy ani členy a_n pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Definice 2.4.6 (Bolzano, Cauchy 1821). Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a nechť pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $k \in \mathbb{N}$, že platí $|a_m - a_n| < \varepsilon$ pro všechna $m, n \geq k$. Potom říkáme, že $\{a_n\}$ splňuje *Bolzano-Cauchyho podmínku*, nebo kratčeji, že je *cauchyovská.* Podmínka má tento tvar

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq k)(|\,a_m - a_n\,| < \varepsilon)\ .$$

Lemma 2.4.7. *Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Zřejmě platí

$$|\, a_m - a_n \,| \le |\, a_m - a \,| + |\, a_n - a \,|$$

a lze volit $k \in \mathbb{N}$ tak, že oba členy vpravo jsou pro všechna $m, n \ge k$ odhadnuty pomocí $\varepsilon/2$, z čehož již plyne dokazované tvrzení. □

Věta 2.4.8 (Cauchy 1821*). *Posloupnost* $\{a_n\}$ *konverguje,* právě když *je cauchyovská; Bolzano-Cauchyho podmínka je tedy nutnou a postačující podmínkou pro konvergenci posloupnosti v* $\mathbb{R}$.

Důkaz. Poznamenejme, že triviální z obou implikací dokazované ekvivalence jsme již dokázali v Lemmatu 2.4.7.

Zřejmě je každá cauchyovská posloupnost omezená; zvolme $\varepsilon = 1$ a $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \ge k$ je

$$a_m - 1 \le a_n \le a_m + 1\,.$$

Nechť např. $m = k$. Pak platí $|a_n| \le |a_k| + 1$ pro všechna $n \ge k$, přičemž zbývá ještě k odhadnutí pouze *konečně mnoho* $|a_n|$, $n = 1, 2, \ldots, k-1$. Odtud plyne omezenost posloupnosti. Nyní podle Věty 2.4.4 existuje $\{a_{n_k}\}$ vybraná z $\{a_n\}$, $a_{n_k} \to a \in \mathbb{R}$. Toto a je „kandidátem“ na $\lim a_n$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existuje $k' \in \mathbb{N}$ tak, že je

$$|\, a_m - a_n \,| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pro } m, n \ge k'\,.$$

Nyní zvolme $n_l > k'$ tak, aby platilo

$$|\, a_{n_l} - a \,| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Nyní pro všechna $n > k'$ platí

$$|\, a - a_n \,| \le |\, a - a_{n_l} \,| + |\, a_{n_l} - a_n \,| < \varepsilon\,.$$

Odtud a z předchozího lemmatu vyplývá již dokazované tvrzení. □

Poznámka 2.4.9. Cauchy zvládl velkou část úvah potřebných k důkazu Věty 2.4.8, *nemohl* větu exaktně dokázat, neboť ještě nebyla známa teorie zavedení reálných čísel. Jak poznamenal r. 1869 Charles Robert Méray (1835 – 1911), jeden z tvůrců teorie reálných čísel, „princip půlení intervalů“ byl spíše chápán jako axióm (viz [5]).

Některá tvrzení jsou velmi užitečná k výpočtům, i když se zdají velmi speciální. Druhé v pořadí nám pomůže často při rozhodování o konvergenci řad.

Lemma 2.4.10. *Nechť* $\{a_n\}$ *je omezená posloupnost, a nechť* $b_n \to 0$. *Potom platí* $a_n b_n \to 0$.

Důkaz. Zřejmě existuje $M \in \mathbb{R}$ tak, že $|a_n| \leq M$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom však platí

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| \leq M|b_n|\,.$$

Z předpokladu $b_n \to 0$ plyne, že pro libovolně zvolené $\varepsilon > 0$ platí tedy $M|b_n| < \varepsilon$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ a je tedy $a_n b_n \to 0$. □

Příklad 2.4.11. Protože je $|\operatorname{sgn} x| \leq 1$, je podle předchozího tvrzení

$$\frac{\operatorname{sgn}(b_n^3 - 100b_n^2 + 1)}{n} \to 0$$

pro jakoukoli posloupnost $\{b_n\}$. Např. pro $b_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, je posloupnost $\{a_n\}$ čitatelů zlomku skoro konstantní, neboť pro všechna dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = 1$, a tedy pro všechny členy této posloupnosti až na konečný počet je $a_n = 1$.

Lemma 2.4.12. *Jsou-li* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *posloupnosti kladných čísel, pro něž platí* $a_n/b_n \to A \in (0, \infty)$, *existují* $K, L > 0$ *tak, že pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$Lb_n \leq a_n \leq Kb_n\,.$$

Důkaz. Volme $0 < \varepsilon < A$: z definice limity dostáváme

$$0 < A - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq A + \varepsilon$$

pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Nyní stačí položit $A - \varepsilon = L$, $A + \varepsilon = K$. □

Tvrzení 2.4.13. *Nechť* $a_n \to a$. *Potom pro každou posloupnost* $\{a_{n_k}\}$ *vybranou z posloupnosti* $\{a_n\}$ *platí* $a_{n_k} \to a$.

Důkaz. Protože je vždy $n_k \geq k$, je např. při $a \in \mathbb{R}$

$$(|\, a - a_k\,| < \varepsilon \text{ pro s.v. } k \in \mathbb{N}) \Rightarrow (|\, a - a_{n_k}\,| < \varepsilon \text{ pro s.v. } k \in \mathbb{N})\,;$$

podobně postupujeme při $a = \pm\infty$. □

Důsledek 2.4.14. *Lze-li z posloupnosti* $\{a_n\}$ *vybrat dvě posloupnosti s* různými *limitami, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *neexistuje.*

Následující příklad je velmi důležitý, budeme se na něj několikrát odvolávat.

Příklad 2.4.15 (důležitý). Nechť $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, a nechť $a > 0$, $x_0 > 0$. Definujeme rekurentně

$$x_{n+1} := \frac{1}{p}\Big((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\Big)\,. \tag{2.11}$$

Potom je posloupnost $\{x_n\}$ konvergentní. Označíme-li $\lim x_n = \omega$, pak $\omega > 0$ a $\omega^p = a$ (tzv. tvrzení o p-té odmocnině).

Důkaz. Předpokládejme, že již víme, že $\{x_n\}$ konverguje a že platí $x_n \to \omega > 0$. Potom z definiční rovnosti (2.11) dostaneme následující rovnici pro ω

$$\omega = \frac{1}{p}\Big((p-1)\,\omega + \frac{a}{\omega^{p-1}}\Big)\,;$$

násobením této rovnice číslem ω^{p-1} obdržíme

$$\omega^p = \frac{p-1}{p}\,\omega^p + \frac{a}{p}\,, \qquad \text{resp.} \quad \frac{a}{p} = \omega^p\Big(1 - \frac{p-1}{p}\Big) = \frac{\omega^p}{p}\,,$$

neboli $\omega^p = a$.

Nyní se budeme zabývat otázkou konvergence; z AG-nerovnosti (1.9) z Kapitoly 1 aplikované na součin p činitelů plyne pro všechna $n \in \mathbb{N}$ odhad $x_n^p \geq a$. Zřejmě platí $x_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$, proto lze AG-nerovnost aplikovat; je

$$a = x_n^{p-1} \cdot \frac{a}{x_n^{p-1}} \leq \Big(\frac{p-1}{p}x_n + \frac{a}{px_n^{p-1}}\Big)^p = x_{n+1}^p\,.$$

S využitím právě odvozené nerovnosti dostaneme pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \Big(\frac{p-1}{p}x_n + \frac{a}{px_n^{p-1}}\Big) = \frac{x_n}{p} - \frac{a}{px_n^{p-1}} = \frac{1}{p}\left(\frac{x_n^p - a}{x_n^{p-1}}\right) \geq 0\,,$$

a tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí zdola omezená posloupnost; proto je s ohledem na Tvrzení 2.1.19 konvergentní. Kdyby platilo $x_n \to 0$, pak by platilo též i $x_n^p \to 0$, což je spor s $x_n^p \geq a > 0$; je tedy $\omega > 0$. Tím je tvrzení plně dokázáno. ☐

Toto tvrzení nám umožňuje zavést dostatečně brzo a relativně jednoduše *p-tou odmocninu* z $a \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$:

Definice 2.4.16. Pro každé $a > 0$ a $p \in \mathbb{N}$ definujeme $\sqrt[p]{a}$ (čteme: „p-tá odmocnina z a“) jako to kladné číslo ω, pro které platí $\omega^p = a$.

Poznámka 2.4.17. Předcházející příklad nám zaručuje, že takové ω skutečně existuje; lehčí již je ukázat, že nemůže existovat více čísel s touto vlastností. V tom případě by existovala čísla ω_1, ω_2 tak, že $0 < \omega_1 < \omega_2$, avšak pak by též platilo $\omega_1^p < \omega_2^p$, což vede ke sporu. Naše definice je v tomto směru korektní. Jestliže nyní položíme

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}, \quad x \in [\,0, +\infty)\,,$$

je tato funkce inverzní funkcí k mocnině x^n. Poznamenejme, že při definování nového pojmu bychom si měli vždy otázky existence a jednoznačnosti pečlivě promyslit.

Příklad 2.4.18. Pro $p \geq 1$ platí $\sqrt[n]{n^p} \to 1$. K důkazu použijeme AG–nerovnost (Lemma 1.3.28) pro $2p$ činitelů $\sqrt{n}$ a dalších $(n-2p)$ jedniček; platí

$$1 \leq \sqrt[n]{n^p} = ((\sqrt{n})^{2p} \cdot 1 \cdot 1 \ldots 1)^{1/n} < \frac{2p\sqrt{n} + n - 2p}{n} < 1 + \frac{2p}{\sqrt{n}}\,,$$

a tedy podle sendvič-lemmatu platí i dokazované tvrzení. Speciálně platí $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Poznámka 2.4.19. V závěrečných Historických poznámkách k této kapitole je zmíněna udivující přesnost výpočtů druhé odmocniny již dávno před začátkem našeho letopočtu. Snadno lze pro posloupnost z Příkladu 2.4.15 odvodit vzorce

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n}\,, \quad x_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{(x_n + \sqrt{a})^2}{2x_n}\,,$$

ze kterých obdržíme

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{x_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{(x_n + \sqrt{a})^2} = \frac{(x_{n-1} - \sqrt{a})^{2^2}}{(x_{n-1} + \sqrt{a})^{2^2}} = \cdots$$

a z ní posléze odhad

$$0 < x_n - \sqrt{a} \leq 2x_1 \Big(\frac{x_0 - \sqrt{a}}{x_0 + \sqrt{a}}\Big)^{2^n}\,. \tag{2.12}$$

Příklad 2.4.20. Nechť $p \in \mathbb{N}$ a nechť platí $|a_k| \to 0$. Potom též je $\sqrt[p]{|a_n|} \to 0$. Skutečně, je-li dáno $\varepsilon > 0$, pak k ε^p nalezneme podle definice to $k \in \mathbb{N}$, pro něž $|a_n| < \varepsilon^p$ pro všechna $n \geq k$. Pak též platí

$$n \geq k \;\Rightarrow\; \sqrt[p]{|a_n|} < \varepsilon$$

a tvrzení je dokázáno. Plyne z něj mimo jiné též

$$(\sqrt[p]{n})^{-1} \to 0 \quad \text{a} \quad \sqrt[p]{n} \to \infty\,.$$

Poznámka 2.4.21. Výsledek z Příkladu 2.4.18 lze získat alternativně např. pomocí binomické věty (bez užití AG–nerovnosti). Označme $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Je $x_n > 0$ pro $n = 2, 3, \ldots$ a platí

$$n = (1 + x_n)^n = 1 + \binom{n}{1} x_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \cdots + \binom{n}{n} x_n^n > \binom{n}{2} x_n^2\,.$$

Z nerovnosti $x_n^2 < 2/(n-1) < 4/n$ dostaneme $0 \leq x_n < 2/\sqrt{n}$, a proto je $\sqrt[n]{n} - 1 \to 0$.

Následující výsledek se ukáže jako důležitý až později. Jeho patrně nejpodstatnější aplikace leží v teorii tzv. trigonometrických řad a tak přesahuje rámec tohoto textu.

Lemma 2.4.22 (Cauchy 1821). *Nechť posloupnost $\{x_n\}$ konverguje k x. Potom platí $y_n := (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n \to x$ pro $n \to \infty$.*

Důkaz. Zřejmě stačí ukázat, že

$$y_n - x = \frac{(x_1 - x) + (x_2 - x) + \cdots + (x_n - x)}{n} \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty\,,$$

tedy analogické tvrzení pro posloupnosti konvergentní k 0: je-li $z_n = x_n - x$, $z_n \to 0$, pak $((z_1 + z_2 + \cdots + z_n)/n) \to 0$ pro $n \to \infty$. Pro $n > k$ odhadneme

$$\left|\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}\right| \le \frac{|z_1 + \cdots + z_k|}{n} + \frac{|z_{k+1}| + \cdots + |z_n|}{n}\,. \tag{2.13}$$

K danému $\varepsilon > 0$ lze zřejmě nalézt $k \in \mathbb{N}$ tak, že $|z_n| < \varepsilon/2$ pro $n > k$. Nyní volme l tak, aby platilo $l > k$ a pro $n > l$ byl první člen na pravé straně (2.13) odhadnut $\varepsilon/2$. To je možné s ohledem na $1/n \to 0$. Pak platí pro $n > l$

$$\left|\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n-k}{n} < \varepsilon$$

a tvrzení je dokázáno. □

Cvičení 2.4.23. Povšimneme si jedné zajímavé věci. Jestliže je $x_n = (-1)^n$, pak posloupnost $\{x_n\}$ diverguje. Definujeme-li posloupnost $\{y_n\}$ pomocí $\{x_n\}$ stejně jako v Lemmatu 2.4.22, lze snadno dokázat, že pro $\{y_n\}$ platí

$$y_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}\,,$$

takže $\{y_n\}$ je *konvergentní* posloupnost. Pokud bychom tedy např. definovali $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$, dostali bychom „novou limitu“, která by byla rozšířením „normální limity“. Srovnejte s Poznámkou 3.1.3.

Historické poznámky 2.4.24. Nyní užívanou definici konvergence posloupnosti lze stopovat až k Jean le Rond d'Alembertovi (1717 – 1783) (1765) a Cauchymu (1821). Bylo by však hrubým zkreslením skutečnosti si představovat, že definice měla již tuto formu. Staří Řekové zvládali úvahy o limitním přechodu metodou *reductio ad absurdum*, i když se úvahám o nekonečnu snažili vyhýbat (někdy se v této souvislosti mluví o jejich *strachu z nekonečna*). Také úvahy, které prováděl d'Alembert, měly k definici limity ještě dost daleko, přesto však provedl rozhodující krok objasnění pojmu derivace jako limity poměru přírůstků a tak kvalitativně změnil úvahy newtonovského typu.

V r. 1784 vypsala berlínská akademie cenu na „jasnou a přesnou teorii nekonečna v matematice." Výsledek nebyl zcela uspokojivý, cenu získal dnes méně známý matematik SIMON ANTOINE JEAN L'HUILLIER (1750 – 1840), který předložil teorii založenou na d'Alembertově definici limity. U Cauchyho se objevuje slovní formulace typu: *Když se hodnoty přiřazené proměnné blíží neomezeně k jisté hodnotě tak, že se od ní liší tak málo jak chceme, nazývá se tato hodnota limitou ostatních hodnot.* Teprve CARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815 – 1897) podal r. 1861 čistě aritmetickou definici limity funkce zbavenou představ o pohybu proměnných a vytvořil „statickou" ε-δ–definici, nezaloženou na dynamických nebo geometrických představách. I Bolzano se přesné definici limity velmi přiblížil; je však nutno připomenout, že jeho práce měly na bezprostřední vývoj soudobé matematiky jen zanedbatelný vliv.

V některých pracích se uvádí, že definici konvergence posloupnosti podal již r. 1655 Wallis. Nutná a postačující podmínka pro konvergenci posloupnosti (úplnost $\mathbb{R}$ – viz ještě dále) pochází rovněž od Cauchyho (1821). K jejímu důkazu použil „princip půlení intervalů" (viz důkaz Věty 2.4.4).

Podmínka z Věty 2.4.1 může sloužit k zavedení $\mathbb{R}$, užijeme-li ji místo axiómu (13). Vzhledem k její názorné geometrické povaze by při objasňování rozdílů mezi $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ měla být patrně intuitivně nejpochopitelnější; viz [3]. Byla ostatně v intuitivní rovině užívána již před Cauchym; to vysvětluje její spojení se jménem Bolzanovým. Právě v této pasáži se projevuje fakt, že přiřazování jmen objevitelů k tvrzením je velmi složitá a ošidná záležitost. Je lépe proto používat všude tam, kde je to možné či obvyklé, stručný věcný popis.

Poznamenejme, že Větu 2.4.1 uváděl Weierstrass ve svých přednáškách v r. 1874. Jeho důkaz využíval princip půlení intervalů, který však lze sledovat zpět přes Bolzana (1817) až de facto k ARCHIMEDOVI (asi 287 – 212 před n. l.). Věta bývá též často připisována Bolzanovi. Cantor ji použil při svém prvním důkazu nespočetnosti $\mathbb{R}$. Naznačme stručně jeho úvahu. Postupoval sporem: nechť posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje všechna reálná čísla. Pak lze volit interval $[\,a_1, b_1\,]$ tak, že neobsahuje bod x_1, potom interval $[\,a_2, b_2\,] \subset [\,a_1, b_1\,]$ neobsahující bod x_2, atd. Bod z (neprázdného) průniku všech intervalů $[\,a_n, b_n\,]$ není prvkem posloupnosti $\{x_n\}$, takže dospíváme ke sporu. Užití tzv. diagonální metody je mladšího data.

Metoda důkazu existence $\sqrt{2}$, resp. $\sqrt{a}$ pro $a > 0$, prezentovaná v Příkladu 2.4.15, je relativně velmi efektivní. Budeme-li takto počítat $\sqrt{2}$, dostaneme ze „špatně odhadnuté" počáteční hodnoty 5 postupně 5, 27/10, 929/540, 1446241/1003320,. . . . O rychlosti konvergence vypovídá následující tabulka, kde na prvním řádku je $\sqrt{2}$ s přesností na 20 desetinných míst; znak | odděluje platná místa v dalších řádcích. Povšimněte si, že jsme se po 7 krocích dostali na stejnou přesnost, bez ohledu na to, že jsme „startovali" z hodně špatného prvního přiblížení.

Vysvětlení této překvapivě velké „rychlosti konvergence" lze vyčíst z odhadů (2.12):

1,41421356237309504880	
5,00000000000000000000	2,70000000000000000000
1,72037037037037037037	1,4|4145536817765020133
1,414|47098136777100248	1,4142135|8579688376304
1,414213562373095|24278	1,41421356237309504880|

Stejný výpočet s počáteční hodnotou $1,25$ v šedesátkové soustavě provedli Babylóňané kolem r. 1900 před n. l. s výsledkem

$$\sqrt{2} \sim 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600} = 1{,}4142129\overline{629}\,,$$

a jak se uvádí v literatuře, je vysoce pravděpodobné, že použitý vzorec (2.11) pro případ $\sqrt{2}$ již znali.

Studium konvergence aritmetických průměrů členů posloupnosti lze stopovat až k pracím d'Alemberta (1768) a Daniela Bernoulliho (1700 – 1782) z r. 1771. Později se ukázalo mimořádně významné pro rozvoj sčítacích metod, umožňujících „sčítání" některých divergentních řad. Lemma 2.4.22, které dokázal Cauchy, dokazuje tzv. *regularitu* nejjednodušší, tzv. *Cesàrovy sčítací metody* (podrobněji viz dále).

Literatura:

[1] Bečvář, J.: *Lineární algebra*, Matfyzpress, Praha, 2000.

[2] Bican, L.: *Lineární algebra a geometrie*, Academia, Praha, 2000.

[3] Blum, W., Törner, G.: *Didaktik der Analysis*, Wanderhoek & Ruprecht, Göttingen, 1983.

[4] Browder, A.: *Mathematical analysis. An introduction*, Springer, New York, Berlin, 1996.

[5] Hairer, E., Wanner, G.: *Analysis by its history*, Springer, New York, 1995.

[6] Jarník, V.: *Diferenciální počet I*, Academia, Nakladatelství ČSAV, 1963.

[7] Mawhin, J.: *Analyse. Fondements, techniques, évolution*, De Boeck-Wesmael, Bruxelles, 1992.

Kapitola 3

Řady

V této kapitole budeme soustavně užívat poznatky, získané v Kapitole 2, proto by si je měl čtenář eventuálně znovu zběžně připomenout.

3.1 Základní poznatky

Připomeňme nejprve definici, kterou jsme uvedli již v Kapitole 2. Umožní nám bezprostředně řešit řadu přirozených otázek, se kterými se setkáme, pouhým odkazem na poznatky předcházející.

Definice 3.1.1. Pro posloupnost reálných čísel $\{a_k\}$ definujeme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \quad n \in \mathbb{N}\,;$$

takto definovaná čísla s_n nazýváme *částečné součty* řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Jestliže dále $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, tj. existuje *vlastní* limita $\{s_n\}$, pak říkáme, že *řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje* k s. Ve všech ostatních případech, tj. když součet neexistuje nebo $s = \pm\infty$, říkáme, že řada diverguje. Číslo s se nazývá *součet řady.*

Čísla a_k nazýváme *členy* řady a o a_k často hovoříme jako o k-tém členu řady. Nad a pod sumační symbol píšeme *meze* sčítání, a to jak u konečných součtů, tak i u řad. Pokud řada nekonverguje, nazývá se *divergentní.* Jestliže je $s = \pm\infty$, říkáme také často, že *řada diverguje* k $\pm\infty$.

Lemma 3.1.2. *Nutnou podmínkou pro konvergenci řady* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *je podmínka* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz. Zřejmě je $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$, z čehož limitním přechodem pro $n \to \infty$ obdržíme podle Věty 2.1.22 tvrzení lemmatu. $\square$

Poznámky 3.1.3. 1. Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ používáme ve dvojím různém významu, a to jak pro označení řady, tak i pro její součet. Proto musíme dávat pozor na smysl a v případě potřeby i slovně popsat, který význam máme na mysli.

2. Domluvíme se, že dokud neřekneme něco jiného, budeme u sumačního symbolu meze někdy vynechávat, *pokud budou rovny* 1 a ∞, tj. píšeme stručněji

$$\sum a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \,.$$

Taková úmluva nebude neměnná. Později, v další části výkladu o mocninných řadách, se nám bude hodit úmluva $\sum a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Pak klademe $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, ... a hovoříme o částečném součtu s_n (někdy i o n-tém částečném součtu), i když v tomto případě jde o součet prvních $(n+1)$ členů.

3. Konvergence řady závisí zřejmě jen na s_n pro skoro všechna n; přesněji: změnou konečně mnoha členů a_k řady $\sum a_k$ neovlivníme její *konvergenci*, ale můžeme tak samozřejmě změnit její *součet*. Jestliže tedy konverguje řada $\sum a_k$, konverguje i řada $\sum_{k=3}^{\infty} a_k$ a pro součty platí $\sum_{k=3}^{\infty} a_k = (\sum a_k) - a_1 - a_2$. Podobně je to i s divergencí, tam však *o součtech* nic netvrdíme.

4. Definice součtu je odvozena od definice limity. Budeme-li mít později k dispozici aparát pro limity posloupností komplexních čísel, automaticky budeme moci pracovat i s řadami s komplexními členy.

5. Název *divergentní* řada užil poprvé patrně Nicolas Bernoulli (1687 – 1759) r. 1713 (viz [7], str. 761). O historii vývoje pojmu konvergence řady pojednává např. [13].

Po dlouhou dobu byla *geometrická řada* jedinou řadou, jejíž konvergence byla přijatelně zdůvodněna. To je také motivem pro to, abychom jejím studiem začali.

Příklad 3.1.4. Pro všechna $q \neq 1$ platí (viz (1.11) v Kapitole 1)

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \,.$$

Již na střední škole se pracuje se vzorečkem

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \,, \qquad |q| < 1 \,, \tag{3.1}$$

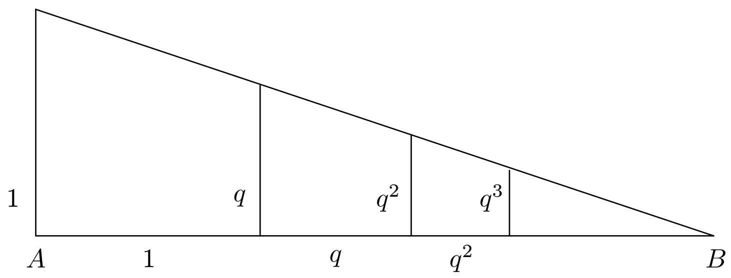
který nyní pomocí Bernoulliho nerovnosti dokážeme.

K důkazu vzorce pro součet geometrické řady je třeba ukázat, že pro zvolené q, $|q| < 1$, lze k danému $\varepsilon > 0$ nalézt takové $k \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq k$ platí

$$\left| s_n - \frac{1}{1-q} \right| < \varepsilon \,.$$

K tomu však stačí dokázat, že $|q|^n/|1-q| \to 0$, resp. že $|q|^n \to 0$. To jsme však dokázali v Příkladu 2.2.14, a tím je i vzorec (3.1) dokázán. Všimněme si ještě toho, že v případě $|\,q\,| \geq 1$ není splněna nutná podmínka z Lemmatu 3.1.2 pro konvergenci geometrické řady.

Konvergenci geometrické řady ilustruje Obr. 1. Platí $|AB| = 1 + q + q^2 + \cdots$. Obrázek podrobně vysvětlete!



Obr. 1.

Protože nemůžeme každý součet určovat vždy ad hoc, prozkoumáme zákonitosti, kterým řady podléhají, trochu podrobněji. Nejprve si všimneme jedné *důležité* souvislosti řad a posloupností jejich částečných součtů.

Lemma 3.1.5. *Řada $\sum a_n$ konverguje, právě když je posloupnost jejích částečných součtů cauchyovská, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > k$, platí*

$$|\, s_m - s_n \,| = |\, a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m \,| < \varepsilon \,.$$

Důkaz je při využití Věty 2.4.8 triviální. □

Je logické nazývat předchozí nutnou a postačující podmínku konvergence řady *Cauchyho* nebo *Bolzano-Cauchyho podmínkou pro řadu.* Neříká nic jiného než to, že posloupnost částečných součtů je cauchyovská, právě když je řada konvergentní.

Lemma 3.1.6. *Řada $\sum a_n$ konverguje, právě když její* zbytek po n-tém členu*, tj. součet řady*

$$r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \,, \qquad \textit{konverguje } k\ 0\,.$$

Důkaz. Konverguje-li $\sum a_k$, pak

$$|\, r_n \,| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - s_n\Big| = |\, s - s_n \,| \to 0\,.$$

Jestliže naopak platí $r_n \to 0$, pak pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že je $|r_n| < \varepsilon$ pro všechna $n \ge k$. Pak ale pro všechna $m, n \ge k$ je

$$|\, s_m - s_n \,| = |\, r_{m+1} - r_{n+1} \,| \le |\, r_{m+1} \,| + |\, r_{n+1} \,| < 2\varepsilon\,,$$

z čehož plyne druhá implikace. □

Příklad 3.1.7. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) =$$
$$= \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Odtud vyplývá

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1\,.$$

Podobný obrat se při sčítání řad často užívá. Je založen na vlastnosti, které se říká *teleskopičnost*; ta zhruba odráží fakt, že pro všechna dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$ má součet po úpravě stále týž počet členů. (Jejich limitu pak většinou snadno spočteme, neboť mnoho členů se při úpravě „zruší“).

Příklady 3.1.8. 1. Pro $|\,q\,| > 1$ dostaneme pro $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ snadno odhad

$$|\, s_{n+1} - s_n \,| = |\, q \,|^{n+1} \Big|\, \frac{q}{1-q} \,\Big| > \Big|\, \frac{q}{1-q} \,\Big|$$

takže Bolzano-Cauchyho podmínka není splněna; to dává pro $|\,q\,| > 1$ již zmíněnou divergenci geometrické řady.

2. Snadno nahlédneme, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < n\,;$$

je už trochu těžší dokázat, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, platí dokonce

$$2(\sqrt{n} - 1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1\,. \tag{3.2}$$

Z první nerovnosti snadno dostaneme divergenci řady $\sum 1/\sqrt{n}$.

3. Snadno nahlédneme, že i řada s členy $a_k = (-1)^k a$, $k \in \mathbb{N}$, tj. názorněji

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} a = a - a + a - a + \cdots$$

diverguje pro každé $a \neq 0$. K ověření stačí např. již to, že pouze pro $a = 0$ je splněna nutná podmínka z Lemmatu 3.1.2.

Příklad 3.1.9. Harmonická řada $\sum k^{-1}$ diverguje. Je tak jistým prototypem divergentní řady, jejíž nezáporné členy tvoří posloupnost konvergentní k 0. Toto pozorování pochází od Bernarda Bolzana (1781 – 1848) z r. 1817. Její divergence tedy nevyplývá z Lemmatu 3.1.2. Zvolíme-li však $a \in \mathbb{R}$ libovolně, lze nalézt částečný součet s_m této řady tak, že bude větší než a. To jsme již v Kapitole 2 ukázali odhadem (2.7). Popišme ještě jiný podobný odhad zajímavý z historického hlediska.

V letech 1689 – 1704 se zabývali Jacob Bernoulli (1654 – 1705) a Johann Bernoulli (1667 – 1748) řadami. Nalezli řadu důkazů divergence harmonické řady. Ten, který nyní popíšeme, pochází z r. 1689 od Jacoba a má podobnou základní myšlenku jako je ta, kterou jsme již použili: $n^2 - n$ členů v následujícím výrazu odhadneme tím nejmenším

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > (n^2 - n)\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

a tedy po přičtení výrazu $(1/n)$ k oběma stranám nerovnosti dostaneme

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1\,.$$

Toto však ukazuje, jak seskupit členy pro dosažení libovolně velkého částečného součtu:

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{5^2}\right) + \cdots\,.$$

Další postup je již zřejmý.

Poznámka 3.1.10. Z Bolzano-Cauchyho podmínky v Lemmatu 3.1.5 také snadno plyne divergence harmonické řady; pro její částečné součty platí

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

a tedy podmínka není splněna. Místo právě uvedeného jednoduchého odhadu lze užít např. odhadu z předcházejícího Příkladu 3.1.9.

Divergenci harmonické řady dokázal poprvé Nicole Oresme (1323 – 1382) kolem r. 1350. Další důkaz z Příkladu 3.1.9 pochází z knihy, která je vlastně souborem pěti prací. Poprvé ji vydal Jacobův synovec Nicolas Bernoulli jako Apendix knihy Jacoba Bernoulliho *Ars Conjectandi*, jedné z prvních knih věnovaných základům teorie pravděpodobnosti. V pracích Bernoulliů o řadách lze nalézt ještě řadu jiných důkazů divergence harmonické řady.

Odhady, které jsme použili pro divergenci harmonické řady, jsou dosti „pesimistické“. Tak např. z již dříve užitého odhadu

$$s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n+1}{2}$$

bychom odvodili, že k nalezení částečného součtu většího než 10 stačí sečíst 2^{19} prvních členů. Jiný analogický trik dává

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{9}\Big)+\Big(\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{99}\Big)+\Big(\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{999}\Big)+\cdots>\\ >\frac{9}{10}+\frac{90}{100}+\frac{900}{1000}+\cdots=\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\frac{9}{10}+\cdots,\end{aligned}\tag{3.3}$$

tedy

$$s_{10^n-1}=\sum_{k=1}^{10^n-1}\frac{1}{k}\geq\frac{9}{10}\,\frac{1-(9/10)^n}{1-9/10}\,.$$

Odtud snadno zjistíme, že k nalezení částečného součtu většího než 10 stačí sečíst „jen“ 10^{12} členů, ale moc si nepomohli. Později dokážeme přesnější odhad, pomocí kterého lze ukázat, že $s_n > 10$ pro $n > 12\,367$.

Ukazuje se tedy, že odhady pro divergenci harmonické řady jsou relativně velmi „hrubé“. Pro zajímavost uveďme jeden údaj z literatury (viz [5], str. 53). Pokud bychom chtěli na počítači, schopném sečíst milion členů harmonické řady za vteřinu, sčítáním vypočítat hodnotu prvního částečného součtu převyšující 100, museli bychom sčítat 10 quadrilionů let.

I pro divergentní řady však můžeme někdy úspěšně odhadnout velikost částečných součtů. Nerovnost z (3.2) v Příkladech 3.1.8 dává možnost odhadu, pomocí něhož lze obdržet např.

$$1998<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}<1999\,.$$

Ve vývoji pojmu konvergence lze, zhruba řečeno, vystopovat období, ve kterém se nikdo o konvergenci nestaral. To pak přešlo do fáze vědomého užívání konvergentních i divergentních řad; divergentní řady vlivem prací Louise Augustina Cauchyho (1789 – 1857) na dlouhou dobu z matematiky téměř zmizely. O tom, jaké byly úvahy tehdejších špičkových matematiků o řadách před zavedením pojmu konvergence, svědčí následující ukázka v Historické poznámce 3.1.11.

Historická poznámka 3.1.11. Ještě před vznikem teorie množin napsal Bernard Bolzano (1781 – 1848) knihu *Paradoxien des Unendlichen* (Paradoxy nekonečna). Knížka vyšla v Lipsku až v r. 1851 (nejdostupnější je patrně v překladu [2] Otakara Zicha, který vyšel v Nakladatelství ČSAV v Praze v r. 1963). Jako ukázku Bolzanových úvah uvádíme část § 32 z této knížky:

„Ještě v roce 1830 se pokusil dokázat autor, podepsaný M. R. S., v Gergonnových Annales de Mathématique (Sv. 20, č. 12), že známá nekonečná řada

$$a-a\;+a\;-a\;+a\;-a+\cdots\quad\text{in inf.}$$

má hodnotu $a/2$; položiv hodnotu oné řady $= x$, byl přesvědčen, že smí činit závěr $x = a - a + a - a + \cdots$ in inf. $= a - (a - a + a - a + \cdots$ in inf.), kde řada, uzavřená v závorkách, je identická s řadou, která se má vypočíst, a tedy že se může znovu položit $= x$, což dává $x = a - x$, a tedy $x = a/2$.

Klamný závěr tu není skryt příliš hluboko. Řada v závorce nemá zřejmě týž počet členů jako ta, která byla ponejprv položena $= x$; ale chybí jí první a. Její hodnota, kdyby ji vůbec bylo možno udat, by musila být označena $x - a$, což by však dávalo identickou rovnici $x - a = x - a$. „Avšak právě v tom“ mohlo by se třeba říci, „je něco paradoxního, že tato řada, která není jistě nekonečně velká, by neměla mít přesně určitelnou, měřitelnou hodnotu, zvláště když vzniká do nekonečna pokračujícím dělením čísla a číslem $2 = 1 + 1$, což je způsob vzniku, který mluví zcela pro to, aby její skutečná hodnota byla $a/2$.“

Připomínám, že existence výrazů pro veličiny, které neoznačují žádnou skutečnou veličinu, není sama o sobě ničím nepochopitelným, jak obecně uznáváme a musíme uznat u nuly. Zvláště pak řada, prohlásíme-li, že o ní chceme uvažovat jako o veličině, totiž o součtu jejích členů, musí být právě vzhledem k pojmu součtu (který patří k množinám, tj. k takovým souhrnům, u nichž není třeba dbát na pořadí jeho částí) taková, že nedozná žádné změny své hodnoty — ať provedeme jakoukoli změnu v pořadí jejích členů. U veličin musí totiž platit:

$$(A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B\,.$$

Tato vlastnost nám dává jasný důkaz, že znak, o kterém hovoříme:

$$a - a + a - a + a - a + \cdots \text{in inf.}\,,$$

není výrazem pro skutečnou veličinu. Neboť na veličině, která je tu znázorněna, bychom jistě nic nezměnili, kdyby vůbec nějaká veličina tím znázorněna byla, jestliže bychom obměnili onen znak takto:

$$(a - a) + (a - a) + (a - a) + \cdots \text{in inf.}\,, \tag{1}$$

neboť se tu nic jiného nestalo, než že se dva přímo po sobě následující členy spojily v částečný součet: což zřejmě musí být možné, neboť daná řada nemá vskutku mít poslední člen. Tím však dostaneme

$$0 + 0 + 0 + \cdots \text{in inf.}\,,$$

což je zřejmě pouze $= 0$.“

Poznámka 3.1.12. Pro ilustraci toho, jak se s řadami *zacházelo* v době, kdy ještě nebyl pojem konvergence konstituován, uveďme ukázku, jak se řadou z Příkladu 3.1.7 pracoval Johann Bernoulli. Použil následujících úprav:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots - \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\Big) = \\ &= \Big(\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots\Big) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}\,, \end{aligned}$$

a tedy po formální úpravě analogické té, se kterou jsme se seznámili v Příkladu 3.1.7

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots = 1\,.$$

Johann Bernoulli si byl vědom ošidnosti „odvozovacích“ úvah. Podobně totiž odvodil

$$2 = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots - \Big(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \cdots\Big) =$$
$$= \Big((2 - \frac{3}{2}) + (\frac{3}{2} - \frac{4}{3}) + \cdots\Big) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k}\,,$$

což je ve sporu s již odvozeným (správným) výsledkem. Všiml si však nejen toho, že v prvním případě platí pro použitou výchozí řadu $a_n = (1/n) \longrightarrow 0$ a že ve druhém případě platí $a_n = (n+1)/n \longrightarrow 1 \neq 0$, ale odhalil i to, že to je to podstatné; poznamenejme, že zápis je modifikován a je použito soudobé symboliky. Uvažte, že operace, kterou jsme naznačili, *je nekorektní*, odečítáme „člen po členu“ divergentní řady. V prvním případě dostáváme správný výsledek, jeho *korektní odvození* musí být však provedeno např. tak, jako v Příkladu 3.1.7, kde jsme pracovali s částečnými součty. Srovnej s [14].

Lemma 3.1.13. *Jsou-li $\sum a_n$ a $\sum b_n$ konvergentní řady, $c \in \mathbb{R}$, pak platí*

$$\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n\,, \qquad \textit{a také} \qquad \sum c a_n = c \sum a_n\,.$$

Důkaz. Tvrzení plyne snadno z definice součtu řady a Věty 2.1.22. Tím jsme zároveň získali základní jednoduchá pravidla i pro zacházení s řadami. □

Definice 3.1.14 (Cauchy 1821). Nechť pro řadu $\sum a_n$ platí $\sum |a_n| < \infty$. Potom říkáme, že řada $\sum a_n$ *konverguje absolutně.*

Věta 3.1.15. *Jestliže řada $\sum a_n$ konverguje absolutně, pak také konverguje.*

Důkaz. Z odhadu, který dostaneme užitím trojúhelníkové nerovnosti

$$|\, a_{n+1} + \cdots + a_m \,| \le |\, a_{n+1} \,| + \cdots + |\, a_m \,| = \big|\, |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| \,\big|\,,$$

a z předcházejícího lemmatu plyne, že je-li splněna Bolzano-Cauchyho podmínka pro posloupnost částečných součtů řady $\sum |a_n|$, je splněna i pro posloupnost částečných součtů řady $\sum a_n$. □

Poznámka 3.1.16. Dokážeme-li absolutní konvergenci řady $\sum a_n$, víme také, že konverguje. Řada však může konvergovat, aniž konverguje absolutně. Později uvidíme, že

$$\sum \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{konverguje, i když} \quad \sum \frac{1}{n} \quad \text{diverguje.}$$

Zkuste si rozmyslet důkaz, je celkem lehký; je založen na vyšetření posloupností $\{s_{2n}\}$ a $\{s_{2n+1}\}$ sudých a lichých částečných součtů.

Tvrzení, která umožňují rozhodnout o konvergenci nebo divergenci dané řady, se zpravidla nazývají *kritéria konvergence.* Do jisté míry zde platí přímá úměrnost: čím jednodušší kritérium a snazší aplikovatelnost, tím je kritérium „slabší“ a lze jím rozhodnout o konvergenci či divergenci „menšího počtu“ řad.

3.2 Řady s kladnými členy

Protože výsledky pro řady s kladnými členy, resp. nezápornými členy jsou jednodušší a lze je aplikovat na absolutní konvergenci a tedy zprostředkovaně i na konvergenci, která z ní následně vyplývá, *budeme v dalších větách části 3.2 pracovat s řadami s nezápornými členy.*

Definice 3.2.1. Platí-li pro členy řad $\sum a_n$, $\sum b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $a_n \leq b_n$, pak budeme říkat, že řada $\sum a_n$ je *minorantní řadou* k řadě $\sum b_n$ a $\sum b_n$ je *majorantní řadou* k $\sum a_n$ [1]).

Věta 3.2.2 (Cauchy 1821; srovnávací kritérium). *Nechť pro řady $\sum a_n$ a $\sum b_n$ platí $0 \leq a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom*

$$(1)\ \sum b_n < +\infty \ \Rightarrow\ \sum a_n < +\infty\,,\ \ a\ \ (2)\ \sum a_n = +\infty \ \Rightarrow\ \sum b_n = +\infty\,.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že nerovnost mezi členy platí pro *všechna* $n \in \mathbb{N}$. Pak pro částečné součty s_n a s'_n řad $\sum a_n$ a $\sum b_n$ platí $s_n \leq s'_n$ a z věty o nerovnostech a limitách plyne zbytek důkazu. □

Příklad 3.2.3. Rozhodněte, pro která $p \in \mathbb{N}$ konverguje řada $\sum n^{-p}$.

Pro $p = 1$ řada zřejmě diverguje, neboť jde o harmonickou řadu. Pro $p \geq 2$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$n^2 \leq n^p\,, \quad \text{a tedy} \quad \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^p}\,.$$

Dokážeme, že řada $\sum n^{-2}$ konverguje; pomocí jejích částečných součtů odhadneme shora částečné součty řady $\sum n^{-p}$. Dokážeme-li, že je

$$\sum \frac{1}{n^2} < \infty\,,$$

konvergují vyšetřované řady pro všechna $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Protože platí

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

snadno dostáváme jako v Příkladu 3.1.7 (opět pro všechna $n \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2\,.$$

Příklad 3.2.4. Předcházející jednoduché tvrzení se ukazuje jako velmi užitečné: je $(2n^2 - 4n - 1)/n^2 \to 2$, a proto pro všechna $n \in \mathbb{N}$ až na konečný počet je $1 < (2n^2 - 4n - 1)/n^2 < 3$. Existuje tedy $K > 0$ tak, že $1/(2n^2 - 4n - 1) \leq K/n^2$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Proto řada $\sum (2n^2 - 4n - 1)^{-1}$ konverguje, neboť v Příkladu 3.2.3 jsme dokázali, že řada $\sum n^{-2}$ konverguje.

---

[1]) Užívají se i zkrácené názvy *minoranta* a *majoranta*.

Příklad 3.2.5. Protože $0 < n \leq n!$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je $n! \to +\infty$ a $(n!)^{-1} \to 0$. Řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \tag{3.4}$$

splňuje zřejmě nutnou podmínku pro konvergenci z Lemmatu 3.1.2. Protože je (použijeme nepřesného ale názorného popisu řady, z něhož je patrná majorantní řada i odhad součtu)

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \leq 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots = 3\,, \tag{3.5}$$

plyne ze srovnávacího kritéria a Příkladu 3.1.7 konvergence řady (3.4).

Příklad 3.2.6 (důležitý). Jak již víme z Poznámky 1.4.30, lze každému reálnému číslu s přiřadit jeho *desetinný rozvoj*. Nyní zpřesníme naše představy o tom, co to znamená v případě, že je tento rozvoj nekonečný. Zřejmě se stačí zabývat vyjádřením čísla $s \in \mathbb{R}$ pro případ $0 \leq s < 1$, jehož desetinný rozvoj

$$0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots\,, \qquad a_k \in \mathbb{N},\ 0 \leq a_k \leq 9\,, \tag{3.6}$$

je nekonečný. Pak jsme nuceni místo konečného součtu pracovat s řadami. Je-li (3.6) pomocí indukce sestrojený desetinný rozvoj s, platí

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}\,.$$

Nejde-li o konečný součet (při $a_k = 0$ pro všechna dostatečně velká k), musíme vyjasnit, zda řada konverguje pro každé uvažované s. Avšak to je zřejmé, neboť

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = (9/10)\frac{1}{1 - (1/10)} = 1\,.$$

Nalezli jsme konvergentní majorantní řadu k rozvoji a tuto řadu jsme i sečetli. Rozvoje tedy budeme chápat jako řady. Zřejmě je každému s přiřazen jeho rozvoj. Může mít nějaké s dva různé rozvoje? V některých případech ano, neboť snadno zjistíme, že např. platí $0{,}1 = 0{,}0999\ldots = 0{,}0\overline{9}$. To ale napovídá, jak budou vypadat všechny takové případy. Jsou-li $s := 0, a_1 a_2 \ldots$ a $t := 0, b_1 b_2 \ldots$ dvě čísla s *různými* desetinnými rozvoji, označme n nejmenší přirozené číslo, pro které je $a_n \neq b_n$, a předpokládejme, že $a_n < b_n$. Je zřejmě $t - s \geq 0$, protože

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \geq \frac{b_n - a_n}{10^n} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{b_n - a_n - 1}{10^n}\,,$$

a tento rozdíl je roven 0 *pouze v případě*, že je $b_n = a_n + 1$ a $b_k = 0$, $a_k = 9$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $k > n$. Tedy pouze k rozvojům „s periodickou devítkou“ existuje jiný (konečný) desetinný rozvoj, reprezentující totéž reálné číslo. Proto musíme v případě, že potřebujeme jednoznačné vyjádření reálných čísel desetinnými rozvoji, jednu z těchto možností vyjádření „zakázat“.

Tímto doplňkem jsme odstranili potíže se vzájemnými převody zlomků a desetinných rozvojů. Je např.

$$3{,}15\overline{37} = \frac{3}{1} + \frac{15}{10^2} + \frac{37}{10^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{100^k} = \frac{3\cdot 99\cdot 10^2 + 15\cdot 99 + 37}{9900} = \frac{31222}{9900}\,.$$

I když jde o látku, která by měla být zvládnuta na střední škole, je tak důležitá, že jsme si ji museli alespoň na jednom příkladu připomenout.

Nyní již též víme, že každý desetinný rozvoj je rozvojem nějakého reálného čísla. Proto snadno zjistíme, že

$$a := 0{,}10100100010000100000\ldots$$

je reálné číslo, které není racionální. Příklad se někdy uvádí již na střední škole, ale „bez varování“, tj. bez upozornění, že je založen na víře, že lze množinu všech desetinných rozvojů ztotožnit s $\mathbb{R}$.

Příklad 3.2.7. Označme $a_n := (1+1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí, neboť pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí podle AG-nerovnosti z Lemmatu 1.3.28, kterou použijeme na součin n činitelů a_n a 1,

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 < \left(\frac{n(1+1/n)+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}\,. \tag{3.7}$$

Podobný obrat použijeme v dalším textu ještě často. Z binomické věty, kterou jsme připomněli v Příkladu 1.3.26, a z odhadu (3.5) snadno dostaneme

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n!}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{3!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big) + \cdots + \\ &+ \frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\ldots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big) < \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} < 3\,,\end{aligned}$$

takže posloupnost $\{a_n\}$ je shora omezená. Označíme-li $\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} a_n$, plyne odtud i nerovnost $\mathrm{e} \le \sum_{k=0}^{\infty}(1/k!)$. Dokažme ještě obrácenou nerovnost, čímž dostaneme vyjádření čísla e pomocí řady. Zvolme $m, n \in \mathbb{N}$, $m \le n$, a rozepišme jako výše

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 1 + 1 + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{m!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\ldots\Big(1-\frac{m-1}{n}\Big)\,.$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostaneme *pro každé* $m \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{m!}\right) = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} \tag{3.8}$$

a dalším limitním přechodem pro $m \to \infty$ dostaneme $\mathrm{e} \geq \sum_{k=0}^{\infty}(1/k!)$. Platí tedy

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,. \tag{3.9}$$

Příklad 3.2.8. Není obtížné ukázat, že posloupnost o členech $b_n := (1+1/n)^{n+1}$ je klesající a má rovněž limitu e.

Poslední tvrzení je zřejmé, neboť platí

$$\lim b_n = \lim a_n \cdot \lim\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = \lim a_n = \mathrm{e}\,.$$

Jako v (3.7) dostaneme, že také posloupnost $c_n := (1-1/n)^n$ je rostoucí a je

$$b_n = (1+1/n)^{n+1} = ((n+1)/n)^{n+1} = (1-1/(n+1))^{-(n+1)} = 1/c_{n+1}\,,$$

takže posloupnost $\{b_n\}$ je klesající. Zřejmě pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < b_n$ a je

$$\mathrm{e} - a_n < b_n - a_n = (1+1/n)^n((1+1/n)-1) < \mathrm{e}/n\,,$$

což dává odhad chyby při výpočtu. Pokud se čtenáři zdají vyhlídky na možnost výpočtu e pomocí posloupnosti $\{a_n\}$ nebo $\{b_n\}$ velmi pesimistické, je to správné tušení. Proto jsme si také ukázali vyjádření e pomocí (3.9), které je v tomto ohledu mnohem příznivější (řada konverguje *velmi* rychle); kvantitativně to vyjadřuje dále uvedený odhad (3.10).

Historická poznámka 3.2.9. Všimněme si blíže historie. Jedním z prvních objektů podrobného studia řad byla tzv. *binomická řada*. Zmíníme se o ní krátce na tomto místě, abychom mohli přiblížit některé úvahy, týkající se čísla e. Z binomické věty známe vyjádření $(1+x)^n$ pro přirozená čísla n. Platí např.

$$(1+x)^3 = 1 + \frac{3}{1}x + \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}x^2 + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \cdots\,.$$

Vpravo stojí polynom třetího stupně, neboť výrazy u $x^4, \ldots$, tvořené analogicky jako rozepsané binomické koeficienty jsou rovny nule. Toto zdánlivě absurdní vyjádření má rozumný důvod. Na základě podrobného studia dospěl Isaac Newton (1642 – 1727) k binomickému rozvoji (budeme se jím zabývat podrobně později). Dospěl tak k vyjádření typu

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1/2}{1!}x + \frac{(1/2)(1/2-1)}{2!}x^2 + \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!}x^3 + \cdots\,,$$

kde se vpravo místo polynomu známého z binomické věty objevuje *nekonečný* součet. Tohoto vyjádření využil Leonhard Euler (1707 – 1783) v následující úvaze, která je z práce z r. 1748.

Euler používal při zavádění exponenciální a logaritmické funkce *nekonečně velkých* a *nekonečně malých* čísel. Tento nástroj byl později z rigorózních matematických úvah vymýcen a vrátil se do nich v modifikované podobě teprve v tomto století ve formě *hyperreálných čísel*; jsou základním prostředkem tzv. *nestandardní analýzy.* Část jeho úvah si v nepatrně modifikovaném označení přiblížíme. V úvahách, které uvedené pasáži předcházely, zavedl Euler logaritmus x při základu a jako takový exponent $y = \log_a x$, pro který platí $a^y = x$. Dále po poznámce, že $a^0 = 1$ píše pro nekonečně malé číslo ε rovnost

$$a^{\varepsilon} = 1 + k\varepsilon$$

s tím, že konstanta k závisí na a. Pro (konečné) číslo x pak zavádí nekonečně velké číslo N vztahem $N = x/\varepsilon$. Úpravami postupně dostává s využitím binomického rozvoje

$$\begin{aligned} a^x &= a^{N\varepsilon} = (a^{\varepsilon})^N = (1 + k\varepsilon)^N = \left(1 + \frac{kx}{N}\right)^N = \\ &= 1 + \frac{N}{1!}\left(\frac{kx}{N}\right) + \frac{N(N-1)}{2!}\left(\frac{kx}{N}\right)^2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\left(\frac{kx}{N}\right)^3 + \cdots . \end{aligned}$$

Jestliže nyní píšeme všechny výrazy obsahující N v každém sčítanci do samostatného zlomku a užijeme-li dalšího Eulerova obratu (N je nekonečně velké)

$$1 = \frac{(N-1)}{N} = \frac{(N-2)}{N} = \cdots ,$$

dostáváme

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k^2x^2}{2!} + \frac{k^3x^3}{3!} + \cdots .$$

Nyní Euler dosadil $x = 1$ a dostal vztah mezi a a k

$$a = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \cdots .$$

Číslo e pak zavedl jako tu hodnotu a, pro kterou je $k = 1$. Ukázal, že jde o základ přirozených (hyperbolických) logaritmů, tj. že pro

$$\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

platí (po dosazení za a a k) vzorec

$$\mathrm{e}^x = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N ,$$

který můžeme v soudobém označení přepsat do známého tvaru

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

Příklad 3.2.10. Snadno nahlédneme, že platí (srovnej s (3.8))

$$\mathrm{e} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}\right) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{(m+1)!}\sum_{n=0}^{\infty}(m+1)^{-n} ,$$

resp. po sečtení řady vpravo

$$0 < \mathrm{e} - s_m < 1/(m(m!))\,. \tag{3.10}$$

Kromě odhadu zbytku či chyby při výpočtu hodnoty e pomocí řady získáváme i nástroj, pomocí kterého dokážeme iracionalitu čísla e.

Lemma 3.2.11. *Číslo* e *je iracionální.*

Důkaz. Budeme postupovat sporem. Nechť $\mathrm{e} = p/q$, kde $p, q \in \mathbb{N}$, $q > 1$. Z odhadu (3.10) dostáváme pro $m = q$

$$0 < q!(\mathrm{e} - s_q) < q^{-1}\,.$$

Ve shodě s předpokladem je $(q!) \cdot \mathrm{e}$ celé číslo a také číslo $(q!) \cdot s_q$ je zřejmě celé. Odtud ale plyne existence celého čísla v intervalu $(0, 1)$, a to je spor. □

Příklad 3.2.12. Představme si, že vynecháme z harmonické řady všechny členy tvaru $(1/n)$, které mají v dekadickém zápisu jmenovatele n alespoň jedenkrát použitu určitou, pevně zvolenou číslici, např. 0. Dostaneme tak řadu

$$\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \cdots + \frac{1}{29} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{91} + \cdots + \frac{1}{99} + \frac{1}{111} + \cdots + \frac{1}{119} + \cdots\,.$$

Ukážeme, že každá taková řada konverguje. Odhadneme nejprve shora všechny zlomky s jednomístným jmenovatelem hodnotou 1; těchto zlomků je maximálně 9 (pokud jsme si vybrali číslici 0), resp. 8. Zlomky s dvoumístným jmenovatelem odhadneme hodnotou $(1/10)$; těchto zlomků je pro výběr číslice 0 maximálně $90 - 9 = 81$, resp. opět ještě méně. Zlomky s trojmístným jmenovatelem odhadneme hodnotou $(1/100)$; těchto zlomků je maximálně $9^3 = 729$, atd. Proto je součet při každém z možných výběrů menší než

$$\frac{9}{1} + \frac{9^2}{10} + \frac{9^3}{100} + \cdots = 9\left(1 + \frac{9}{10} + \frac{9^2}{100} + \cdots\right) = 90\,.$$

Tyto řady konvergují velice pomalu, ale dají se přesto relativně snadno s dostatečnou přesností sečíst. Nelze však postupovat „hrubou silou“. Jednoduchý odhad ukazuje proč. Obdobným postupem jako při důkazu konvergence odhadneme (např. pro 0), že zbytek po sečtení všech členů, u nichž má jmenovatel nejvýše n číslic, dostaneme sečtením 9^{n+1} zlomků se jmenovatelem menším než 10^{n+1}, atd. Zbytek je tedy po sečtení 9^n členů (jemněji: dokonce po $9 + 9^2 + 9^3 + \cdots + 9^n$) větší než

$$\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} + \left(\frac{9}{10}\right)^{n+2} + \left(\frac{9}{10}\right)^{n+3} + \cdots = 10 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}\,.$$

Odtud lze spočítat, že vezmeme-li v úvahu začátek řady (3.11) až po třináctimístné jmenovatele, musíme sečíst $9^{13} > 2,5 \times 10^{12}$ členů, přičemž zbytek bude stále větší než $10 \times (9/10)^{14} > 2\,!$

Věta 3.2.13 (Cauchy 1821; odmocninové kritérium). *Nechť pro číslo q, $0 \le q < 1$, a řadu $\sum a_n$ s nezápornými členy a_n platí pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$*

$$\sqrt[n]{a_n} \le q\,. \tag{3.11}$$

Potom řada $\sum a_n$ konverguje.

Důkaz. Stačí se omezit na případ, že odhad platí pro *všechna* $n \in \mathbb{N}$. Z nerovnosti (3.11) plyne $a_n \le q^n$ a geometrická řada s kvocientem $0 \le q < 1$ konverguje. Zbytek je důsledkem srovnávacího kritéria. $\square$

Poznámka 3.2.14. Je-li $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ *pro nekonečně mnoho* $n \in \mathbb{N}$, řada diverguje; pak totiž nemůže platit $a_n \to 0$.

Historická poznámka 3.2.15. Jak jsme se již zmínili v Historické poznámce 3.2.9, dospěl Newton k binomickému rozvoji. Vyjádřil tak např.

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1/2}{1!}\,x + \frac{(1/2)(1/2-1)}{2!}\,x^2 + \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!}\,x^3 + \cdots\,, \tag{3.12}$$

přičemž vpravo stojí řada. Otázkami konvergence takto vzniklé řady se však začali matematici zabývat později. Patrně prvním, který se o to pokusil, byl Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783), který zkoumal, pro která x rovnost v (3.12) platí. Speciálně vyšetřoval případ (podrobněji viz [4])

$$\sqrt{1 + \frac{200}{199}} = 1 + \frac{1/2}{1!}\left(\frac{200}{199}\right) + \frac{(1/2)(1/2-1)}{2!}\left(\frac{200}{199}\right)^2 + \\ + \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!}\left(\frac{200}{199}\right)^3 + \cdots\,.$$

Pro částečné součty s_{100} a s_{101} platí

$$s_{100} = 1,416223987 \qquad \text{a podobně} \qquad s_{101} = 1,415756552\,,$$

přičemž správná hodnota činí $1,41598098$; mohlo by se tedy zdát, že řada „konverguje“ (tento pojem se však teprve postupně formoval). Obecný člen zkoumané řady je tvaru

$$a_n = \frac{(1/2)(1/2-1)\dots(1/2-n+2)}{(n-1)\,!}\left(\frac{200}{199}\right)^{n-1}.$$

Geometrickou řadu charakterizuje konstantní poměr po sobě následujících členů. To napovídá k pokusu udělat totéž pro zkoumaný binomický rozvoj. Výpočtem můžeme snadno ověřit, že platí

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(1/2-n+1)}{n}\,\frac{200}{199}\right| = \left(1 - \frac{3}{2n}\right)\frac{200}{199}\,.$$

Jak d'Alembert ukázal, tento poměr je větší než 1, právě když je $n > 300$. Proto absolutní hodnoty členů řady od tohoto „zlomu“ začínají růst a nemohou tak konvergovat k 0; řada tedy *diverguje*.

Věta 3.2.16 (Cauchy 1821*; podílové kritérium). *Nechť pro q, $0 \le q < 1$, a pro řadu $\sum a_n$ s kladnými členy a_n platí pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q\,.$$

Potom řada $\sum a_n$ konverguje.

Historická poznámka 3.2.17. V české matematické literatuře je toto kritérium často nazýváno d'Alembertovo kritérium; viz předcházející Poznámka 3.2.15. Je-li kritérium připisováno d'Alembertovi, datuje se rokem 1768. Poznamenejme, že však jeho první korektní důkaz pochází od Cauchyho (viz též [8]).

Důkaz. Opět budeme předpokládat, že odhad platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Z nerovnosti plyne

$$a_{n+1} \le q a_n \le q^2 a_{n-1} \le \cdots \le q^n a_1\,.$$

Odtud opět plyne ze srovnávacího kritéria konvergence $\sum a_n$. $\square$

Poznámka 3.2.18. Je-li $a_{n+1}/a_n \ge 1$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, řada diverguje. Pak totiž $a_{n+1} \ge a_n \ge \cdots \ge a_1$ a $\lim a_n \ne 0$. Odtud např. dostáváme opět (absolutní) konvergenci geometrické řady pro všechna q, $|q| < 1$ a její divergenci pro $|q| > 1$.

Věta 3.2.19 (Jensen 1888). *Nechť existují $\alpha_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, a $\beta > 0$ taková, že pro řadu $\sum a_n$ s kladnými členy a_n platí pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$*

$$\alpha_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - \alpha_{n+1} > \beta\,. \tag{3.13}$$

Potom řada $\sum a_n$ konverguje. Toto tvrzení budeme nazývat Jensenovo kritérium.

Důkaz. Opět budeme předpokládat, že odhad platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Z nerovnosti (3.13) plyne snadno pro $n = 1$

$$a_2 < (\beta)^{-1}(\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2)\,,$$

resp. pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$,

$$a_k < (\beta)^{-1}(\alpha_{k-1} a_{k-1} - \alpha_k a_k)\,.$$

Jelikož stačí dokázat pro posloupnost částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ její omezenost shora, plyne odtud sečtením odhad nezávislý na n

$$s_n - a_1 < (\beta)^{-1}(\alpha_1 a_1 - \alpha_n a_n) \le (\beta)^{-1}\alpha_1 a_1$$

Odtud plyne konvergence $\sum a_n$. $\square$

Poznámka 3.2.20. Položíme-li $\alpha_n = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, dostaneme

$$a_n/a_{n+1} - 1 > \beta, \qquad \text{neboli} \qquad a_n/a_{n+1} > 1 + \beta > 1\,,$$

a tak znovu obdržíme podílové kritérium.

Věta 3.2.21 (Raabe 1832). *Nechť pro q, $q > 1$, a pro řadu s kladnými členy $\sum a_n$ platí*

$$n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) \ge q > 1 \quad \textit{pro skoro všechna } n \in \mathbb{N}\,. \tag{3.14}$$

Potom řada $\sum a_n$ konverguje. Toto tvrzení budeme nazývat Raabeho kritérium.

Důkaz. Volme ve Větě 3.2.19 [2]) $\alpha_n = n$ a opět předpokládejme, že odhad platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dostáváme tak

$$n\frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) > \beta \qquad \text{neboli} \qquad n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1 + \beta > 1\,,$$

tedy podmínku z dokazované věty. □

Poznámka 3.2.22. Jestliže pro členy řady s kladnými členy $\sum a_n$ platí

$$n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) \le 1 \quad \text{pro skoro všechna } n \in \mathbb{N}\,,$$

pak $\sum a_n$ diverguje. Skutečně, z podmínky snadno dostaneme pro skoro všechna n nerovnost $na_n \le (n+1)a_{n+1}$, tedy posloupnost o členech $x_n = na_n$, $n \in \mathbb{N}$, je neklesající a platí $x_1 = a_1 > 0$. Pro všechna $n \ge 2$ platí

$$a_1 \le na_n\,, \quad \text{resp.} \quad a_n \ge \frac{a_1}{n}\,.$$

Protože kladný násobek $\sum a_1/n$ harmonické řady diverguje, diverguje i řada $\sum a_n$.

Poznámka 3.2.23. Pomocí Jensenova kritéria lze jednoduše dokázat ještě další užitečná kritéria. Tak např. volby

$$\alpha_n = n \log n\,, \quad \alpha_n = n \log n \log\log n,\ \ldots$$

dávají cestu ke kritériím, která objevil Joseph L. F. Bertrand (1822 – 1900). Na druhé straně Jensenovo kritérium není k důkazu Raabeho kritéria nutné (viz níže uvedený důkaz, nebo např. [11], str. 67).

Poznámka 3.2.24. Ve všech shora uvedených kritériích jsme žádali splnění podmínek pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, dokazovali jsme je však pouze pro speciální případ, kdy podmínky platily pro *všechna* $n \in \mathbb{N}$. Vynecháním konečného počtu členů řady se však obecnější případ převede na dokazovaný speciální případ.

[2]) Níže dokážeme Raabeho kritérium nezávisle na kritériu Jensenově.

Kritériím lze dát i tzv. „limitní formu“: jako inspirace nám může posloužit Příklad 3.2.4. Ukažme si to podrobněji na následujícím tvrzení:

Věta 3.2.25 (limitní srovnávací kritérium). *Nechť pro členy řad s nezápornými členy* $\sum a_n$ *a* $\sum b_n$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in (0, +\infty)\,.$$

Potom obě řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ *současně konvergují nebo současně divergují.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že obě řady mají *kladné* členy. Podle Lemmatu 2.4.12 existují tedy čísla $K, L \in (0, +\infty)$ tak, že pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $Ka_n \le b_n \le La_n$. Z těchto nerovností plyne tvrzení užitím srovnávacího kritéria. □

Limitní verze dalších kritérií se dokazují analogickým postupem. Shrneme je do jediného tvrzení:

Věta 3.2.26 (limitní verze kritérií). *Nechť pro řadu* $\sum a_n$, $a_n \ge 0$ *platí*

$$\text{(1)} \quad \lim \sqrt[n]{a_n} < 1\,, \quad \textit{resp.} \quad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1\,, \quad \textit{resp.} \quad \lim n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) > 1\,,$$

pak řada $\sum a_n$ *konverguje. Jestliže platí*

$$\text{(2)} \quad \lim \sqrt[n]{a_n} > 1\,, \quad \textit{resp.} \quad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1\,, \quad \textit{resp.} \quad \lim n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) < 1\,,$$

pak řada $\sum a_n$ *diverguje.*

Důkaz. Tvrzení z Věty 3.2.26 jsou důsledkem již dokázaných kritérií a věty o limitách posloupností a nerovnostech (Věta 2.3.1). Platí-li totiž např. nerovnost $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, platí pro vhodné q i $\sqrt{a_n} \le q < 1$ pro skoro všechna n. Podobně postupujeme v ostatních případech. □

Příklad 3.2.27. Snadno nahlédneme, že řada $\sum n/2^n$ konverguje podle odmocninového kritéria, neboť je $\sqrt[n]{n}/2 \to 1/2 < 1$.

Příklad 3.2.28. Podle podílového kritéria řada $\sum x^n/n!$ konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, protože platí $(|x|^{n+1}n!)/(|x|^n(n+1)!) = |x|/(n+1) \to 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 3.2.29. Jsou-li limity v předešlé větě rovny 1, nelze rozhodnout; řada $\sum(1/n)$ diverguje a řada $\sum(1/n^2)$ konverguje.

Příklad 3.2.30 (Swineshead asi 1350). Platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots = 2\,.$$

Řadě tohoto typu se někdy říká *aritmeticko-geometrická* řada. Je speciálním případem obecnější řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$, kde $\{a_n\}$ je aritmetická posloupnost a $\{b_n\}$ geometrická posloupnost. Nechť platí

$$a_n = a_0 + nd, \quad b_n = b_0 q^n, \quad |q| < 1 .$$

Předpokládejme, že $b_0 q \neq 0$ a $d \neq 0$, neboť jinak je vyšetření chování řady jednoduché. Nejprve dokážeme konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(a_0 + (n+1)\,d)\, b_0\, q^{n+1}}{(a_0 + nd)\, b_0\, q^n} \right| = |q| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|a_0 + (n+1)d|}{|a_0 + nd|} = |q| < 1 ,$$

a řada konverguje absolutně podle podílového kritéria. Určíme její součet. Můžeme pracovat s částečnými součty, ale i s řadami, neboť jejich konvergenci jsme si již dokázali (odůvodněte jednotlivé kroky podrobně). Použijeme opět schématického zápisu, neboť je názorný a lépe nám ukáže podstatu věci. Platí

$$\begin{aligned} s &= a_0\, b_0 + (a_0 + d) b_0\, q + (a_0 + 2d) b_0\, q^2 + (a_0 + 3d) b_0\, q^3 + \cdots , \\ s\, q &= \phantom{a_0\, b_0 + {}} a_0\, b_0\, q + (a_0 + d) b_0\, q^2 + (a_0 + 2d) b_0\, q^3 + \cdots , \end{aligned}$$

a po vertikálním odečtení stejnolehlých členů a úpravě dostaneme

$$s(1-q) = a_0\, b_0 + d\, b_0\, q + d\, b_0\, q^2 + d\, b_0\, q^3 + \cdots .$$

Tedy

$$s = \frac{a_0\, b_0 + d\, b_0\, q\, (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots)}{1-q} = \frac{a_0\, b_0}{1-q} + \frac{d\, b_0\, q}{(1-q)^2} .$$

Pro $a_0 = 0$, $b_0 = d = 1$ a $q = 1/2$, pak získáváme také $\sum_{n=1}^{\infty} n 2^{-n} = 2$. Všimněte si, že vzorec platí i pro speciální případy, které jsme na začátku důkazu vyloučili.

Lemma 3.2.31. *Nechť $\{x_n\}$ je konvergentní posloupnost a nechť $x_n \to x$. Definujme $y_n = x_n - x_{n+1}$. Potom je řada $\sum y_n$ konvergentní a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = x_1 - x .$$

Důkaz. Rozepsáním zjistíme, že pro n-tý částečný součet s_n řady $\sum y_n$ platí

$$s_n = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_n - x_{n+1}) = x_1 - x_{n+1} ;$$

tato „teleskopičnost“ a limitní přechod pro $n \to \infty$ dává požadované tvrzení. $\square$

Předcházející lemma je vcelku jednoduchým nástrojem, pomocí něhož můžeme dokázat Raabeho kritérium přímo, bez kritéria Jensenova. Je zajímavé i s ohledem na vztah posloupností a řad.

Jiný důkaz Věty 3.2.21. Jako v předcházejících případech budeme předpokládat, že podmínka je splněna pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Označme $\alpha := q - 1$; zřejmě je $\alpha > 0$. Nerovnost z podmínky (3.14) upravíme na tvar

$$na_n - na_{n+1} \geq qa_{n+1}\,, \quad \text{resp.} \quad na_n - (n+1)a_{n+1} \geq \alpha a_{n+1}\,.$$

Protože $\alpha a_{n+1} > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je $na_n > (n+1)a_{n+1}$, tedy posloupnost o členech $x_n = na_n$, $n \in \mathbb{N}$, je klesající posloupnost kladných čísel, a proto konverguje. Podle Lemmatu 3.2.31 konverguje též řada $\sum y_n$ o členech

$$y_n = x_n - x_{n+1} = na_n - (n+1)a_{n+1}$$

a je majorantní řadou k řadě $\sum \alpha a_{n+1}$. Podle srovnávacího kritéria tedy konverguje řada $\sum \alpha a_{n+1}$ a proto též konverguje řada $\sum a_n$. □

Poznámka 3.2.32. V Lemmatu 3.2.31 použitý „trik“ je velmi efektivní při sčítání řad určitého typu; někdy se nazývají *teleskopické řady.* Již jsme se s nimi jednou setkali v Příkladu 3.1.7, situace však může být složitější. Např. platí

$$\sum_2^\infty \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_2^\infty \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{3}{4}\,.$$

Při zdůvodnění výpočtu je třeba pracovat s částečnými součty, rozepsání a „zrušení“ nekonečně mnoha sčítanců

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\right)$$

není důkaz!

Poznámka 3.2.33. Je zřejmé, že jestliže pro řadu $\sum a_n$, $a_n > 0$, platí $\lim a_{n+1}/a_n < 1$, pak také platí

$$\lim n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \infty$$

a o konvergenci $\sum a_n$ lze rozhodnout i podle limitního Raabeho kritéria. Avšak limitní Raabeho kritérium je „silnější“. Vyšetřování binomického rozvoje (viz dále (7.27)) v bodě $x = -1$ spočívá ve vyšetření řady (její absolutní konvergenci)

$$\sum_{n=0}^\infty a_n = \sum (-1)^n \binom{\alpha}{n} = \sum \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}(-1)^n$$

pro $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom pro $n \to \infty$ platí

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|n-\alpha|}{n+1} \to 1 \quad \text{a} \quad n\Big(1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\Big) = \frac{n(1+\alpha)}{n+1} \to 1+\alpha\,,$$

takže podle Raabeho kritéria řada konverguje pro všechna $\alpha > 0$ a diverguje pro všechna $\alpha < 0$. Pro $\alpha = 0$ řada zřejmě konverguje. Podle podílového kritéria jsme však rozhodnout o konvergenci nemohli. Existuje tedy řada, jejíž konvergenci lze dokázat z Raabeho limitního kritéria, i když limitní podílové kritérium pro ni selže.

Poznámka 3.2.34. Elegance limitních verzí probraných kritérií podstatně závisí na existenci limit z Věty 3.2.26. Vzniká přirozená otázka, jak se vyrovnat s případy, kdy tyto limity neexistují. K tomu využijeme pojem hromadného bodu posloupnosti, zejména pojmů $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$. Jde však o pokročilejší záležitosti, které uvedeme až v Kapitole 8. Tam zároveň dokončíme srovnání odmocninového a podílového kritéria (v popsané obecnější podobě). Další kritérium je jiné povahy a zdánlivě nepřináší velký efekt; problém konvergence jedné řady převádí na problém konvergence jiné řady. Ukazuje se však, že je to „silné“ kritérium, které nám umožní obejít se v některých případech bez integrálního kritéria.

Věta 3.2.35 (Cauchy 1821; kondenzační kritérium). *Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Potom*

$$\sum a_n < \infty, \quad \textit{právě když} \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty\,.$$

Poznámka 3.2.36. Jelikož je

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots\,,$$

je název kondenzační kritérium vcelku pochopitelný, protože o konvergenci rozhodují jen *některé* členy řady.

Důkaz věty 3.2.35. Položme $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $t_k = a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}$. Je-li $n < 2^k$, platí

$$s_n \le a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \le a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k} = t_k$$

a tedy z konvergence $\{t_k\}$ plyne i konvergence $\{s_n\}$ a z divergence $\{s_n\}$ plyne i divergence $\{t_k\}$. Při $n > 2^k$ platí

$$\begin{aligned} s_n &\ge a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \ge \\ &\ge \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k\,, \end{aligned}$$

z čehož plyne obdobně zbytek. □

Příklad 3.2.37. Až zavedeme v Kapitole 6 obecnou mocninu, vyšetříme $\sum n^{-p}$ s reálným p. Je totiž

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-p})^k\,; \tag{3.15}$$

poslední řada je geometrická a konverguje, právě když je $1 - p < 0$.

3.3 Řady se střídavými znaménky

Věta 3.3.1 (Leibniz 1705; kritérium pro alternující řady). *Předpokládejme, že je $a_n \geq 0$. Nechť dále platí podmínky*

(1) *posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí, a dále*

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konverguje.

Důkaz. Obvyklý postup spočívá ve vyšetření posloupností sudých a lichých částečných součtů řady, které jsou omezené a monotónní. Protože součet lichého a následujícího sudého členu $a_{2n+1} - a_{2n+2}$ je nezáporný, zřejmě pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq s_{2n} \,,$$

takže sudé členy řady tvoří neklesající posloupnost. Podobně je součet sudého a následujícího lichého členu $-a_{2n+2} + a_{2n+3}$ nekladný, takže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \leq s_{2n+1} \,.$$

Dále platí

$$\lim(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim a_{2n+1} = 0 \,,$$

a proto obě vybrané posloupnosti z posloupnosti částečných součtů mají tutéž limitu, rovnou součtu s zkoumané řady $\sum(-1)^{n+1}a_n$.

Lze si však též povšimnout chování zbytku a odvodit z něj Cauchyho podmínku: pro $m > n$ platí

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots \pm a_m| \leq |a_{n+1}| \,,$$

což dokážeme pro každé $n \in \mathbb{N}$ indukcí dle m nebo pomocí již zmíněných monotónních posloupností. S ohledem na $a_{n+1} \to 0$ splňuje posloupnost Bolzano-Cauchyho podmínku. $\square$

Příklad 3.3.2 (Leibniz 1682). Již Leibnizovi byl znám součet alternující řady

$$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \,.$$

Nyní snadno zjistíme podle předcházejícího kritéria, že řada konverguje; její součet je roven $\pi/4$, avšak k tomu dospějeme později, zatím jsme π ani nedefinovali. Řada se však k určování hodnoty π nehodí, ale má zajímavé vlastnosti; viz [3].

Položme si nyní otázku, zda se vlastnosti *konečných* součtů přenášejí i na řady. Příklad „rovností“ (6) z Úvodu ukazuje, že vhodným uzávorkováním se může divergentní řada změnit v konvergentní. Naproti tomu jednoduché uzávorkování (závorky „nevnořujeme“ do sebe) typu

$$a_1 + (a_2 + a_3) + a_4 + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + (a_9 + a_{10}) + \cdots$$

nezmění součet řady, pokud řada součet má: jestliže posloupnost částečných součtů má limitu, má stejnou limitu i posloupnost z ní vybraná.

3.4 Přerovnávání řad

Příklad 3.4.1. Podle Leibnizova kritéria pro konvergenci alternujících řad je řada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{-1}$ konvergentní, zřejmě však nekonverguje absolutně [3]). Označme součet této řady s; vzhledem k možnosti odhadu s libovolnými dvěma po sobě následujícími částečnými součty řady platí $s \in [\,1/2, 1\,]$. Dále je (použijeme opět schematický zápis)

$$\begin{aligned} s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots\,, \\ s/2 &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots\,; \end{aligned}$$

uvědomte si, že vložení nulových členů neovlivní konvergenci ani součet řady. Z předchozího vyplývá sečtením obou konvergentních řad člen po členu

$$3s/2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Vzhledem k tomu, že je $s \neq 0$, změnil se „přeskupením členů“ (neabsolutně konvergentní) řady její součet. V následující části tento jev prozkoumáme podrobněji.

Definice 3.4.2. Nechť $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Potom φ nazýváme *přerovnání* $\mathbb{N}$. Je-li dána řada $\sum a_k$ a platí-li $b_k = a_{\varphi(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, potom říkáme, že řada $\sum b_k$ je *přerovnáním řady* $\sum a_k$ pomocí přerovnání φ, nebo stručněji, že řada $\sum b_k$ je přerovnáním řady $\sum a_k$.

Poznámka 3.4.3. Přerovnání si představíme snadno jako „nekonečnou permutaci“

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

---

[3]) Tuto řadu sečetl již r. 1648 Pietro Mengoli (1625 – 1686), který také znovu dokázal divergenci harmonické řady. Srovnejte se vztahem (7.25) z Kapitoly 7.

Situace se zdá beznadějná, avšak to je jen zdánlivé. Ukazuje se že pro některé řady, např. pro řadu z Příkladu 3.4.1, se přerovnáním může změnit jejich součet. Existují však řady, u kterých se to stát nemůže: jsou to absolutně konvergentní řady. Nežli to dokážeme, uvedeme jejich jednoduchou „vnitřní" charakteristiku.

Připomeňme rozklad na kladnou a zápornou část (srovnej s (1.6) v Kapitole 1). Pro členy řady $\sum a_n$ pišme

$$a_n = a_n^+ - a_n^- , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Konverguje-li $\sum |a_n|$, pak z nerovností $0 \le a_n^+ \le |a_n|$, $0 \le a_n^- \le |a_n|$ plyne, že konvergují obě řady

$$\sum a_n^+ , \quad \sum a_n^- .$$

Snadno též nahlédneme, že diverguje-li právě jedna z nich, pak diverguje i řada

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^- .$$

Odtud snadno dostaneme následující tvrzení.

Lemma 3.4.4. *Nechť* $\sum a_n$ *je* neabsolutně konvergentní *řada reálných čísel. Potom platí*

$$\sum a_n^+ = \sum a_n^- = +\infty$$

a současně platí $\lim a_n^+ = \lim a_n^- = 0$.

Důkaz. Z předcházející poznámky plyne první část tvrzení, druhá je důsledkem série implikací

$$\sum a_n \text{ konverguje } \Rightarrow a_n \to 0 \Rightarrow |a_n| \to 0 \Rightarrow (a_n^+ \to 0) \wedge (a_n^- \to 0) ;$$

tím je důkaz dokončen. □

Nyní se vrátíme k přerovnávání řad. Nejprve dokážeme jednoduché lemma o řadách s nezápornými členy:

Lemma 3.4.5. *Nechť* $\sum a_k$ *je řada s nezápornými členy a řada* $\sum b_k$ *její libovolné přerovnání. Potom platí*

$$\sum a_k = \sum b_k .$$

Důkaz. Protože řada $\sum a_k$ je přerovnáním $\sum b_k$, právě když řada $\sum b_k$ je přerovnáním $\sum a_k$, stačí dokázat

$$\sum b_k \le \sum a_k . \tag{3.16}$$

Označme $n_0 = \max\{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$. Pak platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \le \sum_{k=1}^{n_0} a_k \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Odtud plyne při $n \to \infty$ nerovnost (3.16). Tím je tvrzení dokázáno. □

Věta 3.4.6. *Nechť řada* $\sum a_k$ *konverguje* absolutně. *Potom pro její libovolné přerovnání* $\sum b_k$ *platí*

$$\sum b_k = \sum a_k . \tag{3.17}$$

Důkaz. Protože řada $\sum |b_k|$ je přerovnáním řady $\sum |a_k|$, konverguje i řada $\sum b_k$ absolutně. Dále pro součty řad platí

$$\sum a_k^+ = \sum b_k^+ , \quad \sum a_k^- = \sum b_k^- ,$$

a je tedy

$$\sum b_k = \sum (b_k^+ - b_k^-) = \sum b_k^+ - \sum b_k^- =$$
$$= \sum a_k^+ - \sum a_k^- = \sum (a_k^+ - a_k^-) = \sum a_k .$$

□

Věta 3.4.7 (Riemann 1867). [4]) *Nechť řada* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje neabsolutně. Pak pro každé* $s \in \mathbb{R}^*$ *existuje přerovnání* $\sum b_k$ *řady* $\sum a_k$ *tak, že platí*

$$\sum b_k = s .$$

Důkaz. V důkazu je složitý pouze formální popis konstrukce přerovnání. Vytvoříme dvě posloupnosti $\{r_m\}$ a $\{s_m\}$ členů řady $\sum a_k$, které jsou vybranými posloupnostmi z $\{a_k\}$. Jestliže je $a_1 \ge 0$, položme $r_1 = a_1$ a dále $s_1 = a_1$, pokud je $a_1 < 0$. Analogicky postupujeme dále, takže $\{r_m\}$ je posloupnost všech nezáporných členů posloupnosti $\{a_k\}$ a $\{s_m\}$ všech záporných členů $\{a_k\}$, obojí ve stejném pořadí, v jakém se vyskytly v posloupnosti $\{a_k\}$. Předpokládejme nejprve, že $s \in \mathbb{R}$. Je-li $r_1 \le s$, vybíráme členy přerovnané řady nejprve z $\{r_m\}$, ve druhém případě začneme s $\{s_m\}$. Uvažujme prvý případ, ve druhém se postupuje analogicky. Sčítáme po řadě členy r_m až po index m_1 tak, aby platilo

$$r_1 + \dots + r_{m_1 - 1} \le s \ < r_1 + \dots + r_{m_1 - 1} + r_{m_1} ;$$

pak položíme $b_k = r_k$, $k = 1, \dots, m_1$. K součtu z předchozího kroku přičítáme členy posloupnosti $\{s_m\}$ až po index m_1' tak, že

$$r_1 + \dots + r_{m_1} + s_1 + \dots + s_{m_1' - 1} \ge s \ > r_1 + \dots + r_{m_1} + s_1 + \dots + s_{m_1'} .$$

[4]) Tvrzení je z práce, která byla publikována až po Riemannově smrti.

Pak položíme $b_{m_1+k} = s_k$, $k = 1, \dots, m_1'$. Tak jsme zatím sečetli $m_1 + m_1'$ členů původní řady. Pak stále přičítáme po řadě vždy střídavě skupiny nezáporných a záporných členů řady $\sum a_k$ až po první „překročení hodnoty“ s [5]). Přerovnaná řada má tvar

$$\begin{gathered} r_1 + \cdots + r_{m_1} + s_1 + \cdots + s_{m_1'} + \\ + r_{m_1+1} + \cdots + r_{m_1+m_2} + s_{m_1'+1} + \cdots + s_{m_1'+m_2'} + \\ + r_{m_1+m_2+1} + \cdots + r_{m_1+m_2+m_3} + s_{m_1'+m_2'+1} + \cdots + s_{m_1'+m_2'+m_3'} + \cdots . \end{gathered}$$

S ohledem na to, že původní řada konvergovala, a tedy $a_n \to 0$, konvergují částečné součty konstruované řady k s. K pochopení důkazu je nejlépe si představit, že máte za úkol najít příslušné přerovnání pomocí počítače; sestrojení algoritmu je vlastně již důkazem věty. Při $s = +\infty$ (případ $s = -\infty$ vyřešíme analogicky) neustále „zvedáme laťku“, tj. měníme rozhodovací hodnotu. Položíme např. $s = 1$, ale bezprostředně po určení m_1' položíme $s = 2$, po určení m_2' položíme $s = 3$ atd. I přes slovní popis, který se záměrně nesnažíme více formalizovat, by měl být již celý důkaz zřejmý. □

Poznámka 3.4.8. Postup lze snadno modifikovat tak, že rozhodovací hodnoty, podle nichž měníme posloupnosti $\{r_m\}$ a $\{s_m\}$, jsou dvě: $s, s' \in \mathbb{R}$, $s < s'$. Při přičítání dalších členů z $\{r_m\}$ postupujeme až k překročení rozhodovací meze s' a pak přičítáme členy z $\{s_m\}$ až po překročení rozhodovací meze s. Pak ovšem přerovnaná řada nebude mít součet. Není obtížné si rozmyslit, že pro posloupnost částečných součtů přerovnané řady je množinou všech jejích hromadných bodů interval $[\,s, s'\,]$ (viz Definice 8.4.1).

Jestliže tedy řada *konverguje při každém přerovnání*, konvergují všechna její přerovnání k témuž součtu a řada je absolutně konvergentní. Proto se absolutně konvergentní řady ve starší terminologii nazývaly *bezpodmínečně konvergentní* řady. Neabsolutně konvergentní řady byly analogicky nazývány řady *podmínečně konvergentní*.

Historické poznámky 3.4.9. O geometrické řadě s kvocientem 1/4 dokázal „metodou dvojího sporu“ již ARCHIMEDES (287 – 212 před n. l.), že její součet je 4/3; viz úvodní kapitola. Je však nutno říci, že z dnešního pohledu se řecká matematika nedokázala úspěšně vyrovnat s problematikou nekonečna. Např. ve filozofických úvahách ZENONA Z ELEJE (asi 490 — asi 430 před n. l.) nacházíme paradoxy plynoucí z naivního chápání „nekonečného součtu“

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \; (= 1)\,.$$

Zenon předložil 45 aporií [6]), v nichž se zabýval formou vzdálenou matematice podobnými situacemi. Nejznámějšími aporiemi jsou pravděpodobně *Achilles a želva*, související s výše uvedeným součtem, *paradox letícího šípu* apod.

Již staří Babylóňané prováděli úvahy blízké sčítání speciálních konečných geometrických posloupností typu $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1} = 2^n-1$. Přesné, byť poněkud těžkopádné

---

[5]) Protože srovnání s hodnotou s určuje přechody mezi vybíráním členů z $\{r_m\}$ nebo $\{s_m\}$, budeme ji pracovně nazývat „rozhodovací hodnotou“.

[6]) Aporie znamená nesnáz, slepou uličku apod.

odvození vzorečku z Příkladu 3.1.4 nalezneme u EUKLEIDA (365 – 300 před n. l.). Popišme ho trochu podrobněji: V jeho *Základech* [6] nacházíme (viz § 34) takovouto úvahu: označíme-li členy geometrické řady a její částečný součet

$$a_0 = aq^0, \quad a_1 = aq^1, \quad \ldots, \quad a_n = aq^n, \quad \text{a dále}$$
$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \ ,$$

platí

$$\frac{a_1 - a_0}{a_0} = \frac{a_{n+1} - a_0}{s_n}, \qquad \text{tedy}$$
$$s_n\,(1-q) = a_0 - a_{n+1} = a\,(1 - q^{n+1})\,.$$

Dále jeho důkaz probíhá takto: pro řadu „se stálým poměrem členů“ (geometrickou řadu) platí

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \cdots = \frac{a_{n+1}}{a_n}\ .$$

Odečtením jedničky od každého zlomku a úpravou dostáváme

$$\frac{a_1 - a_0}{a_0} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} = \cdots = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \quad [=: q - 1]\,.$$

Eukleides uměl dokázat, že pro takové zlomky (poměry) jsou ve stejném poměru i součty všech jejich čitatelů a součty všech jejich jmenovatelů, tj.

$$\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = (q-1) \sum_{k=0}^{n} a_k\ ,$$

z čehož již plyne hledaný vzorec.

Divergence harmonické řady byla objevena nezávisle patrně vícekrát (viz poznámky ke Kapitole 2).

Formuli pro součet geometrické řady znal již FRANCOIS VIÈTE (1540 – 1603) r. 1593, později ji nalezli též GREGORY DE SAINT-VINCENT (1584 – 1667) (1622) a také HENRI TACQUET (1612 – 1660) (1656). První „negeometrickou řadu“ sečetl RICHARD SWINESHEAD, profesor z Oxfordu. Bylo to patrně ve stejné době [7]), v níž sčítal NICOLE ORESME (1323 – 1382) harmonickou řadu.

Další kroky na cestě k rigoróznímu vyšetřování konvergentních řad jsou spojeny se jmény Bernoulliů a dalších matematiků, o nichž se podrobněji dočtete dále (Newton, Leibniz, Euler aj.). Jedním z prvních, kdo se zabýval studiem konvergence řad, byl JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717 – 1783), který vyšetřoval konvergenci Newtonovy binomické řady. Další podstatný krok k vytvoření teorie konvergence opět učinil LOUIS AUGUSTIN CAUCHY (1789 – 1857) svojí prací z roku 1821; o tom ostatně svědčí mj. celá tato kapitola. Přesto si ještě r. 1826 NIELS HENRIK ABEL (1802 – 1829) stěžoval v dopise z Paříže svému učiteli: „*. . . s výjimkou geometrické řady neexistuje v celé matematice snad jiná řada, jejíž součet by byl určen korektně. Jinak řečeno, v matematice mají nejdůležitější věci ty nejhorší základy. Je pravda, že výsledky jsou většinou správné, to je*

---

[7]) Uvádějí se rozmezí asi 1340 – 1355.

na tom nejdivnější.“ Poznamenejme ještě, že řadu z Příkladu 3.3.2 objevil a sečetl Gottfried Willheim Leibniz (1646 – 1716); proto se často nazývá Leibnizova řada. Práce, kde se řada vyskytuje, byla prokazatelně napsána již v r. 1676, byla však publikována až r. 1682. Je známo, že tuto řadu znali dříve i jiní, např. Nilakantha z Keralu (asi 1450 – asi 1550) kolem r. 1500 či James Gregory (1638 – 1675) asi r. 1671. Nezávisle ji objevil i Isaac Newton (1642 – 1727). Kritérium pro alternující řady popsal Leibniz v dopise J. Kormanovi r. 1705 a v dopise Johannu Bernoullimu (1667 – 1748) r. 1714. Zatím je to jediné kritérium pro neabsolutní konvergenci řad, se kterým jsme se seznámili; je speciálním případem složitějšího kritéria, se kterým se seznámíme později v Kapitole 8.

Je patrně nemožné vystopovat původ srovnávacího kritéria. Připomeňme, že bylo použito k důkazům divergence řad (Oresme, Bernoulliové) i k důkazu konvergence: úvaha z Příkladu 3.2.3 pro řadu $\sum n^{-2}$ se dá stopovat až k Bernoulliům, i když tuto řadu sečetl poprvé až Euler. My tuto řadu jinou metodou také sečteme, avšak až později. Je zajímavé, že „podobné řady“ mají často poměrně rozdílné vlastnosti. Obě řady $\sum n^{-2}$ i $\sum n^{-3}$ konvergují, avšak u první známe přesně hodnotu jejího součtu (je to $\pi^2/6$), u druhé se poměrně dlouhou dobu nevědělo ani to, zda je její součet racionální nebo iracionální číslo. Nyní víme, že to není číslo racionální, ale to je prakticky vše, co o něm můžeme říci.

Téměř všechna v této kapitole vyložená kritéria konvergence dokázal rigorózně teprve Cauchy v práci z r. 1821. Joseph Ludwig Raabe (1801-1859) se intenzívně zabýval studiem řad a výše uvedené kritérium dokázal patrně v souvislosti se studiem hypergeometrických řad v r. 1832. Zabýval se však i sčítatelností řad (viz níže). Cesta ke kritériu, nesoucímu jeho jméno, vede v našem případě přes obecnější kritérium Jensenovo. Toto kritérium publikoval Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859 – 1925) v r. 1888 v pařížských *Comptes rendus* .... Toto kritérium je v české literatuře populární již téměř 100 let. Uvádějí ho jak Eduard Weyr (1852 – 1903) v [16] z r. 1902, tak později i Karel Petr (1868 – 1950) v [10] z r. 1923.

Pojmenování *konvergentní* řada pochází patrně od Gregoryho (1668), který byl snad také první, kdo rozlišoval mezi konvergentními a divergentními řadami. Dostatečně přesné definice se objevily u Bolzana v r. 1817 a Cauchyho v r. 1821.

Absolutní konvergenci zavedl Cauchy v r. 1821, avšak teprve r. 1833 *korektně* dokázal, že z absolutní konvergence řady plyne její konvergence.

Všimněme si ještě krátce *divergentní* řady $\sum(-1)^{n+1}$. V úvodní kapitole uvedená paradoxní úvaha, vedoucí k rovnosti $0 = 1$, byla dlouho nevysvětlitelná a přitahovala matematiky zvučných jmen. Mnozí se tuto řadu snažili sečíst; uveďme příklady některých postupů, které byly použity.

Je-li $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = s$, pak $s = 1 - (1 - 1 + 1 - \ldots) = 1 - s$, a odtud dostáváme $2s = 1$, resp. $s = 1/2$.

Dosazením hodnoty -1 do vzorce $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \ldots$ dostaneme opět $1/2 = 1 - 1 + 1 - \ldots$.

Také Leibniz se přikláněl na základě jiných úvah pravděpodobnostního charakteru k $1/2$ jakožto hodnotě součtu této řady.

Poznamenejme, že $\{x_n\} = \{1, 0, 1, 0, \ldots\}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum(-1)^{n+1}$ a že rovněž platí

$$y_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \to \frac{1}{2}\,.$$

Postup souvisí s Lemmatem 2.4.22. Nyní jsme jím přiřadili jistý „zvláštní součet“ *divergentní* řadě $\sum(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+\dots$. Tento přístup pochází od Georga Frobenia (1849 – 1917), pro speciální řady ho však použil již Daniel Bernoulli (1700 – 1782) r. 1771 a Raabe r. 1836. Další zásluhy na konstituování sčítací metody, která je na tomto tvrzení založena, mají d'Alembert (1768), Leopold Kronecker (1823 – 1891) (1876), Otto Ludwig Hölder (1859 – 1937) (1882) a Ernesto Cesàro (1859 – 1906) (1890). Výše uvedené Lemma 2.4.22, které dokázal Cauchy, dokazuje tzv. *regularitu* nejjednodušší *Cesàrovy sčítací metody* $(C,1)$ (podrobněji viz dále).

Je to jedna z velmi jednoduchých *sčítacích metod*. Jsou to postupy, zpravidla *rozšiřující* pojem součtu řady i na případy některých divergentních řad. Příklad ukazuje, že jde opravdu o *vlastní* rozšíření, neboť je jím sečtena alespoň jedna divergentní řada. Lemma 2.4.22 naopak ukázalo, že tato metoda přiřadí konvergentním řadám jejich „normální součet“, je to proto opravdu *rozšíření*; to, že nějaká sčítací metoda zobecňuje tradiční součet řady, vyjadřujeme v označení slovem *regulární* (sčítací metoda).

Kritéria konvergence, se kterými jsme se seznámili, nejsou zdaleka ta nejlepší možná. Jmenujme alespoň několik matematiků, kteří se zasloužili o další zjemňování těchto výsledků: Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Niels Henrik Abel (1802 – 1829), Ernst E. Kummer (1810 – 1893), Jean M. C. Duhamel (1797 – 1872), Augustus De Morgan (1806 – 1871), Joseph Luis Francois Bertrand (1822 – 1900), Magnus Georg von Paucker (1787 – 1855), Ossian Bonnet (1819 – 1892). Viz [8].

Z populárních článků věnovaných problematice sčítacích metod jmenujme článek, který napsal C. N. Moore v r. 1932 (viz [1], str. 377). V r. 1987 vydala *Jednota československých matematiků a fyziků* sborník [12], kde vyšel článek popisující vývoj matematické analýzy [9] a také práce [15] o vývoji sčítání divergentních řad.

Příklady typu přerovnání neabsolutně konvergentní řady k jinému součtu sestrojili Cauchy r. 1833, r. 1837 Peter Gustav Leujene Dirichlet (1805 – 1859) a r. 1839 Martin Ohm (1792 – 1872); viz Příklad 6.5.22. Znovu připomínáme starší českou terminologii: řady podmíněně (= neabsolutně) a bezpodmínečně (= absolutně) konvergentní. Větu obsaženou v Poznámce 3.4.8 dokázal Dirichlet r. 1837. Vysvětlení podmínečné konvergence přinesl teprve výsledek Riemannův z r. 1854, publikovaný po Riemannově smrti.

Literatura :

[1] Apostol, T. M. and al.: *A century of calculus I, II*, The Mathematical Association of America, 1992, (sborník článků z *American Mathematical Monthly* a *Mathematical Magazine*).

[2] Bolzano, B.: *Paradoxy nekonečna*, Nakladatelství ČSAV, Praha, 1963.

[3] Borwein, J., Bailey, D., Girgensohn, R.: *Experimentation in mathematics; Computational path to discovery*, A. K. Peters, Natick, MA, 2004.

[4] Bressoud, D.: *A radical approach to real analysis*, The Mathematical Association of America, Washington, 1994.

[5] Browder, A.: *Mathematical analysis. An introduction*, Springer, New York, Berlin, 1996.

[6] Eukleides: *Základy* (*Stoicheia*), Praha, 1907, (přeložil František Servít).

[7] Jensen, J. L. W. V.: *Sur un théorème général de convergence*, Comptes rendus **106** (1888), str. 729 –731.

[8] Knopp, K.: *Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen*, Springer, Berlin, 1924.

[9] Netuka, I., Schwabik, Š.: *Vznik a vývoj matematické analýzy*, str. 127 – 167, obsaženo v : *Světonázorová výchova v matematice*, JČSMF, Praha, 1987, (též v: J. Šedivý a kol.: *Světonázorové problémy matematiky II.*, SPN, Praha, 1984, s. 160 a n.).

[10] Petr, K.: *Počet diferenciální*, Jednota československých mathematiků a fysiků, Praha, 1923.

[11] Šalát, T.: *Nekonečné řady*, Academia, Praha, 1974.

[12] Šedivý, J. (ed.): *Světonázorová výchova v matematice*, JČSMF, Praha, 1987.

[13] Trojovský, P.: *Kořeny a vývoj pojmu konvergentní číselná řada*, obsaženo v : *Člověk – Umění – Matematika*, str. 167 – 177, Prometheus, Praha, 1996.

[14] Veselý, J.: *O některých důležitých řadách*, obsaženo v : *Člověk – Umění – Matematika*, str. 137 – 154, Prometheus, Praha, 1996.

[15] Veselý, J.: *Sčítání divergentních řad*, str. 169 – 186, obsaženo v : *Světonázorová výchova v matematice*, JČSMF, Praha, 1987.

[16] Weyr, E.: *Počet differenciálný*, Jednota českých matematiků, Praha, 1902.

Kapitola 4

Funkce

Tato kapitola má převážně technický charakter. Pomocí vět o limitách posloupností jsou v ní dokázána základní tvrzení o limitních přechodech pro funkce. Čtenář se však seznámí i s „přímým přístupem“ k důkazům těchto tvrzení, založeným na ε–δ definici. Tvrzení jsou většinou dokazována na základě již dříve dokázaných tvrzení o posloupnostech. V poslední části kapitoly jsou uvedena některá složitější tvrzení. Jejich důkazy by si měl čtenář pečlivě promyslit.

4.1 Základní vlastnosti

Definice 4.1.1. Zobrazení libovolné množiny $A \neq \emptyset$ do nějakého číselného oboru budeme obecně nazývat *funkce*. Podrobněji *reálnou funkcí* budeme rozumět zobrazení do $\mathbb{R}$, *komplexní funkcí* zobrazení do množiny všech komplexních čísel $\mathbb{C}$; komplexními funkcemi se však budeme podrobněji zabývat později. Je-li navíc $A \subset \mathbb{R}$, budeme takovou funkci nazývat podrobněji *reálnou funkcí reálné proměnné*; s těmi budeme pracovat nejčastěji. Proto pro ně budeme užívat jen kratší název *funkce* a vše ostatní bude v případě potřeby explicitně řečeno.

Označení 4.1.2. Pro označení funkcí budeme užívat více způsobů. Jednotlivé funkce budeme značit písmeny, např. f, g, F, G, ... apod. Běžně je také užíváno označení $f : A \to \mathbb{R}$. Někdy je vhodné mít možnost zapsat funkci aniž ji „pojmenujeme“; pak píšeme např. $x \mapsto x^2$, $x \in A$, resp. $x \mapsto f(x)$, $x \in A$.

Je-li $x \in A$ a $f : A \to \mathbb{R}$, pak samotný symbol $f(x)$ by měl být užíván *výhradně pro hodnotu funkce f v bodě x*; je to v tomto případě číslo, nikoli funkce. Je podstatné vždy rozlišovat mezi funkcí samotnou a funkční hodnotou, ale zápis nebývá, a při těchto dohodách ani nemůže být, zcela důsledný. Identita, tj. funkce $x \mapsto x$, $x \in \mathbb{R}$ se běžně značí x. Kdybychom ji chtěli pojmenovat a užívat např. označení Id, museli bychom důsledně psát Id^2 místo x^2 apod. Budeme užívat tradiční označení a, při eventuální nepřesnosti zápisu, musíme vždy z kontextu přesně rozeznat, oč se v daném případě jedná.

Úmluva 4.1.3. Je-li dán pouze „předpis", tj. např. $f(x) = x/(x^2 - 1)$, pak uzavíráme tuto úmluvu: za definiční obor D_f funkce f považujeme *maximální* podmnožinu $\mathbb{R}$, na níž je výraz (předpis) definován. V našem případě je tedy $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. V obdobném smyslu také chápeme úlohu známou ze středoškolských učebnic: *Určete definiční obor funkce* ..., která vzata doslovně nemá žádný rozumný smysl.

Poznámka 4.1.4. Funkce je tedy určena „předpisem" a „definičním oborem". Dvě funkce si jsou rovny, shodují-li se v *obou* těchto věcech. Proto např.

$$f(x) = x^2\,,\ x \in (-1, 1), \quad \text{a} \quad f(x) = x^2\,,\ x \in \mathbb{R}\,,$$

jsou dvě *rozdílné* funkce. I zde někdy (např. u restrikcí) není běžné vyjádření zcela důsledné. Připomínáme, že je-li $f : A \to \mathbb{R}$ a $B \subset A$, pak

$$g : x \mapsto f(x)\,, \quad x \in B\,,$$

je *zúžením* (restrikcí) funkce f na množinu B. Je-li obráceně

$$h : x \mapsto h(x)\,,\ x \in C\,,$$

a $B \subset C$, přičemž $h(x) = g(x)$ pro všechna $x \in B$, je h *rozšířením* funkce g na C. Zřejmě i f je rozšířením g a tato dvě rozšíření funkce g jsou opět obecně různá.

Definice 4.1.5. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je libovolná množina. Definujme $\chi_A(x) = 1$ pro všechna $x \in A$ a $\chi_A(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Je zřejmé, že funkce tohoto typu jednoznačně charakterizuje A, proto se jí říká *charakteristická funkce množiny* A. Charakteristická funkce množiny $\mathbb{Q}$ se nazývá *Dirichletova funkce.*

Příklad 4.1.6. Funkce $f(x) = (\,|x^2 - 1|\,)^{-1}$ má podle úmluvy, kterou jsme uzavřeli, definiční obor

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\,,$$

funkce $g(x) = (\,|x^2 - 1|\,)^{-1}$, $x \in (-1, 1)$, má $D_g = (-1, 1)$. Zřejmě je g *restrikcí* f na interval $(-1, 1)$.

Pracuje-li se s funkcemi jako s podmnožinami kartézského součinu, je tento vztah mezi funkcemi množinovou inkluzí. Pomocí ní se v případě definice funkce jako podmnožiny kartézského součinu restrikce definuje:

$$\{(x, g(x)); x \in (-1, 1)\} \subset \{(x, f(x)); x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}\}\,.$$

Některé vlastnosti funkcí jsme již definovali (např. omezenost v Definici 1.6.7), jiné budeme definovat postupně v dalším textu. Jednou z nejjednodušších vlastností funkcí je monotonie.

Definice 4.1.7. Nechť je funkce f definována na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom říkáme, že *funkce f je rostoucí na I*, jestliže platí pro každou dvojici bodů $x, y \in I$

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\,.$$

Nahradíme-li poslední znamení nerovnosti '$<$' postupně znameními $>$, $\leq$ a $\geq$, dostaneme definice funkce *klesající*, *neklesající* a *nerostoucí* (*na intervalu I*). Funkce, které mají na I kteroukoli z popsaných vlastností, nazýváme souhrnně *monotónní funkce na I*. Rostoucí a klesající funkce na I se někdy souhrnně nazývají *ryze monotónní funkce na I*.

Poznámka 4.1.8. Předešlou definici lze modifikovat. Funkce f je rostoucí na I, jestliže platí pro každou dvojici bodů $x \neq y$, $x, y \in I$, nerovnost

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0\,.$$

Ověřte, že dostáváme opravdu ekvivalentní definici a vyslovte v analogické formě definici klesající, neklesající a nerostoucí funkce.

Čtenář si může samostatně rozmyslit, jak využít k definici monotonie výraz $(f(y) - f(x))(y - x)$; ten umožňuje užitečné zobecnění monotonie při zkoumání obecnějších zobrazení.

Definice 4.1.9 (Mocniny s přirozeným exponentem). Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ definujme x^n rekurentně (tj. $x^1 = x$, $x^{n+1} = x \cdot x^n$) pro všechna $x \in \mathbb{R}$ [1]). Potom se funkce $x \mapsto x^n$ nazývá *mocnina*, resp. *n-tá mocnina*. Dále definujeme „nultou mocninu“ jako funkci $x \mapsto 1$, $x \in \mathbb{R}$. V Definici 1.6.9 jsme definovali operace s funkcemi; víme tedy, jak se definuje násobek mocniny a součet mocnin. Lineární kombinace mocnin, tj. funkce tvaru

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,,$$

se nazývají *polynomy*. Jejich *koeficienty* a_k jsou reálná čísla; později budeme stejně zavádět polynomy v komplexním oboru.

Připomeňme si ještě definici limity posloupnosti: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (tj. $a_n \to a$), právě když platí podmínky

$$\begin{aligned} &(1) \quad (\forall a' < a) \quad (a_n > a' \;\text{ pro skoro všechna } n)\,,\\ &(2) \quad (\forall a'' > a) \quad (a_n < a'' \;\text{ pro skoro všechna } n)\,. \end{aligned}$$

Je-li $a \in \mathbb{R}$, pak často užíváme jedinou podmínku: pro každý interval (a', a''), pro který platí $a \in (a', a'')$, platí také $a_n \in (a', a'')$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

---

[1]) Jde vlastně o mocniny identity Id, toto označení však neužíváme a mluvíme o mocnině jako o „funkci x^n“ apod.

Stále budeme užívat již zavedené symboliky: $\mathcal{U}_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Budeme však užívat i trochu obecnějších okolí: každý otevřený interval, který obsahuje bod a, budeme také nazývat okolím a; takové okolí budeme značit $\mathcal{U}(a)$.

Pojmy spojitost, derivace, limita (funkce v daném bodě) patří k tzv. *lokálním pojmům*; tím vyjadřujeme skutečnost, že závisejí pouze na chování funkce v okolí příslušného bodu — toto ještě zpřesníme. Začneme se základním pojmem, tj. se spojitostí.

4.2 Spojitost funkce

Definice 4.2.1 (Bolzano 1817). Říkáme, že funkce f je *spojitá v bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x,\, x \in \mathcal{U}_\delta(x_0))(f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0)))\,.$$

Poznámka 4.2.2. Budeme často používat ekvivalentních vyjádření definice spojitosti. Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in \mathcal{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0)))\,.$$

Poslední implikaci můžeme ještě nahradit inkluzí

$$f(\mathcal{U}_\delta(x_0)) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0))$$

a dostaneme opět ekvivalentní definici.

Toto je klasická definice spojitosti, kterou je třeba znát a umět s ní pracovat, my však často budeme využívat našich znalostí o posloupnostech a budeme při důkazech vycházet z vět, které jsme o nich již dokázali.

Poznámky 4.2.3. Je vhodné si uvědomit pár bezprostředních důsledků definice spojitosti.

1. Funkce f spojitá v bodě x_0 je v tomto bodě *definovaná*.

2. Funkce f spojitá v x_0 je definována na nějakém okolí $\mathcal{U}_\delta(x_0)$ s jistým $\delta > 0$; rozmyslete si, že je to totéž, jako když řekneme, že „existuje interval (α, β), na kterém je f definována, takový, že platí $x_0 \in (\alpha, \beta)$“.

3. V definici jsou podstatné kvantifikátory, ne „rozměrové veličiny“ ε a δ. Je tedy možné přepsat definici do tvaru (okolí bodu $f(x_0)$ značíme $\mathcal{U}(f(x_0))$ a okolí bodu x_0 značíme $\mathcal{V}(x_0)$):

$$(\forall \mathcal{U}(f(x_0))(\exists \mathcal{V}(x_0))(f(\mathcal{V}(x_0)) \subset \mathcal{U}(f(x_0)))\,.$$

Vyjádřeno slovy: ke každému okolí $\mathcal{U}(f(x_0))$ existuje okolí $\mathcal{V}(x_0)$ tak, že platí $f(\mathcal{V}(x_0)) \subset \mathcal{U}(f(x_0))$.

Tento jednoduchý důsledek definice nabývá na významu, pracujeme-li s funkcí spojitou například ve všech bodech intervalu (a, b), neboť přes něj vede cesta k jinému popisu „globální spojitosti“ funkce, tj. spojitosti f *všude* v (celém) intervalu (a, b).

4. Často se zapisují příslušná ε- a δ-okolí pomocí nerovností; definici spojitosti f v bodě x_0 lze zapsat i pomocí vztahu

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon)\,.$$

Lemma 4.2.4. *Nechť je funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom existuje takové okolí $\mathcal{U}(x_0)$, na kterém je f omezená.*

Důkaz. V definici spojitosti stačí volit např. $\varepsilon = 1$. Tomuto ε odpovídající δ-okolí lze volit za hledané okolí $\mathcal{U}(x_0)$. □

Příklad 4.2.5. Existuje-li $a \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) = a$, je f spojitá v každém bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. K tomu, abychom ověřili, že *konstantní funkce je spojitá*, si stačí uvědomit, že ať zvolíme $\varepsilon > 0$ jakkoli, lze v definici spojitosti odpovídající $\delta > 0$ volit libovolně, neboť $|f(x) - f(x_0)| = |a - a| = 0 < \varepsilon$ platí dokonce pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Identita na $\mathbb{R}$, tj. funkce $f(x) = x$ je rovněž spojitá v každém bodě $x_0 \in \mathbb{R}$; v definici spojitosti lze pro každé $\varepsilon > 0$ volit např. $\delta = \varepsilon$. To je zřejmé, neboť $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$.

Je zajímavé si rozmyslit, kolik práce musíme vynaložit, abychom *z definice* dokázali, že funkce $f : x \mapsto x^2$ je spojitá v bodě 1. Vynaložená námaha ukáže, že bez další teorie bychom stěží něco spočítali. Proto je vhodné dokázat o spojitosti další tvrzení, aby bylo možno o spojitosti rozhodnout efektivněji než na základě „pouhé“ definice.

Lemma 4.2.6. *Jestliže je $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ a funkce f je spojitá v bodě x_0, potom též platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

Důkaz. Zvolme $\varepsilon > 0$. Ze spojitosti funkce f v bodě x_0 plyne existence takového $\delta > 0$, že platí

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Z konvergence $x_n \to x_0$ plyne existence $k \in \mathbb{N}$, pro které

$$n \geq k \;\Rightarrow |x_n - x_0| < \delta\,, \quad \text{a tedy} \quad |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Tím je lemma dokázáno. □

Důsledek 4.2.7. *Pokud umíme najít dvě posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ konvergující k x_0 tak, že $f(x_n) \to \alpha$, $f(y_n) \to \beta$, $\alpha \neq \beta$, pak funkce f* není *spojitá v bodě x_0.*

Příklad 4.2.8 (Dirichlet 1829). Dirichletova funkce δ (viz Definice 4.1.5) není spojitá v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Stačí si uvědomit, že pro každý bod $x_0 \in \mathbb{R}$ existují posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $x_n \in \mathbb{Q}$, $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ tak, že

$$x_n \to x_0\,,\ y_n \to x_0 \quad \text{a zároveň} \quad \delta(x_n) \to 1\,,\ \delta(y_n) \to 0\,.$$

Proto neexistuje $\lim_{x \to x_0} \delta(x)$.

Příklad 4.2.9 (Riemann). Definujme $\varrho(x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{Z}$ a dále $\varrho(p/q) = 1/q$ pro $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ taková, že $(p,q) = 1$, neboli p, q jsou čísla nesoudělná [2]). Dále klademe $\varrho(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tato funkce se někdy nazývá *Riemannova funkce*.

Dokážeme, že funkce ϱ není spojitá v žádném bodě $y \in \mathbb{Q}$. Zvolme libovolně $y \in \mathbb{Q}$ a posloupnost bodů $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tak, že $x_n \to y$. Pak ale je $\varrho(x_n) \to 0$, avšak $\varrho(y) \neq 0$, čímž je tvrzení dokázáno.

Funkce ϱ je však spojitá v každém iracionálním bodě $z \in \mathbb{R}$. Volme $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Zřejmě ϱ nabývá nenulových hodnot pouze z množiny $\{1/q;\, q \in \mathbb{N}\}$. Pro každé $0 < \varepsilon < 1$ existuje v intervalu $(z-1, z+1)$ pouze konečný počet bodů $x \in \mathbb{Q}$ takových, že $\varrho(x) \geq \varepsilon$. Hodnoty 1 se nabude v tomto intervalu nejvýše dvakrát, hodnoty 1/2 nejvýše třikrát, atd. Označme množinu všech těchto bodů M_ε. Pro

$$0 < \delta < \min\{|z - x|;\, x \in M_\varepsilon \setminus \{z\}\}$$

pak platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro něž $|x - z| < \delta$, nerovnost $|\varrho(x) - \varrho(z)| < \varepsilon$, a tedy ϱ je spojitá v z.

Jestliže je $\{x_n\}$ prostá posloupnost bodů intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a $\{y_n\}$ posloupnost *kladných* čísel, pro kterou $y_n \to 0$, lze definovat na (a,b) funkci f tak, že $f(x_n) = y_n$, $n \in \mathbb{N}$, a $f(x) = 0$ pro všechna $x \in (a,b)$, $x \neq x_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Taková funkce bývá nazývána *zobecněná Riemannova funkce*. Pokuste se charakterizovat všechny body $x \in (a,b)$, ve kterých je f spojitá!

Nyní si ukážeme práci s „$\varepsilon - \delta$ definicí“ spojitosti postupem nezávislým na tom, co jsme vyložili v Kapitolách 2 a 3.

Lemma 4.2.10. *Jsou-li funkce f, g spojité v bodě x_0, pak je i funkce $f \pm g$ spojitá v bodě x_0.*

Důkaz. Pro součet nebo rozdíl funkcí je důkaz prakticky stejný, uděláme ho proto podrobně jen pro součet. Obě funkce musí být definovány na nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0, které si pro další úvahu pevně zvolíme. Nejprve si uvědomíme, že pro všechna $x \in \mathcal{U}(x_0)$ platí

$$|f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|$$

a že oba výrazy vpravo umíme díky předpokladům „udělat libovolně malé“. Ze spojitosti f v x_0 totiž plyne, že pro každé $\varepsilon > 0$ lze volit $\delta_1 > 0$ tak, že

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2\,.$$

---

[2]) Označení (p,q) jsme použili pro největšího společného dělitele čísel p, q.

Podobně ze spojitosti g v x_0 plyne existence $\delta_2 > 0$ tak, že platí

$$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2\,.$$

Nyní stačí volit kladné $\delta \leq \min(\delta_1, \delta_2)$ a pro všechna x, pro která je $|x - x_0| < \delta$, dostáváme pomocí trojúhelníkové nerovnosti potřebný odhad

$$|f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))| \leq \\ \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$

Tím je důkaz pro součet proveden. Analogicky se provede i důkaz pro rozdíl; čtenář by si to měl vyzkoušet. □

Existuje však ještě další přístup ke spojitosti funkcí pomocí posloupností: pro nás půjde o *větu*, popisující *ekvivalentní* definici spojitosti.

Věta 4.2.11 (Heine 1872). *Funkce f je spojitá v bodě x_0, právě když platí pro každou posloupnost $\{x_n\}$*

$$(x_n \to x_0) \Rightarrow (f(x_n) \to f(x_0))\,.$$

Poznámky 4.2.12. 1. Uvědomte si, že se žádá cosi pro *každou* $\{x_n\}$, pro kterou je $x_n \to x_0$; nekonverguje-li $\{x_n\}$ k x_0, je implikace vždy pravdivá a žádnou omezující podmínku nevyjadřuje.

2. Kdyby při nespojitosti f v bodě x_0 neexistovalo žádné okolí $\mathcal{U}(x_0)$, na kterém je f všude definována, pak bychom vybrali $\{x_n\}$ tak, aby platilo $x_n \to x_0$ (např. vybíráme x_n tak, že $|x_n - x_0| < 1/n$) a aby současně $f(x_n)$ nebylo definováno pro *žádné* n. Pak ale dostáváme spor s podmínkou ve větě.

3. Až tuto větu dokážeme, budeme moci považovat podmínku z věty za *jinou definici* spojitosti. Obvykle se potom užívá spojení „*… podle Heineho definice spojitosti …*“ k odvolání na Větu 4.2.11.

Důkaz Věty 4.2.11. Z Lemmatu 4.2.6 plyne, že z $x_n \to x_0$ a spojitosti f vyplývá, že rovněž $f(x_n) \to f(x_0)$ a důkaz jedné implikace je hotov. Nyní dokážeme místo druhé implikace typu $b \Rightarrow a$ ekvivalentní implikaci non $a \Rightarrow$ non b, což dá potřebnou druhou část důkazu.

Není-li f spojitá v x_0, pak to může být z triviálních důvodů (f není definována v x_0, resp. na žádném $\mathcal{U}(x_0)$); pak však existuje $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$, pro kterou neplatí $f(x_n) \to f(x_0)$ z toho důvodu, že nejsou definovány příslušné hodnoty funkce f. Nechť je f definována na nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0, ale není v bodě x_0 spojitá. Potom existuje okolí $\mathcal{U}(f(x_0))$ tak, že pro *žádné* $\mathcal{V}(x_0)$ *neplatí*

$$f(\mathcal{V}(x_0)) \subset \mathcal{U}(f(x_0))\,.$$

Volme nyní $x_n \in \mathcal{V}_{1/n}(x_0)$, tj. tak, že platí $|x_n - x_0| < 1/n$, ale zároveň

$$f(x_n) \notin \mathcal{U}(f(x_0))\,.$$

Pak platí $x_n \to x_0$, avšak neplatí $f(x_n) \to f(x_0)$ a podmínka splněna není. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Věty o posloupnostech nám pomocí Heineho definice spojitosti (Věta 4.2.11 a komentář v poznámce) umožní rychle a pohodlně dokázat řadu tvrzení o spojitosti funkcí. Z věty o aritmetických operacích a posloupnostech snadno obdržíme následující větu:

Věta 4.2.13. *Nechť f, g jsou funkce spojité v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom i $f \pm g$, $f \cdot g$, $|f|$ jsou spojité v bodě x_0. Je-li $g(x_0) \neq 0$, pak i f/g je spojitá v bodě x_0.*

Důkaz. Jelikož f, g jsou spojité v x_0, pak pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že $x_n \to x_0$, platí

$$f(x_n) \to f(x_0) \quad \text{a také} \quad g(x_n) \to g(x_0)\,;$$

podle Věty 2.3.5, resp. Věty 2.1.22 platí také

$$f(x_n) \pm g(x_n) \to f(x_0) \pm g(x_0)\,, \quad f(x_n)g(x_n) \to f(x_0)g(x_0)\,,$$

z čehož lehce plyne první část tvrzení. Další část dostaneme snadno z implikace $f(x_n) \to f(x_0) \Rightarrow |f(x_n)| \to |f(x_0)|$. Konečně z $g(x_0) \neq 0$ plyne, že pro každou $\{x_n\}$ takovou, že $x_n \to x_0$, platí $g(x_n) \to g(x_0) \neq 0$, a proto $g(x_n) \neq 0$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Proto mají podíly $f(x_n)/g(x_n)$ smysl pro skoro všechna n. Zbytek je již z Věty 2.1.22 zřejmý. $\square$

Poznámka 4.2.14. Protože víme, že funkce $x \mapsto x, x \in \mathbb{R}$, je spojitá na $\mathbb{R}$, snadno dokážeme použitím předcházejících vět, že všechny mocniny s celým nezáporným exponentem jsou funkce spojité v každém bodě z $\mathbb{R}$. Z výše uvedených vět rovněž lehce vyplývá, že každý polynom je spojitou funkcí ve všech bodech $x_0 \in \mathbb{R}$. Rozmyslete si detailně, která tvrzení je nutno použít a jak.

Poznámka 4.2.15. Velmi důležitou operací se zobrazeními, resp. s funkcemi, je jejich *skládání*. Připomeňme si tuto operaci Příkladem 1.4.14 z Kapitoly 1. Pak vyslovíme a dokážeme větu o spojitosti složené funkce.

Příklad 4.2.16. Nechť $f(x) = 1/(1-x)$. Podle Úmluvy 4.1.3 je f definována na celé ose $\mathbb{R}$ kromě bodu 1, tedy $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$. Budeme-li skládat f opět s f, pak $f(0) = 1$ a hodnota $f(f(0))$ není definována; to znamená, že pro

$$g : x \mapsto f(f(x))$$

platí $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \neq D_f$. Snadno zjistíte, že je $g(x) = (x-1)/x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ a že pro $h : x \mapsto f(f(f(x)))$ je $h(x) = x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Při počítání je třeba dát pozor na pouhé mechanické upravování!

Označení 4.2.17. Funkce jsou speciální zobrazení. Skládání funkcí proto značíme opět pomocí symbolu „$\circ$“. Připomeňme si definici, ve které jsme položili $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, kde pořadí vlevo se řídí pořadím f, g v zápise na pravé straně rovnosti.

Věta 4.2.18. *Nechť g je funkce spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, f funkce spojitá v bodě $g(x_0)$. Potom je funkce $f \circ g$ spojitá v bodě x_0.*

Důkaz. Uvědomíme si důsledky spojitosti f, g. Nechť $\mathcal{W}(f(g(x_0)))$ je okolí bodu $f(g(x_0))$; k němu *existuje* okolí $\mathcal{V}(g(x_0))$ tak, že platí $f(\mathcal{V}(g(x_0))) \subset \mathcal{W}(f(g(x_0)))$. Ze spojitosti funkce g pak plyne, že k okolí $\mathcal{V}(g(x_0))$ *existuje* okolí $\mathcal{U}(x_0)$ tak, že platí $g(\mathcal{U}(x_0)) \subset \mathcal{V}(g(x_0))$. Odtud lehce plyne, že platí i inkluze

$$(f \circ g)(\mathcal{U}(x_0)) = f(g(\mathcal{U}(x_0))) \subset f(\mathcal{V}(g(x_0)) \subset \mathcal{W}(f(g(x_0))) = \mathcal{W}((f \circ g)(x_0))\,,$$

takže $f \circ g$ je spojitá v bodě x_0. □

Spojitost v bodě je jednoduchým příkladem *lokální vlastnosti* funkce; lze o ní rozhodnout na základě chování vyšetřované funkce „v sebemenším okolí“ tohoto bodu. Existuje jednoduchý postup, jak od lokálních vlastností přecházet k vlastnostem „globálním“ (tohoto označení však užívat nebudeme !). Na něm je založena i následující definice.

Definice 4.2.19. Řekneme, že funkce f je *spojitá v intervalu* $(a, b) \subset \mathbb{R}$, právě když je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.

Poznámka 4.2.20. Někdy je naopak vhodné ke globální vlastnosti, jakou je například fakt, že funkce je nerostoucí nebo neklesající, resp. rostoucí nebo klesající na intervalu I, definovat vhodně odpovídající vlastnost lokální. Trochu předběhneme a uvedeme příklad, který se ukáže užitečný až později. Říkáme, že *funkce f je rostoucí v bodě c*, jestliže existuje takové jeho okolí $\mathcal{U}(c)$, na kterém platí

$$f(x) < f(c) \text{ pro } x < c \quad \text{a} \quad f(x) > f(c) \text{ pro } x > c\,.$$

Analogicky se zavádí pojem *neklesající funkce v bodě c*, kterému odpovídají souhlasné neostré nerovnosti mezi funkčními hodnotami. Podobně přechodem k obráceným nerovnostem mezi funkčními hodnotami dostaneme definice funkce *klesající* a *nerostoucí v bodě c*. Zřejmě funkce f rostoucí v intervalu (a, b) je rostoucí v každém bodě $c \in (a, b)$, ukazuje se však, že dokázat obrácené tvrzení (roste-li f v každém $c \in (a, b)$, pak roste v (a, b)) je mnohem těžší.

Kdybychom chtěli definovat tento pojem pomocí poměru přírůstků analogicky Definici 4.1.8, je to opět velmi jednoduché. Funkce f je rostoucí v bodě c, jestliže existuje takové jeho okolí $\mathcal{U}(c)$, že pro každé $x \in (\mathcal{U}(c) \setminus \{c\})$ platí

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0\,.$$

Analogicky postupujeme v ostatních případech funkce klesající, nerostoucí a neklesající v bodě.

Spojitost je velmi názorný pojem: funkce f je spojitá v bodě x_0, jestliže se „body blízké bodu x_0 zobrazují na body blízké bodu $f(x_0)$". Často však potřebujeme popsat i trochu složitější situace podobného typu jako spojitost. Vzniká např. velmi přirozená otázka, zda lze podobným způsobem vyšetřovat i chování funkce v okolí bodu, jestliže není v tomto bodě definována. Je zřejmé, že např. funkce $f(x) = |\operatorname{sgn}(x)|$, $x \in \mathbb{R}$, je spojitá v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, ale v bodě 0 spojitá není, neboť je tam „nešikovně definována". Pokud definujeme funkci g tak, že $g(x) := f(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a položíme $g(0) = 1$, je g spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Pro funkci z Příkladu 4.1.6 nastává jiný jev: ať se ji v bodech -1 a 1 pokusíme definovat jakkoli, nikdy po tomto dodefinování nevznikne funkce spojitá na $\mathbb{R}$. To, co jsme prováděli, souvisí s problémem existence spojitého rozšíření. Analogický problém připadá v úvahu v krajních bodech intervalů, v nevlastních bodech apod. K jeho řešení je užitečný pojem limity.

4.3 Limita funkce

Označení 4.3.1. Zavedeme toto označení:

$$\mathcal{P}_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}\,; 0 < |x - x_0| < \varepsilon\} = \mathcal{U}_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}\,.$$

Tuto množinu nazýváme *prstencové ε-okolí bodu* x_0. Obecněji, jestliže existují $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ tak, že je $x_0 \in (\alpha, \beta)$; pak označíme $\mathcal{P}(x_0) := (\alpha, \beta) \setminus \{x_0\}$. Množinu $\mathcal{P}(x_0)$ pak nazýváme *prstencové okolí bodu* x_0. Bude se nám hodit i následující úmluva:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(+\infty) = \mathcal{P}(+\infty) &:= (a, +\infty)\,, \quad \text{kde } a < +\infty\,, \\ \mathcal{U}(-\infty) = \mathcal{P}(-\infty) &:= (-\infty, a)\,, \quad \text{kde } a > -\infty\,, \end{aligned}$$

tedy okolím bodu $+\infty$ je každý interval $(a, +\infty)$, kde $a < +\infty$. Protože jsme zvyklí na to, že při zmenšování $\varepsilon > 0$ se $\mathcal{U}_\varepsilon(x_0)$, resp. $\mathcal{P}_\varepsilon(x_0)$, pro $x_0 \in \mathbb{R}$ „zmenšuje", jeví se vhodné zavést pro $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\varepsilon(+\infty) &:= \{x \in \mathbb{R}\,;\ x > 1/\varepsilon\}\,, \\ \mathcal{U}_\varepsilon(-\infty) &:= \{x \in \mathbb{R}\,;\ x < -1/\varepsilon\}\,. \end{aligned}$$

Formálně rovněž klademe $\mathcal{P}_\varepsilon(+\infty) := \mathcal{U}_\varepsilon(+\infty)$, a také $\mathcal{P}_\varepsilon(-\infty) := \mathcal{U}_\varepsilon(-\infty)$, neboť to pro nás bude užitečné.

Definice 4.3.2 (Weierstrass 1874). Říkáme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$(\forall\, \mathcal{U}(A))(\exists\, \mathcal{P}(x_0))(f(\mathcal{P}(x_0)) \subset \mathcal{U}(A))\,.$$

Píšeme $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, nebo $f(x) \to A$ pro $x \to x_0$. Chceme-li pracovat s parametry velikosti okolí, lze definici modifikovat takto

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{P}_\delta(x_0))(f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A))\,.$$

Má-li funkce limitu $+\infty$ nebo $-\infty$, říkáme, že má *nevlastní limitu* [3]).

Souvislost limity se spojitostí je jednoduchá. Limita je z jistého hlediska obecnější záležitostí a oba pojmy mají lokální charakter. Spojitost je však pro svoji jednoduchost technicky pro začátečníka snáze zvládnutelná.

Lemma 4.3.3. *Existuje-li limita funkce f v bodě x_0, je určena jednoznačně.*

Důkaz. Budeme postupovat rychleji, důkaz je obdobou důkazu Lemmatu 2.1.9, což je analogické tvrzení pro posloupnosti. Důkaz provedeme sporem: nechť hodnoty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \neq \beta$ jsou obě limitami $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Zvolíme disjunktní $\mathcal{U}(\alpha)$ a $\mathcal{U}(\beta)$. K nim nalezneme z definice limity $\mathcal{P}_1(x_0)$ a $\mathcal{P}_2(x_0)$ a položíme $\mathcal{P}(x_0) = \mathcal{P}_1(x_0) \cap \mathcal{P}_2(x_0)$. Ale pak je

$$f(\mathcal{P}(x_0)) \subset \mathcal{U}(\alpha) \cap \mathcal{U}(\beta) = \emptyset\,,$$

což je hledaný spor. □

Tvrzení 4.3.4. *Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, právě když je definována v bodě x_0 a platí*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,. \tag{4.1}$$

Poznámky 4.3.5. 1. I když není definována hodnota $f(x_0)$, může přesto existovat $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Tato situace se často vyskytuje v úlohách typu „Najděte spojité rozšíření funkce f …“. Tak např. funkci $f(x) = x^2/x$ lze rozšířit na $\mathbb{R}$ tak, že je toto rozšíření spojité, pokud definujeme $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

2. V tvrzení jsme explicitně neuvedli, že f je definována v nějakém okolí bodu x_0, i když to z (4.1) vyplývá. Toto si někdy začátečníci neuvědomují. Nebezpečně složitě [4]) vypadající výpočet limity funkce $(\{1/x\})^{-1}$ pro $x \to 0$ se redukuje na zjištění, že funkce f není definována v bodech množiny $\{1/n;\, n \in \mathbb{N}\}$ a tudíž i na žádném (prstencovém) okolí bodu 0, není tedy co počítat, neboť limita zřejmě neexistuje.

Důkaz Tvrzení 4.3.4. Nechť funkce f je definována v x_0 a nechť existuje limita $\lim_{x\to x_0} = f(x_0)$. Uvědomme si, že pak v definici limity je

$$(f(\mathcal{P}(x_0)) \subset \mathcal{U}(f(x_0))) \wedge (f(x_0) \in \mathcal{U}(f(x_0))) \Leftrightarrow (f(\mathcal{V}(x_0)) \subset \mathcal{U}(f(x_0)))\ ,$$

---

[3]) Toto označení užíváme z historických důvodů.

[4]) Připomínáme, že $\{x\}$ značí *lomenou část* čísla x; srovnejte s Poznámkou 1.4.30.

kde $\mathcal{V}(x_0)$ je „plné okolí" bodu x_0, které vznikne jako sjednocení $\mathcal{P}(x_0)$ s $\{x_0\}$. Na základě předchozí úvahy vidíme, že dostáváme spojitost:

$$(\forall \mathcal{U}(f(x_0)))\,(\exists \mathcal{V}(x_0))\,(f(\mathcal{V}(x_0)) \subset \mathcal{U}(f(x_0)))$$

Stejným způsobem (postupujeme pouze v opačném směru) dostaneme obrácenou implikaci. Dobře si tuto jednoduchou věc promyslete! □

Limitní přechod se vyskytuje i v reálných situacích: např. projede-li auto dráhu 1 km (např. při průjezdu osadou od označení začátku osady ke značce ukončení) za 1 minutu, pak jelo *průměrnou* rychlostí 60 km/hod. Zkracujeme-li měřený úsek, vypočtené hodnoty se blíží údaji odečítanému na tachometru, tj. jakési *okamžité* rychlosti. Zde se vyskytuje limitní proces, neboť je součástí definice okamžité rychlosti. Matematizace tohoto procesu byla velmi obtížná a trvala dlouhou dobu. Během ní se pracovalo s limitami posloupností i funkcí pouze intuitivně. My nyní využijeme již získaných znalostí o posloupnostech.

Úmluva 4.3.6. Je-li $x_n \to x_0$ a zároveň $x_n \neq x_0$ pro (skoro) všechna $n \in \mathbb{N}$, píšeme poněkud nepřesně, ale stručně $x_0 \neq x_n \to x_0$.

Věta 4.3.7. *Pro funkci f platí $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, právě když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ platí*

$$(x_0 \neq x_n \to x_0) \Rightarrow (f(x_n) \to A)\,. \tag{4.2}$$

Poznámky 4.3.8. 1. V tomto případě jsou jak x_0, tak i A z $\mathbb{R}^*$; jinak je situace analogická jako v Heineho definici spojitosti (jde de facto o Větu 4.2.11).

2. Podmínka $x_0 \neq x_n \to x_0$ zaručuje, že pro libovolně zvolené prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0)$ platí vždy $x_n \in \mathcal{P}(x_0)$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz Věty 4.3.7. Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, pak pro každé okolí $\mathcal{U}(A)$ existuje $\mathcal{P}(x_0)$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0)$ platí $f(x) \in \mathcal{U}(A)$. Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že $x_0 \neq x_n \to x_0$, platí $x_n \in \mathcal{P}(x_0)$, a tedy i $f(x_n) \in \mathcal{U}(A)$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. To však dává $f(x_n) \to A$.

Druhou implikaci můžeme dokázat analogicky. My však dokážeme, že „z neplatnosti a plyne neplatnost b": negováním $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ dostaneme

$$(\forall A \in \mathbb{R}^*)(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathcal{P}_\delta(x_0))(f(x) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(A))\,.$$

Volíme postupně $\delta = 1/n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a sestrojíme posloupnost $\{x_n\}$, pro kterou platí $x \neq x_n \to x_0$, $f(x_n) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(A)$, a proto $f(x_n) \not\to A$. □

Věta 4.3.9. *Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$. Potom:*

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = A \pm B\,, \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B\,,$$

pokud má pravá strana rovnosti smysl. Jestliže je $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ [5]), potom také

$$\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = A/B\,.$$

Důkaz. Ukažme si nejprve „klasický“ důkaz bez použití vět o posloupnostech, a to např. pro součet. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Předpokládejme nejprve, že $A, B \in \mathbb{R}$. Potom k $\varepsilon/2$ najdeme s využitím předpokladu o f takové $\delta_1 > 0$, že

$$(0 < |x - x_0| < \delta_1) \Rightarrow (|f(x) - A| < \varepsilon/2)\,.$$

Podobně k $\varepsilon/2$ najdeme pomocí předpokladu o g takové $\delta_2 > 0$, že

$$(0 < |x - x_0| < \delta_2) \Rightarrow (|g(x) - B| < \varepsilon/2)\,.$$

Zvolíme-li nyní $0 < \delta \leq \min(\delta_1, \delta_2)$, pak

$$(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow$$
$$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,.$$

Tím je důkaz pro tento případ dokončen. Je-li např. $A, B = +\infty$, pak k $\varepsilon > 0$ existují prstencová okolí $\mathcal{P}_{\delta_1}(x_0)$ a $\mathcal{P}_{\delta_2}(x_0)$ tak, že

$$f(x) > 1/(2\varepsilon) \ \text{ pro } \ x \in \mathcal{P}_{\delta_1}(x_0) \quad \text{a} \quad g(x) > 1/(2\varepsilon) \ \text{ pro } \ x \in \mathcal{P}_{\delta_2}(x_0)\,,$$

tedy $f(x) + g(x) > 1/\varepsilon$ pro $x \in \mathcal{P}_\delta(x_0)$ s $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Vyšetřeme ještě případ $A \in \mathbb{R}$, $B = +\infty$. Potom k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_1 > 0$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{P}_{\delta_1}(x_0)$ je $f(x) > A - \varepsilon$, a $\delta_2 > 0$ tak, že pro všechna $x \in \mathcal{P}_{\delta_2}(x_0)$ je $g(x) > 1/\varepsilon - (A - \varepsilon)$. Pak ale

$$f(x) + g(x) > 1/\varepsilon - (A - \varepsilon) + (A - \varepsilon) = 1/\varepsilon$$

pro všechna $x \in \mathcal{P}_\delta(x_0)$, kde volíme například $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Ostatní případy lze pro součet dokázat analogicky. Také pro ostatní operace postupujeme podobně, avšak u součinu je třeba vyloučit „nedefinovaný případ $0 \cdot (\pm\infty)$“ apod. $\square$

Poznámka 4.3.10. Popišme nyní důkaz s využitím vět o posloupnostech, opět nejprve pro součet. Nechť pro $x \to x_0$ je $f(x) \to A$ a $g(x) \to B$. Potom pro libovolnou posloupnost $\{x_n\}$, $x_0 \neq x_n \to x_0$, platí podle Věty 4.3.7

$$f(x_n) \to A\,, \quad g(x_n) \to B$$

a s ohledem na předpoklad že $A + B$ má smysl, je též podle Věty 2.3.5

$$\big(f(x_n) + g(x_n)\big) \to A + B\,.$$

Protože $\{x_n\}$ byla zvolena *libovolně* tak, aby $x_0 \neq x_n \to x_0$, je opět podle dokázané Věty 4.3.7

$$f(x) + g(x) \to A + B$$

[5]) Opět k tomu stačí, aby měla pravá strana bezprostředně následující rovnosti smysl.

pro $x \to x_0$. Analogickým způsobem se provedou důkazy zbývajících tvrzení z dokazované věty.

Poznámka 4.3.11. Nežli čtenář pokročí dále, měl by si promyslit důkladně vše o spojitosti. Zcela stejně se totiž dokáží tvrzení o limitách a nerovnostech pro funkce. Vyslovíme je najednou v následující větě, dokazovat je však již nebudeme a důkazy *přenecháme čtenáři za cvičení.*

Věta 4.3.12. *Nechť* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A > 0$. *Potom existuje takové prstencové okolí* $\mathcal{P}(x_0)$, *že* $f > 0$ *na* $\mathcal{P}(x_0)$. *Je-li* $f(x) \to A$, $g(x) \to B$ *pro* $x \to x_0$ *a je* $A < B$, *pak existuje* $\mathcal{P}(x_0)$ *tak, že*

$$f(x) < g(x)\,, \quad x \in \mathcal{P}(x_0)\,.$$

Je-li $f(x) \le g(x)$ *na nějakém* $\mathcal{P}(x_0)$ *a* $f(x) \to A$, $g(x) \to B$, *pak* $A \le B$. *Jestliže konečně platí na nějakém* $\mathcal{P}(x_0)$

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

a $\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A$, *potom* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

Velmi lehce též obdržíme nutnou a postačující podmínku pro existenci vlastní limity funkce; zpravidla se jí říká opět *Bolzano-Cauchyho podmínka.*

Věta 4.3.13. *Nechť je funkce* f *definována v jistém prstencovém okolí* $\mathcal{P}(x_0)$. *Potom existuje* $A \in \mathbb{R}$ *tak, že platí* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, *právě když platí*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x, y \in \mathcal{P}_\delta(x_0))(|f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,. \tag{4.3}$$

Důkaz. Je-li $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, pak k $\varepsilon > 0$ lze nalézt $\delta > 0$ tak, že

$$x, y \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \Rightarrow ((|f(x) - A| < \varepsilon/2) \wedge (|f(y) - A| < \varepsilon/2))\,;$$

platí tedy také

$$x, y \in \mathcal{P}_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le |f(x) - A| + |f(y) - A| < \varepsilon\,.$$

Tím jsme dokázali jednu (lehčí) z implikací, které k důkazu ekvivalence potřebujeme dokázat. Pro důkaz druhé implikace nalezneme nejprve potřebné $A \in \mathbb{R}$ a pak ukážeme, že je limitou funkce f v bodě x_0. Zvolme nejprve posloupnost $\{x_n\}$, $x_0 \ne x_n \to x_0$. K $\varepsilon > 0$ nalezněme $\delta > 0$ a $\mathcal{P}_\delta(x_0)$ z podmínky (4.3). Pak však existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $x_n \in \mathcal{P}_\delta(x_0)$ pro všechna $n \ge k$ a také pro všechna $m \ge k$. Platí tedy

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m, n \ge k)(|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon)$$

a existuje tedy podle Věty 2.4.8 takové $A \in \mathbb{R}$, že $f(x_n) \to A$. Nalezené A je „kandidátem“ na hledanou limitu. Přejdeme-li v podmínce k limitě pro $m \to \infty$, dostaneme

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(|f(x_n) - A| \leq \varepsilon)\,.$$

Pak však pro libovolné $x \in \mathcal{P}_\delta(x_0)$ je možné provést odhad

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - A| < 2\varepsilon$$

což dává podle definice $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. Tím je dokončen důkaz druhé implikace a celé věty. □

Příklad 4.3.14. Platí $\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$. Skutečně, zvolíme-li libovolně $\varepsilon > 0$, pak platí při volbě $\delta = \varepsilon$

$$(x \in \mathcal{P}_\delta(+\infty)) \Leftrightarrow (x > 1/\delta) \quad \text{a tedy} \quad (1/x < \delta = \varepsilon)\,.$$

Příklad 4.3.15. Nechť $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ je polynom stupně n. Potom platí

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \lim_{x\to\infty} x^n \cdot \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right) = +\infty\,.$$

Ukažte, že $\lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$, je-li n sudé a $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, je-li n liché. Ve všech ostatních bodech je

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)\,,$$

neboť podle Poznámky 4.2.14 je polynom spojitá funkce na $\mathbb{R}$.

Příklad 4.3.16. Určíme $\lim_{x\to a} R(x)$ pro všechna $a \in \mathbb{R}^*$ pro funkci

$$R(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}\,.$$

Jelikož R je podle Poznámky 4.2.14 a Věty 4.2.13 jako podíl spojitých funkcí rovněž funkce spojitá v každém bodě $y \notin \{-1, 2\}$, je $\lim_{x\to y} R(x) = R(y)$ pro $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

Zbývá spočítat limity v bodech $\pm\infty$, -1 a 2. Platí

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - 5/x + 6/x^2}{1 - 1/x - 2/x^2} = 1\,;$$

použili jsme přitom větu 4.3.9 o limitě součtu a podílu funkcí. Protože je

$$R(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x-3}{x+1}\,, \quad x \neq 2\,,$$

a poslední zlomek, který se v každém prstencovém okolí $\mathcal{P}(2)$ shoduje s $R(x)$, je spojitou funkcí v bodě 2, je $\lim_{x\to 2} R(x) = \lim_{x\to 2}(x-3)/(x+1) = -1/3$. Vyšetření limity v bodě $y = -1$ na okamžik odložíme; viz dále Příklad 4.3.25.

Cvičení 4.3.17. Dokažte, že platí $\lim_{x\to 0}\left[1/x^2\right] = +\infty$ (zde značí $[t]$ funkci „celá část t“, zavedenou v Poznámce 1.4.30, tj. $[t]$ je největší celé číslo $\leq t$).

Příklad 4.3.18. Nechť platí $p \in \mathbb{N}$. Funkce $x \mapsto \sqrt[p]{x}$, $x \geq 0$, je spojitá v $(0,\infty)$. Skutečně, zvolme $y > 0$. Pak platí pro nějaké $K > 0$

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \lim_{x\to y} |\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{y}| = \lim_{x\to y} \frac{|x-y|}{(\sqrt[p]{x})^{p-1} + (\sqrt[p]{x})^{p-2}\cdot\sqrt[p]{y} + \cdots + (\sqrt[p]{y})^{p-1}} \leq \\ &\leq \quad \lim_{x\to y} |x-y|/K = 0\,. \end{aligned}$$

Ve jmenovateli zlomku vynecháme všechny členy až na poslední, čímž se zlomek nezmenší. Zbytek dostáváme pomocí limitního přechodu pro $x \to y$.

Poznámka 4.3.19. V definici limity lze přidat jisté omezení. Např. lze pracovat pouze s body, které na číselné ose leží vpravo nebo vlevo od x_0. Tak dostáváme definici jednostranných limit.

Definice 4.3.20 (Dirichlet 1837). Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom pro funkci f definujeme $A := \lim_{x\to x_0+} f(x)$, právě když platí

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x,\, 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A))\,.$$

Definici lze vyjádřit pomocí posloupností, a to tak, že platí $\lim_{x\to x_0+} f(x) = A$, právě když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ je

$$(x_0 \neq x_n \to x_0, x_n > x_0) \Rightarrow (f(x_n) \to A)\,.$$

Potom říkáme, že f má v bodě x_0 *limitu zprava* rovnou A (limita v bodě $-\infty$ má tento charakter, ale pro nevlastní body jednostranné limity nezavádíme). Analogicky jako limita jsou i jednostranné limity určeny jednoznačně.

Definice 4.3.21 (Dirichlet 1837). Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom pro funkci f definujeme $A := \lim_{x\to x_0-} f(x)$, právě když platí

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x,\, 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A))\,.$$

Ekvivalentně vyjádřeno pomocí posloupností je $\lim_{x\to x_0-} f(x) = A$, právě když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ platí

$$(x_0 \neq x_n \to x_0, x_n < x_0) \Rightarrow (f(x_n) \to A)\,.$$

V tomto případě říkáme analogicky, že funkce f má v bodě x_0 *limitu zleva* rovnou A.

Poznámky 4.3.22. 1. V předchozích definicích jsme ekvivalentní vyjádření pomocí posloupností vyslovili, aniž jsme příslušnou ekvivalenci dokázali. Tu lze však lehce dokázat podobnými postupy, které jsme použili výše pro „oboustranné“ limity.

2. Někdy se píší znaménka + a − pro vyjádření limity zprava a zleva jako indexy k vyšetřovanému bodu. Je-li jednostranná limita v bodě a vlastní, často se též užívá k jejímu označení symbolů $f(x_0+)$ a $f(x_0-)$.

3. Je zřejmé, že funkce má v bodě x_0 limitu, právě když v něm existují obě jednostranné limity a jsou si rovny.

Pomocí tohoto nástroje se zavádějí též spojitost zprava či zleva a derivace zprava či zleva apod.

Definice 4.3.23. Říkáme, že funkce f je *spojitá v bodě a zprava*, resp. *zleva*, jestliže platí

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a), \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to a-} f(x) = f(a)\,.$$

Poznámka 4.3.24. Je zřejmé, že funkce f je v bodě x_0 spojitá, právě když je v něm spojitá zprava i zleva.

Příklad 4.3.25. Vyšetření limity funkce R z Příkladu 4.3.16 v bodě $y = -1$ jsme odložili. Snadno nahlédneme, že R není omezená na žádném $\mathcal{P}(-1)$ a proto funkce nemá v bodě -1 vlastní limitu. Snadno si lze rozmyslet, že $\lim_{x\to -1} R(x)$ neexistuje, neboť

$$\lim_{x\to -1+} R(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to -1-} R(x) = +\infty\,.$$

Definice 4.3.26. Nyní zavedeme spojitost funkce na uzavřeném intervalu. Je-li funkce f definovaná na intervalu $[\,a, b\,]$ spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$, v bodě a spojitá zprava a v bodě b zleva, říkáme, že je *spojitá v intervalu* $[\,a, b\,]$, resp. kratčeji *spojitá v* $[\,a, b\,]$. Podobně se zavede spojitost i na polouzavřených intervalech.

Důsledek 4.3.27. *Je-li funkce f spojitá na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, jsou také funkce $|\,f\,|$, f^+ a f^- spojité na intervalu $I \subset \mathbb{R}$.*

Poznámky 4.3.28. 1. Předcházející případ, kdy se k vyšetřovanému bodu blížíme speciálním způsobem, lze jednoduše zobecnit. Tak se zavádějí pojmy *limita* či *spojitost vzhledem k množině*. Podrobněji, funkce f definovaná na $M \subset \mathbb{R}$ má v bodě $a \in M'$ *limitu A vzhledem k M*, jestliže platí

$$(\forall \mathcal{U}(A))(\exists \mathcal{P}(a))(f(\mathcal{P}(a) \cap M) \subset \mathcal{U}(A))\,.$$

Aby však byla tato limita jednoznačně definována, musí být $\mathcal{P}_\delta(a) \cap M \neq \emptyset$. Množinu všech bodů s touto vlastností značíme M' a její prvky jsou tzv. hromadné body množiny M. Pomocí posloupností popíšeme tento pojem podobně, jako jsme to již udělali s limitou zprava či zleva, pouze popis „uvažovaných posloupností" se změní. Tedy ekvivalentně

$$(a \neq x_n \to a,\ x_n \in M) \ \Rightarrow\ (f(x_n) \to A)\,.$$

K zápisu limity vzhledem k množině M se pro $y \in M'$ zpravidla užívá symbol

$$\lim_{x \to y, x \in M} f(x) = A\,.$$

2. Uvědomte si, že v případě limity není nutné pracovat v bodě $a \in M$; podstatné je to, že pracujeme s posloupnostmi bodů z M, které konvergují k bodu a.

3. Se spojitostí pracujeme obdobně: funkce f je *spojitá v bodě $a \in M$ vzhledem k množině $M \subset \mathbb{R}$*, právě když platí

$$\lim_{x \to a, x \in M} f(x) = f(a)\,. \tag{4.4}$$

4. Pomocí předchozího pojmu lze zavést „globální" spojitost vzhledem k množině: říkáme, že funkce f definovaná na množině $M \subset \mathbb{R}$ je spojitá na M vzhledem k M, právě když (4.4) platí pro všechna $a \in M$. Názorně řečeno, na M pracujeme tak, jako kdyby vše mimo M „přestalo existovat".

Příklad 4.3.29. Dirichletova funkce není spojitá v žádném bodě z $\mathbb{R}$ (je *nespojitá* všude v $\mathbb{R}$). Je spojitá ve všech bodech z $\mathbb{Q}$ vzhledem k množině $\mathbb{Q}$ a ve všech bodech z $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vzhledem k množině $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dobře si tento příklad promyslete.

Poznámka 4.3.30. Množina všech funkcí spojitých na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ tvoří lineární prostor. To plyne snadno z „linearity vlastní limity", resp. z ní vyplývajících vět o spojitosti součtu a násobku funkce v bodě (čtenář si je snadno zformuluje a dokáže sám, je však třeba dát pozor na definiční obor). Tento prostor budeme značit $\mathcal{C}(I)$. V případě, že je $I = [\,a, b\,]$, mají všechny prvky prostoru $\mathcal{C}([\,a, b\,])$ velmi zajímavé vlastnosti. S některými z nich se nyní seznámíme; všechny jsou přímým či nepřímým důsledkem axiómu (13).

Věta 4.3.31 (Weierstrass 1861). *Je-li funkce $f \in \mathcal{C}([\,a, b\,])$, je f na $[\,a, b\,]$ omezená a existují body $t, u \in [\,a, b\,]$ tak, že pro všechna $x \in [\,a, b\,]$ platí nerovnosti $f(t) \leq f(x) \leq f(u)$; funkce f tedy nabývá v tomto intervalu svého maxima a minima.*

Důkaz. Dokážeme, že f nabývá na $[\,a, b\,]$ svého maxima v nějakém bodě ζ. Pak platí $f(x) \leq f(\zeta)$ pro všechna $x \in [\,a, b\,]$, a tedy f je shora omezená na $[\,a, b\,]$. Označme $M := \sup\{f(x); x \in [\,a, b\,]\}$ a sestrojme posloupnost bodů $\{x_n\}$ v $[\,a, b\,]$ tak, aby $f(x_n) \to M$; zatím víme pouze, že M je prvkem $\mathbb{R}^*$. Protože je posloupnost $\{x_n\}$ omezená, lze z ní podle Věty 2.4.4 vybrat konvergentní posloupnost $\{x_{n_k}\}$. Je $a \leq x_{n_k} \leq b$, a tedy $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \zeta \in [\,a, b\,]$. Pak ale platí pro $k \to \infty$ současně

$$f(x_{n_k}) \to M\,, \qquad f(x_{n_k}) \to f(\zeta)\,,$$

neboť jde o vybranou posloupnost z $\{x_n\}$ a f je zároveň spojitá v bodě ζ. Z jednoznačnosti limity plyne rovnost $M = f(\zeta) \in \mathbb{R}$. Pro případ infima je postup analogický. $\square$

Následující tvrzení ukazuje, že role maxima a minima v předcházející větě není tak výjimečná: funkce $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ nabývá dokonce *všech* hodnot mezi oběma hodnotami $f_{\min}$ a $f_{\max}$. Také důkaz tohoto tvrzení je založen na axiómu (13) pro $\mathbb{R}$. Nejdříve dokážeme zjednodušenou variantu tvrzení.

Věta 4.3.32 (Bolzano 1817). *Nechť $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ a $f(a)f(b) < 0$. Potom existuje bod $\zeta \in (a,b)$ tak, že $f(\zeta) = 0$.*

Důkaz. Použijeme Větu 2.4.1 o půlení intervalů. Budeme induktivně definovat do sebe vložené intervaly $[\,\alpha_n, \beta_n\,]$, $n \in \mathbb{N}$, takové, aby v jejich jednobodovém průniku ležel právě hledaný bod ζ. Můžeme předpokládat, že $f(a) < 0$, jinak bychom hledali nulový bod $-f$, který je pak i nulovým bodem f. Položme $a = \alpha_1$, $b = \beta_1$. Je-li v půlícím bodě $t = (\alpha_1+\beta_1)/2$ hodnota f rovna 0, jsme hotovi, neboť můžeme položit $\zeta := t$. Je-li $f(t) > 0$, položíme $\alpha_2 := \alpha_1$, $\beta_2 := t$; pro $f(t) < 0$ položíme $\alpha_2 := t$, $\beta_2 := \beta_1$. V obou případech dostaneme interval o délce $(b-a)/2$, pro jehož koncové body α_2, β_2 platí $f(\alpha_2) < 0 < f(\beta_2)$. Stejným způsobem postupujeme dále, nicméně dokončeme formálně induktivní definici. Předpokládejme, že jsou již zvoleny intervaly $[\,\alpha_k, \beta_k\,]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, takové, že jejich délka je rovna $(b-a)/2^{k-1}$ a je

$$a = \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_n < \beta_n \le \cdots \le \beta_2 \le \beta_1 = b\,. \tag{4.5}$$

Je-li v půlícím bodě $t = (\alpha_n + \beta_n)/2$ hodnota f rovna 0, položíme $\zeta := t$. V takovém případě hledání nulového bodu ζ po konečném počtu kroků končí. Je-li $f(t) > 0$, položíme $\alpha_{n+1} := \alpha_n$, $\beta_{n+1} := t$; pro $f(t) < 0$ položíme $\alpha_{n+1} := t$, $\beta_{n+1} := \beta_n$. V obou případech dostaneme interval o délce $(b-a)/2^n$, pro jehož koncové body $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ platí $f(\alpha_{n+1}) < 0 < f(\beta_{n+1})$. Průnik $\bigcap_{n=1}^{\infty} [\,\alpha_n, \beta_n\,]$ je podle Věty 2.4.1 jednobodová množina. Označíme její prvek ζ. S ohledem na $\alpha_n \to \zeta$, $\beta_n \to \zeta$ a spojitost f v bodě ζ platí $f(\alpha_n) \to f(\zeta)$, $f(\beta_n) \to f(\zeta)$. Zároveň platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nerovnosti $f(\alpha_n) \le 0 \le f(\beta_n)$, takže je

$$\lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) \le 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} f(\beta_n) \ge 0\,, \quad \text{a proto} \quad f(\zeta) = 0\,. \tag{4.6}$$

Tím jsme důkaz dokončili. $\square$

Poznámka 4.3.33. Popišme stručně alternativní kratší důkaz: bez újmy na obecnosti nechť $f(a) < 0$. Položme

$$\zeta = \sup\{x \in [\,a,b\,]; f < 0 \text{ na } [\,a,x\,]\}\,.$$

Potom zřejmě je $\zeta < b$, neboť $f(t) > 0$ pro všechna t z nějakého levého okolí b. Dále platí $f(\zeta) = 0$. Skutečně, při $f(\zeta) < 0$ by ζ nebylo supremem definované množiny, zatímco v případě $f(\zeta) > 0$ by supremum uvažované množiny muselo být menší než ζ.

Delší důkaz, který jsme pro Větu 4.3.32 použili, je poněkud průhlednější a přesně stejně lze postupovat i při numerickém řešení rovnice $f(x) = 0$ vzhledem k neznámé x. Zároveň jsme se „technicky“ více přiblížili důkazu Bernarda Bolzana (1781 – 1848), který byl vyspělostí postupu na vrcholu soudobé důkazové techniky; Bolzanovi patří prvenství v tom, že si uvědomil, že takové tvrzení je třeba dokazovat a že vůbec není *zřejmé.* A je zde ještě další důvod, který prozradíme v Historických poznámkách 4.4.7. Za zmínku stojí fakt, že patrně poprvé upozornil na Bolzanovy práce z analýzy r. 1870 Hermann Hankel (1839 – 1873) a teprve Otto Stolz (1842 – 1905) v r. 1881 podrobněji zhodnotil v [11] tehdy známé Bolzanovy výsledky.

Věta 4.3.34. *Nechť* $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ *není konstantní. Potom funkce* f *nabývá všech hodnot z intervalu* $[\,f_{\min}, f_{\max}\,]$*, kde* $f_{\min}$ *a* $f_{\max}$ *jsou minimum a maximum funkce* f *na* $[\,a,b\,]$.

Důkaz. Označme u, v body, pro něž je $f(u) = f_{\min}$, $f(v) = f_{\max}$. Zvolme nyní libovolně $c \in (f_{\min}, f_{\max})$. Potom funkce $f - c$ je rovněž funkce z $\mathcal{C}([\,a,b\,])$, která je spojitá na intervalu I o krajních bodech u, v.

V tomto intervalu $I \subset (a,b)$ nabývá podle již dokázané Věty 4.3.32 funkce $f - c$ nulové hodnoty v bodě $\zeta \in I$. Proto je $f(\zeta) - c = 0$ a je tedy $f(\zeta) = c$. Tím je důkaz dokončen. □

Definice 4.3.35. Říkáme, že funkce f má na intervalu I *Darbouxovu vlastnost*, resp. *vlastnost nabývání mezihodnot* [6]), jestliže pro každé dva různé body $x, y \in I$ a každé c z otevřeného intervalu o krajních bodech $f(x)$, $f(y)$, existuje ζ z otevřeného intervalu o krajních bodech x, y, tak, že je $f(\zeta) = c$.

Větu 4.3.34 lze vyslovit s použitím předcházející definice ještě v následující formě:

Věta 4.3.36 (Cauchy 1821). *Je-li* f *spojitá v intervalu* I*, má* f *na* I *Darbouxovu vlastnost.*

Důkaz. Je-li f konstantní, není co dokazovat. Nechť pro $x, y \in I$, $x < y$, platí $f(x) \neq f(y)$. Pak na interval $[\,x, y\,]$ a zvolený bod c aplikujeme předcházející tvrzení. □

Uveďme na závěr ještě „geometričtější“ (a v jistém ohledu snad i trochu názornější) tvar obou předcházejících vět, popisujících vlastnost nabývání mezihodnot. Platí následující tvrzení:

Věta 4.3.37 (Bolzano 1817). *Je-li* f *spojitá funkce na intervalu* I*, pak* $f(I)$ *je také interval, nebo jednobodová množina.*

Bolzanova práce [3] byla ve své době opravdu podstatným krokem vpřed, i když patrně neovlivnila jeho současníky a stupeň její přesnosti odpovídal soudobým standardům, protože teoretický základ reálných čísel byl podán o více než 50 let později.

[6]) Druhý název uvádíme jen pro informaci, v cizojazyčných publikacích je totiž frekventovanější (např. „intermediate value property“).

Je vhodné si uvědomit, že „typ intervalu“ se zobrazením spojitou funkcí obecně nezachovává. Pouze v případě, že interval I je uzavřený, je jeho obraz uzavřený interval nebo jednobodová množina.

Poznámka 4.3.38. Spojení popsané vlastnosti nabývání mezihodnot se jménem Jeana Gastona Darbouxe (1842 – 1917) je pochopitelné, neboť on si poprvé povšiml, že existují i *nespojité* funkce s touto vlastností a podrobně tuto vlastnost studoval (1875). Někteří matematikové se totiž domnívali, že by se pomocí této vlastnosti mohla spojitost funkce *definovat.* Jak vidíme, mají tuto vlastnost všechny spojité funkce. Existují však funkce s touto vlastností definované např. na $\mathbb{R}$, které nejsou spojité v *žádném* bodě $\mathbb{R}$. Jsou mezi nimi funkce, které zobrazují *každý* interval $I \subset \mathbb{R}$ *na* $\mathbb{R}$. Na první pohled poněkud překvapivý se může zdát fakt, že *každou spojitou funkci na intervalu* $I \subset \mathbb{R}$ lze vyjádřit jako součet takových dvou funkcí. Viz např. [1] a další tam citované práce, nebo [4].

Příklad 4.3.39. S pomocí Tvrzení 4.3.34 lze již velmi snadno dokázat, že funkce $f(x) = \sin(1/x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus 0$, dodefinovaná v bodě 0 libovolnou hodnotou z intervalu $[-1, 1]$, má Darbouxovu vlastnost. Stačí si rozmyslit, že v každém intervalu $[a, b]$, pro nějž je $0 \in [a, b]$, nabývá f *všech hodnot* z intervalu $[-1, 1]$.

Věta 4.3.40. *Nechť $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je monotónní* omezená *funkce. Potom existují $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to b-} f(x)$ a jsou vlastní.*

Důkaz. Důkaz lze opět provést pomocí posloupností, my však ho provedeme na základě „ε-δ–definice“. Nechť je např. f neklesající. Pak je

$$\lim_{x\to b-} f(x) = \sup\{f(x); x \in (a, b)\} =: A\,,$$

což snadno dokážeme pomocí základních vlastností suprema. K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje bod $y < b$, $y \in (a, b)$, tak, že je $f(y) > A - \varepsilon$. S ohledem na monotonii stačí položit $\delta = b - y$ a platí

$$x \in (b - \delta, b) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\,,$$

protože je (podrobněji) $A - \varepsilon < f(y) \le f(x) \le A < A + \varepsilon$. Podobně se dokáže tvrzení pro všechny zbývající případy. ☐

Důsledek 4.3.41. *Je-li f monotónní na (a, b), pak existuje $\lim_{y\to x-} f(y)$ pro všechna $x \in (a, b]$ a $\lim_{y\to x+} f(y)$ pro všechna $x \in [a, b)$; monotónní funkce je spojitá na intervalu I, právě když má na I Darbouxovu vlastnost.*

Poznámka 4.3.42. Nechť funkce f je neklesající na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Přiřaďme každému bodu $x \in I$, v němž je f nespojitá, interval

$$J_x := \big(\lim_{t\to x-} f(t), \lim_{t\to x+} f(t)\big)\,.$$

Jsou-li např. $x, y \in I$, $x < y$, body nespojitosti funkce f, potom zřejmě platí $\lim_{t\to x+} f(t) \le \lim_{t\to y-} f(t))$ a $J_x \cap J_y = \emptyset$. To platí pro libovolnou dvojici (různých) bodů nespojitosti f. V každém J_x lze zvolit $r_x \in \mathbb{Q}$ a tak získat prosté zobrazení množiny bodů nespojitosti do $\mathbb{Q}$. Z jeho existence plyne, že množina bodů nespojitosti funkce f je spočetná. Zaměníme-li f za $-f$, dostaneme obdobné tvrzení pro nerostoucí funkce. Odtud vyplývá další tvrzení:

Tvrzení 4.3.43. *Množina bodů nespojitosti každé monotónní funkce, definované na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, je spočetná.*

Poznámka 4.3.44. Předcházející tvrzení lze zobecnit. Body nespojitosti monotónní funkce jsou totiž tzv. *body nespojitosti prvního druhu.* V těchto bodech existují obě (vlastní) jednostranné limity funkce, ale přesto v nich není funkce spojitá. Zvědavějšímu čtenáři doporučuji nahlédnout do učebnice [8], Kap. V, Věta 71.

Dokázali jsme nejdůležitější věty o funkcích z $\mathcal{C}([\,a,b\,])$: větu o omezenosti, o nabývání maxima a minima, větu (či věty) o nabývání mezihodnot. Jejich důkazy však mohou být vedeny mnoha způsoby. Následující Větu 4.3.46 dokážeme obratem, kterému se říkává *spojitá indukce.* Nejdříve uvedeme ještě jednu definici.

Definice 4.3.45. Nechť pro množiny M_α, $\alpha \in A$, a M platí $M \subset \bigcup_{\alpha\in A} M_\alpha$. Potom říkáme, že systém $\{M_\alpha;\, \alpha \in A\}$ je *pokrytím* M, nebo také, že systém $\{M_\alpha;\, \alpha \in A\}$ *pokrývá* M.

Věta 4.3.46 (Heine 1872, Borel 1894). *Nechť $\{I_\alpha; \alpha \in A\}$ je systém* otevřených *intervalů, který pokrývá interval $[\,a,b\,]$. Pak existuje konečná podmnožina $K \subset A$ tak, že podsystém $\{I_\alpha; \alpha \in K\}$ pokrývá $[\,a,b\,]$.*

Důkaz. Položíme

$$\beta = \sup\{x \in [\,a,b\,];\ [\,a,x\,] \text{ je pokryt konečně mnoha } I_\alpha\}\ . \tag{4.7}$$

Zřejmě je uvažovaná množina neprázdná, neboť obsahuje body z nějakého pravého okolí bodu a; existuje totiž I_{α_0} tak, že $a \in I_{\alpha_0}$. Dále existuje I_{α_1} tak, že je $\beta \in I_{\alpha_1}$. V I_{α_1} leží takový bod x, pro který je interval $[\,a,x\,]$ je pokryt konečně mnoha prvky $\{I_\alpha; \alpha \in A\}$. Existuje tedy konečná množina K' tak, že $[\,a,x\,] \subset \{I_\alpha;\, \alpha \in K'\}$. Pak však existuje $x' > \beta$ tak, že systém $\{I_\alpha;\, \alpha \in (K' \cup \{\alpha_1\})\}$ je konečným pokrytím $[\,a,x'\,]$. Je-li $\beta = b$, je důkaz dokončen, při $\beta < b$ dostáváme z $x' > \beta$ spor s vlastností suprema. ☐

Je-li již dokázána předcházející věta, které se u nás zpravidla říká *Borelova* a někdy též *Heine-Borelova*, je důkaz omezenosti funkce $f \in \mathcal{C}([\,a,b\,])$ velmi jednoduchý; probíhá takto:

Jiný důkaz věty 4.3.31. Rozšiřme pomocí konstantních funkcí o hodnotách $f(a)$ a $f(b)$ funkci f z $[\,a,b\,]$ na $\mathbb{R}$; ze spojitosti takto rozšířené funkce f nalezneme pro všechna $x \in [\,a,b\,]$ taková okolí $\mathcal{U}(x)$, na nichž je f omezená (existenci těchto okolí zaručuje spojitost rozšíření f). Zřejmě je pak

$$[\,a,b\,] \subset \bigcup_{x\in[\,a,b\,]} \mathcal{U}(x)$$

a z pokrytí $\{\mathcal{U}(x); x \in [\,a,b\,]\}$ vybereme *konečné* pokrytí $[\,a,b\,]$. Pak maxima a minima odhadů f na prvcích tohoto *konečného* pokrytí dávají horní a dolní odhad pro f na $[\,a,b\,]$. □

4.4 Limita složené funkce

Na závěr této kapitoly jsme si ponechali větu o limitě složené funkce. Začátečníkům se často jeví jako obtížná.

Věta 4.4.1. *Nechť pro $a \in \mathbb{R}$ existuje vlastní limita* $\lim_{x\to a} g(x) = A$ *a nechť existuje (ne nutně vlastní)* $\lim_{y\to A} f(y) = B$. *Potom platí*

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = B\,,$$

jestliže je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(1) *funkce f je spojitá v A, nebo*

(2) *existuje takové $\mathcal{P}_\delta(a)$, ve kterém g nenabývá hodnoty A.*

Příklad 4.4.2. Před důkazem si ukažme na jednoduchém příkladě, co se může stát. Nechť $g(x) = |\operatorname{sgn}(x)|$, $f(x) = 1 - g(x-1)$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$, $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$, a kdybychom použili mechanicky bez ověření předpokladů předchozí větu, dostali bychom $\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 0$, i když, jak se snadno ověří, je $f(g(x)) = 1$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Důkaz Věty 4.4.1. Předpokládejme nejprve splnění podmínky (1). Zvolme $\mathcal{U}(B)$. Je-li f spojitá v A, je $B = f(A)$ a existuje $\mathcal{V}(A)$ tak, že $f(\mathcal{V}(A)) \subset \mathcal{U}(B)$. K $\mathcal{V}(A)$ existuje $\mathcal{P}(a)$ tak, že

$$g(\mathcal{P}(a)) \subset \mathcal{V}(A)\,, \quad \text{a tedy} \quad f(g(\mathcal{P}(a)) \subset f(\mathcal{V}(A)) \subset \mathcal{U}(B)\,,$$

z čehož již plyne dokazovaný vztah pro limitu. Předpokládejme nyní splnění předpokladu (2). Pak pro libovolné $\mathcal{U}(B)$ lze nalézt takové prstencové okolí $\mathcal{P}'(A)$, že je

$$f(\mathcal{P}'(A)) \subset \mathcal{U}(B)\,.$$

Nyní k $\mathcal{V}(A) = \mathcal{P}'(A) \cup \{A\}$ existuje takové $\mathcal{P}_1(a)$, že $g(\mathcal{P}_1(a)) \subset \mathcal{V}(A)$ a jestliže položíme $\mathcal{P}(a) = \mathcal{P}_1(a) \cap \mathcal{P}_\delta(a)$, platí dokonce

$$g(\mathcal{P}(a)) \subset \mathcal{V}(A) \setminus \{A\} = \mathcal{P}'(A)\,.$$

Potom však platí

$$f(g(\mathcal{P}(a)) \subset f(\mathcal{P}'(A)) \subset \mathcal{U}(B)\,,$$

čímž je již důkaz dokončen. □

Čtenář si snadno rozmyslí, že předcházející věta platí i v případě $a = \pm\infty$, i když se k těmto bodům blížíme „jednostranně“. Při práci s jednostrannými limitami je však nutno být opatrný a při řešení konkrétního příkladu si bude musit čtenář rozmyslit postup sám. Je však vhodné jeden důležitější obecný postup uvést: pro řešení některých příkladů se hodí toto tvrzení (poznamenejme, že např. v učebnici [7] jsou limity v $\pm\infty$ tímto způsobem *definovány*) o rovnosti limit:

Lemma 4.4.3. *Platí* $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$, *právě když* $\lim_{t\to 0+} f(1/t) = A$.

Důkaz. Nechť $\mathcal{U}(A)$ je okolím A. Je-li nyní interval $(1/\delta, +\infty)$ volen tak, že platí $f((1/\delta, +\infty)) \subset \mathcal{U}(A)$, pak pro $g(t) = 1/t$, $t \in (0, +\infty)$, je $(f \circ g)((0, \delta)) \subset \mathcal{U}(A)$. Podobně dostaneme druhou část tvrzení: jeho podstatou je vzájemně jednoznačná korespondence pravých okolí bodu 0 a okolí bodu $+\infty$. □

Příklad 4.4.4. Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = A$, pak také $\lim_{x\to a} |f(x)| = |A|$. Protože je funkce $x \mapsto |x|$ spojitá na $\mathbb{R}$, použijeme pro $A \in \mathbb{R}$ první část věty, pro případ $A = +\infty$ nebo $A = -\infty$ použijeme její druhou část. Složitější ilustrativní příklady si ukážeme v Kapitole 6.

Poznámka 4.4.5. Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ a g je omezená funkce na nějakém prstencovém okolí bodu a, pak $\lim_{x\to 0} g(x)f(x) = 0$. Zřejmě existuje $K > 0$ tak, že platí $0 \le |g(x)f(x)| \le K|f(x)|$ na nějakém $\mathcal{P}(a)$. Zbytek je již důsledkem Věty 4.3.12. Toto tvrzení se často používá při výpočtech.

Další tvrzení o limitách funkcí analogická tvrzením o limitách posloupností přenecháváme čtenáři: měl by je formulovat a samostatně dokázat.

Poznámka 4.4.6 (důležitá). Čtenář by si měl již nyní povšimnout, že při důkazech řady vět o spojitosti a o limitách nevyužíváme žádná hluboká speciální tvrzení o $\mathbb{R}$. V některých jsme sice užili uspořádání (např. v tvrzeních o limitách a nerovnostech), ale většina ostatních závisela jen na práci s okolími či prstencovými okolími uvažovaných bodů, případně na konvergenci posloupností apod. Nedalo by tedy o nic více práce dokázat jejich varianty pro případ, že bychom $\mathbb{R}$ nahradili množinou všech komplexních čísel $\mathbb{C}$ a vyšetřovali např. limity nebo spojitost *komplexních funkcí komplexní proměnné.*

Historické poznámky 4.4.7. Termín *funkce* zavedl GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1717) r. 1692. K jeho rychlému vývoji přispěli zejména příslušníci rodiny BERNOULLIŮ a LEONHARD EULER (1707 – 1783), od něhož pochází označení $f(x)$ (1748). Z mnoha dalších jmenujme ještě dva významné matematiky. K chápání pojmu funkce jako *libovolného* zobrazení bez implicitních představ analytického vyjádření nebo spojitosti přispěli zejména JEAN BAPTIST JOSEPH FOURIER (1768 – 1830) (1821) a JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805 – 1859) (1837). Množinové pojetí funkce, tj. její popis pomocí relace, resp. grafu, zavedl patrně GIUSEPPE PEANO (1858 – 1932) r. 1911.

Představy o spojitosti funkce se vyvíjely v souvislosti s vývojem pojmu funkce. Tak např. v raném stadiu vývoje byl považován za bod nespojitosti funkce takový bod, v němž se „měnil předpis“, který funkci popisoval. Největší *vliv* však patrně mělo zpřesnění tohoto pojmu, které opět přinesl Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857) v r. 1821 a později Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897). Podobné (snad i přesnější) pojetí jako u Weierstrasse nacházíme však již v Bolzanově práci z r. 1817; Bolzanovy práce však zůstaly po mnoho let téměř neznámé. Dnes lze říci, že Cauchy byl zkušenějším matematikem; jeho práce měly řádově mnohonásobně větší vliv. Bolzano někdy zatemňoval své úvahy filozofickými pasážemi a měl rozhodně blíže k samým základům analýzy. Ještě před prací [3] napsal v r. 1816 práci o binomickém rozvoji [2]. V těchto dvou relativně obsáhlých pracích publikovaných krátce za sebou poměrně velmi přesně zavedl pojmy limity, spojitosti a derivace funkce v bodě, spojitost na intervalu, maxima apod.

Nedostatečnost jeho úvah padá na vrub tehdejší absenci teorie reálných čísel. Zkoumáním rukopisů z Bolzanovy pozůstalosti, které byly objeveny patrně až na konci první světové války a publikovány ještě později, se ukázalo, že se Bolzano pokusil i o vybudování reálných čísel, ne však zcela zdařile. Psal již se znalostí dalších Cauchyho prací. Ty vyšly v letech 1823 (*Résumé des leçons ... sur le Calcul Infinitésimal*) a 1829 (*Léçons sur le Calcul différentiel*), a učinily z Cauchyho patrně matematika s největším vlivem na generace, které se vyrovnaly s položením základů matematické analýzy.

V r. 1872 napsal Eduard Heinrich Heine (1821 – 1881) práci, v níž exaktně odlišil spojitost v bodě, v intervalu a stejnoměrnou spojitost (tou se budeme zabývat v Kapitole 10). Heine založil definici spojitosti na zacházení s posloupnostmi (viz Věta 4.2.11).

Nalézt původ definice limity funkce je obtížné. I když se s náznaky definice limity funkce setkáváme dříve, opírá se naše časové určení o názor Alfréda Pringsheima (1850 – 1941) z r. 1899 (je obsažen v [9], str. 13), v němž vyjadřuje přesvědčení, že první *dostatečně přesnou* definici limity nacházíme u Weierstrasse. Jmenovat všechny jeho předchůdce je prakticky nemožné, na téma vývoje pojmu limity funkce bylo sepsáno již mnoho prací.

Tvrzení, obsažená ve Větě 4.3.31 byla známa již Weierstrassovi. Pod jménem „Hlavní věta“ (Hauptlehrsatz) se objevují v jeho přednáškách z r. 1861; tyto přednášky publikoval Georg Cantor (1845 – 1918) v r. 1870.

Otázka priority objevu Věty 4.3.32 je mimořádně obtížná. Již jsme se zmínili o Bolzanově přínosu. Vliv jeho práce *Rein analytischer Beweis ...* z r. 1817 (viz [3]) na ostatní matematiky je však zcela nejasný. Autorem z dnešního hlediska prvního přijatelného důkazu [7]), je patrně Cauchy. Jeho důkaz je velice podobný úvahám Bolzanovým z [3] a je to prakticky důkaz, který jsme prezentovali podrobně výše. Je také důkazem dodnes velmi často používaným. Podrobněji viz [6], str. 308 – 312. S Bolzanem a Cauchym spojujeme sérii uvedených tvrzení proto, že Bolzano jako prvý odhalil podstatný princip důkazu Věty 4.3.32 a Cauchy k prakticky stejnému důkazu dospěl patrně zcela nezávisle a uvedl ho ve všeobecnou známost. V době, kdy uvedený důkaz vznikal, nebyl k dispozici teoretický základ pro $\mathbb{R}$. Proto ani Cauchy, ani Bolzano nemohli dospět k *zcela exaktnímu* důkazu podle *dnešních měřítek přesnosti*.

Darboux se zasloužil o prozkoumání po něm pojmenované vlastnosti. K jednomu jeho důležitému výsledku o vlastnosti, která je po něm pojmenována, se ještě vrátíme; Věta 5.2.14, kterou dokážeme v Kapitole 5, je z obsáhlého traktátu, který je věnován studiu nespojitých funkcí. Pomocí desetinných rozvojů lze konstruovat i „velmi divoké“

[7]) Byl publikován ve známé knize [5], na kterou se budeme ještě mnohokrát odkazovat.

nespojité funkce s Darbouxovou vlastností. Studium takových funkcí je dosti obtížné, neboť např. funkce, které mají na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ Darbouxovu vlastnost, netvoří systém funkcí uzavřený vzhledem ke sčítání. Bohatost tohoto systému však, jak jsme se již výše zmínili, ukazuje například to, že *libovolná* funkce definovaná na $\mathbb{R}$ je součtem dvou funkcí s Darbouxovou vlastností. Toto a podobná další tvrzení nalezne čtenář v [4].

I dnes jsou počítány zmíněné věty mezi obtížné pro začátečníky a je vhodné se k nim vrátit. Existují elegantní metody umožňující jednotný přístup k těmto větám, ty však ocení lidé, kteří věty a jejich důkazy již znají; viz např. [10]. Takový postup zpravidla zastírá principy původních důkazů a obtížněji se pamatuje.

Literatura:

[1] Boas, R.: *A primer of real functions*, The Mathematical Association of America, 1981.

[2] Bolzano, B.: *Der binomische Lehrsatz, und aus Folgerung aus ihm der polynomische und die Reihen, die zur Berechnung der Logarithmen und Exponentialgrößen dienen, genauer als bisher erweisen*, Praha, 1816.

[3] Bolzano, B.: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daßzwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Gottlieb Haase, Praha, 1817.

[4] Bruckner, A. M.: *Differentiation of real functions*, Springer, Berlin, 1978, (Lecture notes in math. 659).

[5] Cauchy, L. A.: *Course d'analyse de l'École Royal Polytechnique*, Paris, 1821.

[6] Edwards, C. H.: *The historical development of the calculus*, Springer, New York, 1979.

[7] Jarník, V.: *Diferenciální počet I*, Academia, Nakladatelství ČSAV, Praha, 199x. (kniha vyšla ve více vydáních).

[8] Jarník, V.: *Diferenciální počet II*, Academia, Nakladatelství ČSAV, Praha, 199x. (kniha vyšla ve více vydáních).

[9] Pringsheim, A.: *Grundlagen der allgemainen Funktionenlehre*, obsaženo v: *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften,* Band II., 1. Teil, 1. Hälfte, B. G. Teubner, Leipzig, 1899 – 1916, (zachycuje stav k r. 1899).

[10] Moss, R. M. F., Roberts, G. T.: *A creeping lemma*, Amer. Math. Monthly **75** (1968), str. 649 – 652.

[11] Stolz, O.: *B. Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung*, Math. Ann. **18** (1881), str. 225 – 279.

Kapitola 5

Derivování

5.1 Motivace

Poznámky 5.1.1. 1. Když jsme motivovali zkoumání limit, uvedli jsme důležitý elementární příklad: jestliže např. $s(t)$, $t \in [0, \infty)$, je funkce popisující délku dráhy (v kilometrech), kterou automobil ujel za t hod., potom mezi místy, v nichž se nacházel v časech a, $b = a + h > a$, jel *průměrnou* rychlostí

$$\frac{s(b) - s(a)}{b - a} = \frac{s(a+h) - s(a)}{h} \qquad [\mathrm{km/hod}]\,.$$

Zkracujeme-li čas h mezi měřeními, blíží se tento poměr okamžité rychlosti automobilu v čase a. Analogickou úvahu lze provést i pro $h < 0$. Matematické vyjádření popsaného jevu odpovídá vztahu

$$v_a := \lim_{x \to a} \frac{s(x) - s(a)}{x - a}\,,$$

kde v_a je okamžitá rychlost v čase a.

2. Je-li podobně f funkce definovaná např. na $\mathbb{R}$, pak (načrtněte si obrázek)

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

je směrnice přímky pro sečnu grafu funkce f, která protíná graf v bodech $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$. Necháme-li b přibližovat k a, přechází sečna „v limitním případě v tečnu grafu f". Tato tečna má směrnici

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

V tomto okamžiku ponecháme stranou otázky existence takové limity v závislosti na vlastnostech funkce f i polemiku, co je to vlastně *tečna grafu* funkce f. Jde nám o motivaci zkoumání limit určitého tvaru, které vedou k pojmu *derivace funkce v bodě a*.

Poznámka 5.1.2. Pokud má čtenář pocit, že je mu „geometrická definice“ tečny grafu funkce jasná, nechť si rozmyslí, zda mají tečnu v bodě $[0,0]$ grafy funkcí $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, nebo $h(x) = \sqrt{|x|}$. Je možné, že pak zapochybuje; přitom jsme se složitějším příkladům záměrně vyhnuli.

Definice 5.1.3. Nechť je funkce f definována v nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0 z $\mathbb{R}$. Potom limitu (pokud existuje)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazýváme *derivací funkce f v bodě x_0* a značíme ji $f'(x_0)$.

Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, říkáme, že f má v bodě x_0 *vlastní derivaci*. Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že f má v bodě x_0 *nevlastní derivaci*. Pokud vyšetřovaná limita neexistuje, říkáme, že f nemá v bodě x_0 derivaci nebo že $f'(x_0)$ neexistuje.

Poznámka 5.1.4. Snadno nahlédneme, že platí

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

což je někdy užitečná modifikace.

Definice 5.1.5. Podobně definujeme

$$\begin{aligned} f'_+(x_0) &:= \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \\ f'_-(x_0) &:= \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

Hodnoty $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ nazýváme *derivace zprava*, resp. *derivace zleva funkce f v bodě x_0*.

Poznámka 5.1.6. Zřejmě platí: funkce f má derivaci v bodě x_0, právě když existují obě jednostranné derivace f v bodě x_0 a jsou si rovny.

Poznámka 5.1.7. Jde o klasickou definici derivace. Případ, kdy je $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, je velmi důležitý, proto se jím budeme zabývat nejdříve.

Příklad 5.1.8. Zatím je naše „zásoba funkcí“ velmi malá, ukažme si však alespoň to, jak se derivuje mocnina s přirozeným exponentem. Spočtěme derivaci funkce x^n v bodě $y \in \mathbb{R}$. Platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \to y} \frac{x^n - y^n}{x - y} &= \lim_{x \to y} \frac{(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})}{x - y} = \\ &= \lim_{x \to y} (x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}) = ny^{n-1}. \end{aligned}$$

Tento poznatek se zpravidla vyjadřuje vzorcem, který obvykle zapisujeme ve tvaru

$$(x^n)' = nx^{n-1}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Poznámka 5.1.9. V době vzniku diferenciálního počtu se počítalo s „nekonečně malými veličinami“. Ukažme si průběh výpočtu derivace funkce $x \mapsto x^2$ v bodě y přibližně tak, jak k němu přistupoval například Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716):

$$\frac{(y+\delta)^2 - y^2}{\delta} = \frac{y^2 + 2y\delta + \delta^2 - y^2}{\delta} = 2y + \delta\,,$$

kde δ je „nekonečně malé“. Odtud zanedbáním δ dostáváme v obvyklém zápisu

$$(x^2)' = 2x\,.$$

Všimněte si, že číslem δ nejprve krátíme (můžeme, protože „δ je nenulové“) a pak je zanedbáváme (δ jsme položili rovno nule); srovnejte se zmínkou o kriticích v Historických poznámkách 5.2.30.

Věta 5.1.10. *Nechť funkce f má vlastní derivaci $f'(x_0)$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak je f v bodě x_0 spojitá.*

Důkaz. Zřejmě je-li $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ a $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\right) = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = 0\,,\end{aligned}$$

a proto $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$; použili jsme Větu 4.3.9 o limitě součinu funkcí. □

Příklad 5.1.11. Nechť $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$; spočtěme $f'(0)$ pomocí jednostranných derivací

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0+} \frac{1 - 0}{x - 0} = +\infty\,,\\ \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0-} \frac{-1 - 0}{x - 0} = +\infty\,,\end{aligned}$$

tj. jednostranné derivace existují a jsou obě rovny $+\infty$. Funkce sgn má proto v bodě 0 derivaci rovnou $+\infty$. Funkce sgn však *není* v bodě 0 spojitá. V ostatních bodech má sgn derivaci nulovou, tj. vlastní.

Příklad 5.1.12. Zkusme zderivovat (spojitou) funkci $f(x) = |x|$. Zřejmě platí $(|x|)' = \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$, avšak $f'_+(0) = -f'_-(0) = 1$, a tedy derivace funkce sgn v bodě 0 neexistuje. Později uvidíme, že derivování vede k *funkcím*, které jsou značně komplikované.

Stručně řečeno: předcházející příklady ukazují, že z *existence derivace* funkce f v bodě x_0, ještě *neplyne* spojitost f v bodě x_0 (chybí nám potřebné slovo „vlastní“) a že také ze *spojitosti* f v bodě x_0 neplyne *existence* $f'(x_0)$. V tom, bohužel, někteří začátečníci chybují.

Definice 5.1.13. Nechť f je funkce s definičním oborem $D_f \subset \mathbb{R}$. Potom definujeme derivaci jakožto *funkci* f' „bodově“, tj. předpisem

$$f' : x \mapsto d(x)\,,$$

kde $d(x) = f'(x)$, pokud tato derivace je vlastní, nebo $d(x)$ je rovna vlastní jednostranné derivaci f v bodě x, pokud druhá (zbývající) jednostranná derivace neexistuje nebo je nevlastní. Takto definovanou funkci nazýváme *derivace funkce* f.

Poznámka 5.1.14. Až dosud byla pro nás derivace vždy číslem, nyní jsme ji definovali i jako *funkci*. Její definiční obor je zřejmě *vždy podmnožinou* D_f, je to zobrazení *do* $\mathbb{R}$, tedy body, v nichž má f nevlastní derivaci, do definičního oboru f' nezahrnujeme. Naopak do něj zahrnujeme i body, ve kterých existuje *právě jedna vlastní jednostranná derivace* funkce f.

Musíme však čtenáře upozornit, že v tomto ohledu nepanuje mezi matematiky shodný názor. Někteří chápou derivaci jako zobrazení do $\mathbb{R}^*$ a pak pracují i s funkcemi, nabývajícími nekonečných hodnot, jiní zase definují funkci f' pouze na množině všech $x \in \mathcal{D}_f$, ve kterých existuje $f'(x)$ a tak se dostávají do obtíží např. v krajních bodech intervalu. Musíme tedy dávat pozor, aby nedocházelo k nedorozuměním. Naše definice nám umožňuje mluvit o derivaci jakožto funkci např. i na intervalu $[\,a, b\,]$, stejně se však nevyhneme obtížím.

Je třeba se vyvarovat následující *závažné chyby*: funkce f se mechanicky zderivuje a určí se maximální množina, na níž má předpis $x \mapsto f'(x)$ smysl. Ta se prohlásí za definiční obor derivace f' (jakožto funkce). V příští kapitole zavedeme další důležité funkce, mezi nimi funkci log a sin. V tomto okamžiku nepatrně předběhneme a opřeme se o případné znalosti ze střední školy. Pokud shledáte příklad nesrozumitelný, přeskočte ho. Položíme-li $f : x \mapsto \log(\log(\sin x))$, není f funkce v našem slova smyslu, neboť předpis nemá smysl pro žádné $x \in \mathbb{R}$. Mechanickým derivováním však dospějeme k tomu, že pro derivaci f' platí

$$f'(x) = \frac{1}{\log(\sin x)} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\,,$$

přičemž existují body, v nichž má výraz na pravé straně předcházející rovnosti smysl. Přesto f nemůže zřejmě mít derivaci v *žádném* bodě x, není dokonce „co derivovat“.

Příklad 5.1.15. Již jsme popsali způsob, kterým lze pro každé $p \in \mathbb{N}$ definovat $\sqrt[p]{x}$ pro $x \geq 0$. Nyní tuto funkci

$$x \mapsto \sqrt[p]{x}$$

zderivujeme v bodě $y > 0$. Použijeme podobný postup jako v Příkladu 4.3.18.

Platí

$$\lim_{x\to y} \frac{\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{y}}{x-y} =$$

$$= \lim_{x\to y} \frac{(x-y)}{(x-y)[(\sqrt[p]{x})^{p-1} + (\sqrt[p]{x})^{p-2}\sqrt[p]{y} + \cdots + (\sqrt[p]{y})^{p-1}]} = \frac{1}{p(\sqrt[p]{y})^{p-1}}.$$

Platí tedy

$$(\sqrt[p]{x})' = (1/p)\, x^{(1/p)-1}.$$

Bude vhodné se seznámit i s jinými, ekvivalentními definicemi (vlastní) derivace, dříve však odvodíme některá početní pravidla pro derivování.

5.2 Početní pravidla

Věta 5.2.1. *Nechť f, g mají derivace v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom platí*

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0),$$

pokud má výraz vpravo smysl.

Důkaz. Nejprve si uvědomíme, že rovnost vypovídá o *existenci* i o *hodnotě* příslušných derivací. Důkaz je pouze formálním výpočtem, využívajícím větu o limitě součtu či rozdílu:

$$\begin{aligned} f'(x_0) \pm g'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \pm \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) \pm g(x)] - [f(x_0) \pm g(x_0)]}{x-x_0} = (f \pm g)'(x_0). \end{aligned}$$

Tím je vzorec pro derivování součtu a rozdílu dokázán. □

Cvičení 5.2.2. Existují-li *vlastní* jednostranné derivace $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$, je funkce f v bodě x_0 spojitá. Dokažte. Poznamenejme, že tyto jednostranné derivace mohou být různé, derivace $f'(x_0)$ tedy nemusí existovat, a přesto je f v bodě x_0 spojitá. Zhruba řečeno, jednostranné vlastní derivace „dávají“ obě jednostranné spojitosti a tedy spojitost.

Poznámka 5.2.3. Je-li $f(x) = a$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tj. f je konstantní funkce na $\mathbb{R}$, pak pro libovolné $x_0 \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{a-a}{x-x_0} = 0.$$

Konstantní funkce má tedy derivaci rovnou 0. Později ukážeme, že tato vlastnost množinu konstantních funkcí *na intervalu* charakterizuje.

Jestliže $a, b \in \mathbb{R}$ a $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, je lineární funkce, pak je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a \frac{x - x_0}{x - x_0} = a\,,$$

takže derivace lineární funkce je funkce konstantní.

Příklad 5.2.4. Předpokládejme, že funkce f má v x_0 *vlastní* derivaci $f'(x_0)$. Potom $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$ pro každé $c \in \mathbb{R}$. K tomu stačí spočíst

$$\lim_{x \to x_0} \frac{cf(x) - cf(x_0)}{x - x_0} = c \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = cf'(x_0)\,.$$

Věta 5.2.5. *Nechť f, g mají* vlastní *derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. Potom platí*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)\,.$$

Je-li navíc $g(x_0) \neq 0$, platí též

$$(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}\,.$$

Důkaz. Připomeňme ještě jednou, že se současně tvrdí nejen to, že derivace součinu či podílu existují, ale i to, jak se vypočtou. Platí

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \to x_0} g(x) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,.
\end{aligned}$$

Jednotlivé kroky je třeba zdůvodnit: prvá rovnost je důsledkem definice, druhá je pouze úpravou a pro odůvodnění třetí použijeme věty o limitě a aritmetických operacích; poslední je opět jen přepisem podle definice.

Podobně platí za výše uvedených předpokladů

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\cdot\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right) = \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)(g(x_0)-g(x))+g(x)(f(x)-f(x_0))}{g(x)g(x_0)(x-x_0)} = \\ &= \lim_{x\to x_0} -\frac{f(x)}{g(x)g(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + \\ &\quad + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{g(x)g(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}\,.\end{aligned}$$

Je třeba si uvědomit, že z předpokladu $g(x_0) \neq 0$ vyplývá, že existuje okolí bodu x_0, na kterém je $g(x) \neq 0$. První rovnost je pak pouhým přepisem definice. Druhou dostaneme převedením na společného jmenovatele, přičtením a odečtením výrazu $f(x)g(x)$ v čitateli a jednoduchou úpravou. Třetí je důsledkem Věty 4.3.9 o limitě a aritmetických operacích, poslední pak plyne z definice derivace. □

Na obě právě dokázané Věty 5.2.1 a 5.2.5 se lze odvolávat společně jako na *tvrzení o derivování a aritmetických operacích.*

Pro derivování složené funkce je důležité následující tvrzení, které je vlastně jednou ze slíbených alternativních definic (vlastní) derivace.

Věta 5.2.6 (Carathéodory 1950). *Funkce f má v bodě a vlastní derivaci, právě když existuje funkce φ definovaná na nějakém okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a taková, že φ je v bodě a spojitá a na $\mathcal{U}(a)$ platí rovnost*

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x-a)\,. \tag{5.1}$$

Existuje-li taková funkce φ, pak navíc ještě platí $f'(a) = \varphi(a)$.

Důkaz. Existuje-li $f'(a)$ vlastní, pak dostaneme snadno z definice derivace vyjádření funkce φ v $\mathcal{U}(a) \setminus \{a\}$: položíme $\varphi(x) = (f(x) - f(a))/(x - a)$. V bodě a definujeme $\varphi(a) = f'(a)$. Platí

$$\lim_{x\to a}\varphi(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = \varphi(a)$$

a φ je proto spojitá v bodě a. Stejná úprava nám poslouží i v obráceném postupu: vyjádříme φ z (5.1) a spočteme limitu φ v bodě a. Limita existuje, takže existuje i $f'(a)$ a platí $\varphi(a) = f'(a)$. □

Poznámka 5.2.7. Máme tedy k dispozici ekvivalentní definici (vlastní) derivace. Jak napovídá označení věty, tento přístup k derivaci pochází od Constantina Carathéodoryho (1883 – 1950). Ukazuje se, že je za určitých okolností velmi užitečný, např. při důkazech vět o derivování funkcí více proměnných. Nyní nám umožní snadno dokázat následující větu.

Věta 5.2.8. *Nechť má funkce f vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$ a nechť funkce g má vlastní derivaci v bodě $b = f(a)$. Potom složená funkce $g \circ f$ má vlastní derivaci v bodě a, přičemž platí*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a) = g'(f(a))f'(a)\,.$$

Důkaz. Existence derivací spolu s dokázanou Větou 5.2.6 o ekvivalenci zaručuje, že lze nalézt funkce ψ a φ tak, že platí

$$\begin{aligned} g(y) - g(b) &= \psi(y)(y - b)\,, \qquad y \in \mathcal{V}(b)\,,\\ f(x) - f(a) &= \varphi(x)(x - a)\,, \qquad x \in \mathcal{U}(a)\,, \end{aligned}$$

a to na vhodně volených okolích $\mathcal{U}(a)$ a $\mathcal{V}(b)$. Funkce φ je spojitá v bodě a a funkce ψ je spojitá v bodě b. Jelikož je podle Věty 5.1.10 funkce f spojitá v a a funkce g v $f(a)$, lze předpokládat, že po eventuálním zmenšení okolí $\mathcal{U}(a)$ platí $f(\mathcal{U}(a)) \subset \mathcal{V}(f(a))$, a je

$$g(f(x)) - g(f(a)) = \psi(f(x))(f(x) - f(a)) = \psi(f(x))\varphi(x)(x - a)$$

pro všechna $x \in \mathcal{U}(a)$. Avšak φ je spojitá v a a podle Věty 4.2.18 o spojitosti složené funkce je funkce $\psi \circ f$ spojitá v a, tedy součin $(\psi \circ f)\varphi$ je spojitý v a. Dále podle posledního tvrzení Věty 5.2.6 dostáváme dosazením a za x do koeficientu $\psi(f(x))\varphi(x)$ po úpravě

$$(g \circ f)'(a) = ((\psi \circ f)\varphi)(a) = \psi(f(a)).\varphi(a) = g'(f(a))f'(a)\,,$$

což je dokazovaný vzorec pro výpočty. □

Historická poznámka 5.2.9. Jeden z prvních z dnešního hlediska dostatečně přesných důkazů Věty 5.2.8 podal Otto Stolz (1842 – 1905) r. 1893. Carathéodoryho důkaz je formálně téměř beze změny přenesitelný do situace vyšetřování derivace při skládání komplexních funkcí komplexní proměnné nebo (reálných) funkcí více proměnných, kde navíc formálně značně zjednoduší prováděné úvahy.

Příklad 5.2.10. Pro úvahy o derivování funkcí více proměnných je užitečná ještě tato ekvivalentní definice, která má pro funkce na $\mathbb{R}$ následující tvar: *Funkce f má v bodě x vlastní derivaci, právě když existuje číslo A tak, že platí rovnost*

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\, f(x+h) - f(x) - Ah\,|}{|h|} = 0\,;$$

poznamenejme, že pokud takové číslo A existuje, platí zřejmě rovnost $f'(x) = A$. Skutečně, existuje-li vlastní derivace $f'(x)$, platí

$$0 = \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| = \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} \right| .$$

Zbytek je triviální.

Poznámka 5.2.11. V souvislosti s předchozím příkladem si uvědomte, že lineární funkce $Df_x(h) := f'(x) \cdot h$ $(= A \cdot h)$, $h \in \mathbb{R}$ [1]), popisuje přímku se směrnicí $f'(x)$ procházející počátkem. V eukleidovských prostorech vyšší dimenze (při studiu funkcí více proměnných) se derivace definuje jako *lineární zobrazení*. Protože i (vlastní) derivace v zavedeném smyslu $f'(x)$ je tímto lineárním zobrazením $Ah = f'(x)h$ jednoznačně určena, je takové zobecnění přirozené.

Definice 5.2.12. Definujme lineární funkci

$$g(x) = f(x) + f'(x)(y - x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Pak přímku o rovnici $y = f(x) + f'(x)(y - x)$ nazýváme *tečnou grafu f v bodě x*. Tato definice je přirozená v následujícím smyslu: pro rozdíl $f - g$ platí nejen [2])

$$\lim_{x \to y} (f - g)(x) = \lim_{x \to y} ((f(x) - f(y) - f'(y)(x - y)) = 0\,, \quad \text{ale také}$$

$$\lim_{x \to y} \frac{(f - g)(x)}{x - y} = \lim_{x \to y} \left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - \frac{f'(y)(x - y)}{x - y} \right) = 0\,.$$

Snadno si rozmyslíte, že je to *jediná lineární funkce*, která má obě tyto vlastnosti.

Lemma 5.2.13. *Nechť funkce f, definovaná na intervalu (a, b), nabývá svého maxima, resp. minima v bodě x_0 a nechť existuje $f'(x_0)$. Potom platí $f'(x_0) = 0$.*

Důkaz. Nechť v bodě x_0 nabývá f maxima na (a, b). Pokud by platilo $f'(x_0) \neq 0$, pak by na nějakém prstencovém okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu x_0 poměr přírůstků

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

byl téhož znamení jako $f'(x_0)$. Např. pro případ, že je vyšetřovaný zlomek na $\mathcal{P}(x_0)$ kladný, dostáváme pro $x \in \mathcal{P}(x_0)$, $x > x_0$ nerovnost $f(x) > f(x_0)$, což je spor s faktem, že maximum f na (a, b) je $f(x_0)$. Zbývající případ dovedeme ke sporu obdobným způsobem. □

Následující tvrzení má „teoretický charakter“. Je mj. zajímavé i tím, že na něm Cauchy založil původní (chybný) důkaz vět o střední hodnotě. Je zároveň doplněním našich poznatků o Darbouxově vlastnosti funkcí.

Věta 5.2.14 (Darboux 1875). *Nechť f má v intervalu (a, b) všude vlastní derivaci. Potom f' má Darbouxovu vlastnost.*

Důkaz. Snadno si uvědomíme, že stačí dokazovat: Je-li $f'(x) < c < f'(y)$ pro body $x, y \in (a, b), x < y$, pak existuje $\zeta \in (x, y)$ tak, že $f'(\zeta) = c$. Funkce f je zřejmě spojitá v (a, b). Definujme funkci

$$g(t) := f(t) - c\,t,\ t \in [\,x, y\,]\,,$$

[1]) Někdy se píše dokonce $Df(x) \cdot h$.

[2]) Popisujeme situaci tečny v bodě y a proměnnou značíme opět x, jak jsme zvyklí.

která je spojitá v $[x, y]$. Existuje proto bod $\zeta \in [x, y]$, ve kterém nabývá g minima na $[x, y]$. Platí proto

$$g'(\zeta) = 0\,, \text{ resp. } f'(\zeta) - c = 0\,,$$

a s ohledem na $g'(x) = f'(x) - c < 0$, $g'(y) = f'(y) - c > 0$ je $\zeta \in (x, y)$, čímž je důkaz dokončen. $\square$

Poznámka 5.2.15. Z této věty vyplývá, že např. funkce sgn není derivací žádné funkce definované na $\mathbb{R}$. Nespojitosti funkce, která je derivací, jsou komplikované: je-li f derivací a je nespojitá v bodě x_0, pak alespoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě x_0 neexistuje. Srovnejte s poslední ukázkou v Příkladech 7.1.5 a s příkladem z Poznámky 7.1.1.

Následující tři *důležitá* tvrzení se společně zpravidla nazývají *věty o střední hodnotě* (*diferenciálního počtu*). První má charakter pomocného lemmatu pro dvě další věty, které jsou velmi užitečné.

Věta 5.2.16 (Rolle 1691). *Nechť $f \in \mathcal{C}([a, b])$ a nechť derivace funkce f existuje ve všech bodech $x \in (a, b)$. Dále nechť je $f(a) = f(b)$. Potom existuje $\zeta \in (a, b)$ tak, že platí*

$$f'(\zeta) = 0\,.$$

Důkaz. Je-li f konstantní na $[a, b]$, zvolíme za ζ kterýkoli bod z intervalu (a, b).

Není-li f konstantní, existuje bod $x \in (a, b)$ tak, že platí $f(x) > f(a)$, nebo $f(x) < f(a)$. V prvním případě volíme za bod ζ takový bod, ve kterém f nabývá vzhledem k $[a, b]$ svého maxima f_{max}, ve druhém pak ten bod, kde f nabývá svého minima f_{min} na $[a, b]$. Existenci těchto bodů, které leží zřejmě v otevřeném intervalu (a, b), zaručuje Věta 4.3.31.

Kdyby v takto zvoleném bodě ζ platilo $f'(\zeta) \neq 0$, pak by (srovnej s tvrzením Lemmatu 5.2.13) v nějakém okolí $\mathcal{U}(\zeta)$ nabývala f hodnoty větší než f_{max}, resp. menší než f_{min}, což je spor. Proto platí $f'(\zeta) = 0$. $\square$

Poznámka 5.2.17. Je-li např. f spojitá na $[a, b]$, nabývá v tomto intervalu maxima a minima. To však může nastat i v bodě x_0, v němž $f'(x_0)$ neexistuje. Např. $f(x) = |x|$ na intervalu $[-1, 1]$ nabývá maxima v bodech -1 a 1, ve kterých existují pouze jednostranné derivace (a nejsou rovny 0) a minima ve vnitřním bodě 0, ve kterém derivace neexistuje.

Následující věta má opět mnoho společného s naším motivačním příkladem o rychlosti: projede-li auto kilometrový úsek cesty za dobu kratší než 1 minuta, muselo jet v některém okamžiku rychlostí větší než 60 km/hod.

Věta 5.2.18 (Lagrange 1797). *Nechť je $f \in \mathcal{C}([a, b])$, derivace $f'(x)$ existuje (vlastní nebo nevlastní) pro všechna $x \in (a, b)$. Potom existuje $\zeta \in (a, b)$ tak, že* *platí*

$$f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Důkaz. Definujme funkci

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\,, \qquad x \in [\,a, b\,]\,.$$

Jelikož od f odečítáme (spojitou) lineární funkci, která nabývá v krajních bodech a, b stejných hodnot jako f a má *vlastní* derivaci $(f(b) - f(a))/(b - a)$ ve všech bodech $x \in (a, b)$, je F také spojitá a má všude v (a, b) derivaci; zároveň též platí $F(a) = F(b) = 0$.

Na funkci F lze tedy aplikovat předešlou větu, podle níž existuje bod $\zeta \in (a, b)$ takový, že platí $F'(\zeta) = 0$. Výpočtem dostáváme

$$0 = F'(\zeta) = f'(\zeta) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,,$$

což je potřebné tvrzení. □

Historická poznámka 5.2.19. I když je název věty poměrně vžitý, není *zcela* oprávněný. Lagrange dokázal toto tvrzení za předpokladu rozvinutelnosti funkce f v mocninnou řadu (viz dále Kapitola 8); úhelnými kameny jeho postupu byla tvrzení, která dokážeme ve druhém dílu této učebnice. Shora uvedený důkaz náleží Ossianu Bonnetovi (1819 – 1892); viz závěrečná historická poznámka na konci kapitoly.

Věta 5.2.20 (Cauchy 1823). *Nechť funkce f, g jsou spojité na intervalu $[\,a, b\,]$ a nechť existují vlastní derivace funkcí f, g ve všech bodech intervalu (a, b). Potom existuje bod $\zeta \in (a, b)$ tak, že platí*

$$f'(\zeta)(g(b) - g(a)) = g'(\zeta)(f(b) - f(a))\,. \tag{5.2}$$

Je-li navíc $g'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, lze najít $\zeta \in (a, b)$ tak, aby platilo

$$\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,. \tag{5.3}$$

Důkaz. Definujme pro všechna $x \in [\,a, b\,]$

$$F(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))\,.$$

Potom F má vlastní derivaci všude v (a, b) a lze na ni aplikovat Rolleovu větu, neboť je

$$F(a) = F(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a)\,.$$

Proto existuje bod $\zeta \in (a, b)$ tak, že $F'(\zeta) = 0$, z čehož plyne rovnost (5.2). Poznamenejme, že z předpokladu o g' plyne podle již dokázané Lagrangeovy věty $g(b) - g(a) \neq 0$. Odtud však již plyne rovnost (5.3) jednoduchou úpravou. □

Historická poznámka 5.2.21. I důkaz tohoto obecnějšího tvrzení nebyl u Cauchyho zcela bez vady. Opíral se o názor při důkazu tvrzení, že funkce rostoucí v každém bodě intervalu roste na tomto intervalu. Tuto větu teprve dokážeme a její důkaz rozhodně není triviální. Tvrzení Cauchy patrně objevil až po vytištění [2], a proto se neobjevilo v hlavním textu, ale až v *Addition* (Dodatku) k [2]. Čtenář by si měl uvědomit, že proti Lagrangeově větě (Věta 5.2.18) získáváme „cosi navíc“ : pokud bychom Větu 5.2.18 použili na každou z funkcí f, g zvlášť, dostali bychom rovnost

$$f'(\zeta_1)(g(b)-g(a)) = g'(\zeta_2)(f(b)-f(a))\,,$$

odkud *neplyne* rovnost (5.2), protože obecně neplatí $\zeta_1 = \zeta_2$.

Připomeňme si, že jsme v Definici 4.1.7, resp. Poznámce 4.1.8 definovali monotonní funkce. Lagrangeova věta nám umožní monotonii funkcí jednoduše vyšetřovat. Z Lagrangeovy věty plynou jednoduchá tvrzení pro vyšetřování monotonie, která si nyní dokážeme.

Věta 5.2.22. *Nechť $f \in \mathcal{C}(I)$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval, a nechť existuje derivace f všude uvnitř I* [3]*). Je-li ve všech těchto bodech $f'(x) > 0$, je f rostoucí v I. Podobně je-li ve všech těchto bodech $f'(x) < 0$, je f klesající v I.*

Analogické tvrzení platí i pro neostré nerovnosti: jestliže platí ve všech bodech $f'(x) \le 0$, je f nerostoucí v I. Podobně je-li ve všech bodech $f'(x) \ge 0$, je f neklesající v I.

Důkaz. Zvolme libovolně $x, y \in I$, $x < y$, a aplikujme na interval $[\,x, y\,]$ Lagrangeovu větu. Pak je

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\zeta)\,,$$

kde $\zeta \in (x, y)$. Z předpokladů máme informaci o hodnotě této derivace. Je-li např. nezáporná, dostáváme $f(y) - f(x) \ge 0$ a funkce f je neklesající. Ostatní případy jsou analogické. □

Důsledek 5.2.23. *Nechť $f \in \mathcal{C}(I)$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť derivace f je všude uvnitř I nulová. Potom je f konstantní v I.*

Poznámka 5.2.24. Předešlé tvrzení je zřejmé, neboť pak je f současně nerostoucí i neklesající na I. Podstatné u obou předcházejících tvrzení je to, že pracujeme *na intervalu.* Funkce sgn má na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ všude derivaci rovnou 0, avšak *není* na této množině konstantní.

Již víme, že množina bodů nespojitosti funkce f definované na intervalu (a, b) může být i nekonečná, ale zatím umíme pomocí derivace dokazovat monotonii pouze těch funkcí, které jsou spojité. Proto ukážeme, jak se lze předpokladu spojitosti ve Větě 5.2.22 zbavit. Větu, kterou dokážeme, používali již Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813),

[3]) Kromě krajních bodů intervalu I, o nich nic dalšího nepředpokládáme.

André Marie Ampère (1775 – 1836) a Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857); viz Historické poznámky 5.2.19. Připomeňme ještě, že jsme již dokázali tvrzení o limitě monotónní funkce (Věta 4.3.40) a Bolzano-Cauchyho podmínku pro existenci limity funkce (Věta 4.3.13).

Tvrzení Věty 5.2.22 o souvislosti derivace a *monotonie funkce f na intervalu* se opírá o Lagrangeovu větu (Věta 5.2.18) a jejím podstatným důkazovým prostředkem je *spojitost funkce f*. Poznámka 4.2.20 o vlivu znaménka derivace na lokální chování funkce (*monotonie funkce v bodě*) nabízí otázku, jak spolu monotonie v bodě a monotonie v intervalu souvisejí. Ukážeme si to pro případ rostoucí funkce, ostatní případy jsou analogické. Připomeňme si definici.

Definice 5.2.25. Jestliže je funkce f definována v bodě $x \in \mathbb{R}$ a v nějakém prstencovém okolí $\mathcal{P}(x)$ bodu x platí pro všechna $y \in \mathcal{P}(x)$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0\,,$$

pak říkáme, že funkce f je *rostoucí v bodě x*. Je-li tato nerovnost splněna v levém (pravém) okolí bodu x, pak říkáme, že funkce f je *rostoucí zleva* (*zprava*) v bodě x. Umluvíme se na tom, že když řekneme, že funkce f je rostoucí ve všech bodech intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pak se tím rozumí, že je rostoucí zprava v každém bodě $x \in I$, který není koncovým bodem intervalu I, a rostoucí zleva v každém bodě $x \in I$, který není počátečním bodem intervalu I.

Věta 5.2.26. *Funkce f je rostoucí v intervalu I, právě když je rostoucí ve všech bodech intervalu I.*

Důkaz. Je-li f rostoucí v I, pak je zřejmě rostoucí v každém bodě $x \in I$. Dokažme sporem druhou implikaci: nechť f roste ve všech bodech I, ale nechť *není* rostoucí v I. Pak zřejmě existují body $x, y \in I$, $x < y$, tak, že $f(x) \geq f(y)$. Položme

$$M := \{t \in [\,x, y); f(t) \geq f(y)\}\,, \quad \beta := \sup M\,.$$

Zřejmě platí $\beta \in [\,x, y\,]$. Rozlišme tři případy. Je-li $\beta = x$, je $f(t) < f(y) \leq f(x)$ pro všechna $t \in (x, y)$ a *f není rostoucí v x zprava*, což je spor. Podobně je-li $\beta = y$, pak z $\beta = \sup M$ vyplývá v každém levém okolí bodu y existence takového t, pro něž je $f(t) \geq f(y)$ a *f není rostoucí zleva v bodě β*, což je opět spor. Je-li konečně $\beta \in (x, y)$, pak je f rostoucí v bodě β. Protože libovolné levé okolí bodu β obsahuje bod t s vlastností $f(t) \geq f(y)$, musí platit i $f(\beta) \geq f(y)$. Avšak pro $t \in (\beta, y)$ je $f(t) < f(y)$ a *f není rostoucí zprava v bodě β*. Tím je důkaz dokončen. □

Důsledek 5.2.27. *Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, je f rostoucí v (a, b)* [4]*.*

Jako aplikaci Cauchyho věty si ukážeme jednu velmi populární (a ne vždy adekvátně užívanou) metodu pro počítání limit. Rozhodně bychom ji neměli užívat při počítání limit racionálních funkcí.

---

[4]) Bez ohledu na to, zda je f v (a, b) spojitá; derivace $f'(x)$ může být pochopitelně opět v některých bodech x nevlastní.

Věta 5.2.28 (Johann Bernoulli 1691/92, de l'Hospital 1696). *Nechť f, g mají vlastní derivace všude v intervalu (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$, $g'(x) \neq 0$ všude v (a,b) a*

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^* . \tag{5.4}$$

Je-li dále splněn jeden z předpokladů

(1) $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ *pro* $x \to a_+$, *nebo*

(2) $|g(x)| \to +\infty$ *pro* $x \to a_+$,

potom platí

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f(x)}{g(x)} = A . \tag{5.5}$$

Analogické tvrzení platí (po nezbytné modifikaci) pro $x \to b_-$, resp. $x_0 \in (a,b)$.

Důkaz. Nechť $-\infty \le A < +\infty$. Zvolme q, $A < q$, a pak r, $A < r < q$. Z (5.4) dostáváme, že existuje $c > a$ tak, že na (a,c) platí

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r .$$

Zvolíme-li nyní x, y tak, že je $a < x < y < c$, existuje podle Věty 5.2.20 takové $\zeta \in (x,y)$, že platí

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} < r . \tag{5.6}$$

Nyní při platnosti podmínky (1) je při $x \to a_+$

$$f(x) \to 0 , \quad g(x) \to 0 ;$$

upravme f a g tak, že položíme $f(a) = g(a) = 0$ a volme v (5.6) $x = a$. Tak dostaneme $f(y)/g(y) \le r < q$ pro všechna $y \in (a,c)$.

Nechť je splněna podmínka (2) a nechť dále bez újmy na obecnosti platí $g(x) \to +\infty$ [5]). Zvolíme pevně y a zvolme $c_1 \in (a,y)$ tak, že

$$g(x) > 0 \quad \text{a} \quad g(x) > g(y)$$

pro všechna $x \in (a,c_1)$. Upravme nerovnost

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} < r$$

[5]) V nějakém pravém okolí bodu a je g všude kladná nebo všude záporná, neboť je spojitá a platí (2).

násobením výrazem $(g(x) - g(y))/g(x)$. Tak dostaneme

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x)} < r - r \cdot \frac{g(y)}{g(x)}\,.$$

Odtud obdržíme

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r \cdot \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}\,, \quad x \in (a, c_1)\,, \tag{5.7}$$

a s ohledem na předpoklad (2) existuje takové $c_2 \in (a, c_1)$, že na intervalu (a, c_2) platí

$$g(x) > \frac{f(y) - rg(y)}{q - r}\,;$$

odtud a z (5.7) tedy dostaneme $f(x)/g(x) < q$.

V obou případech jsme dokázali, že v jistém pravém okolí bodu a platí nerovnost $f(x)/g(x) < q$, kde q bylo libovolné číslo vyhovující nerovnostem $A < q < \infty$. Podobně řešíme i případ $-\infty < A \leq +\infty$ s tím, že pak volíme $-\infty < q < r < A$; zbytek důkazu probíhá podobně. Doporučujeme čtenáři, aby si zkusil tuto část samostatně sepsat. □

Příklad 5.2.29. Pomocí předchozího tvrzení, které použijeme dvakrát po sobě, snadno ověříme, že platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 1}{2x^2 - x + 3} = 3/2\,,$$

k tomu je však *nepoužíváme*! Přímý výpočet je v tomto případě velmi jednoduchý. Netriviální příklady na užití předcházejícího tvrzení (pro toto tvrzení se běžně užívá název *l'Hospitalovo pravidlo*) odložíme na pozdější dobu: viz Příklady 7.1.5.

Historické poznámky 5.2.30. Počátky vývoje pojmu derivace lze hledat v některých problémech geometrické a fyzikální povahy. Souvisejí s hledáním úhlu, pod nímž se protínají křivky (René Descartes (1596 – 1650)), s konstrukcí dalekohledu (Galileo Galilei (1564 – 1642)) a hodin (Christian Huygens (1629 – 1695); 1673), s hledáním maxima a minima funkce (Pierre de Fermat (1601 – 1665); 1638), s rychlostí a zrychlením pohybu (Galilei 1638) a (Isaac Newton (1643 – 1727); 1686), s astronomií a gravitačním zákonem (Johannes Kepler (1571 – 1640), Newton).

Věnujme se trochu podrobněji najednou Leibnizovým a Newtonovým úvahám. Stručně vyšetřeme „newtonovsky" parabolu $y = x^2$. V bodě $x > 0$ budeme hledat směrnici tečny. Jestliže se zvětší x o Δx, pak y se zvětší na $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$, takže

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2\,.$$

Směrnice přímky spojující body (x, y) a $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ je tedy rovna

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x\,.$$

Když se Δx přibližuje 0, směrnice sečny se blíží hodnotě $2x$.

Leibniz si představoval, že přírůstky Δx a Δy se stávají „nekonečně malými" a značil je pak $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$. Zanedbáním $(\mathrm{d}x)^2$, což je veličina „nekonečně menší" než $2x\,\mathrm{d}x$, dospěl podobně jako Newton ke vztahu

$$\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\,.$$

Mezi silné kritiky užívání „nekonečně malých veličin" patřili např. BERNHARD NIEUWENTIJT (1654 –1718), který publikoval tuto kritiku r. 1694 a hlavně biskup GEORGE BERKELEY (1685 –1753) svou polemickou statí *The Analyst* (1734).

K vývoji pojmu derivace přispěli další známí matematici. Oba bratři JACOB BERNOULLI (1654 – 1705) a JOHANN BERNOULLI (1667 – 1748) se poměrně rychle seznámili s obsahem zásadní Leibnizovy práce z r. 1684 a dále rozvinuli jeho myšlenky. Johann Bernoulli soukromě vyučoval v r. 1691/92 markýze GUILLAUMA FRANÇOISE DE L'HOSPITALA (1661 – 1704), který pak na základě takto získaných poznatků napsal a v r. 1696 vydal první učebnici infinitezimálního počtu. K převaze Leibnizovy symboliky přispělo i to, že ji výrazně preferoval LEONHARD EULER (1707 – 1783), který v r. 1755 vydal jednu z dalších učebnic diferenciálního počtu. Teprve u JEANA LE ROND D'ALEMBERTA (1717 – 1783) však nacházíme v r. 1754 pojem limity. Za zmínku stojí to, čím přispěl JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1736 – 1813), který založil v r. 1797 pojem derivace na mocninných řadách, s nimiž se seznámíme později; jeho vlivem se rozšířilo značení pomocí y', resp. $f'(x)$, které převzal z dřívější práce (DAVIETA DE FONCENEX (1733(4?) – 1799) z r. 1759). U Newtona se setkáváme v této souvislosti s užitím teček $\dot{x}, \ddot{y}, \ldots$ pro tzv. *fluxe* (tak Newton nazýval derivace).

Byl to též právě Lagrange, kdo zavedl název *derivace*. Ještě jeden aspekt je důležitý. Leibnizova symbolika velmi usnadňovala intuitivní manipulaci se základními pojmy kalkulu, Newtonova byla značně nepřehledná a těžkopádná.

Je vhodné dodat, že posléze byly „nekonečně malé" z analýzy z důkazů vymýceny, aby se do ní ještě později vrátily ve formě tzv. *nestandardní analýzy*. V ní mají nekonečně malá a nekonečně velká (hyperreálná) čísla své důležité místo. V intuitivní rovině však byly používány k odhadům možných výsledků stále. Letmý náhled na pracovní postupy nestandardní analýzy budované na více či méně intuitivním základu filozofické povahy nalezne čtenář v knížce [6].

Představy o derivaci se však vytvářely postupně a relativně pomalu. Ještě Ampère se domníval (v jednou již zmíněné práci z r. 1806), že spojitá funkce musí mít derivaci všude až na konečný počet bodů. Teprve později se ukázalo, jak daleko je tato představa od skutečnosti; existují spojité funkce, které nemají derivaci ani v jediném bodě.

Newton (1665) a Johann Bernoulli (1691/92) se první začali zabývat geometrickou interpretací druhé derivace, k níž se dostaneme v Kapitole 7.

MICHEL ROLLE (1652 – 1719) dokázal větu o přírůstku funkce po něm pojmenovanou *pro polynomy* v r. 1691. Zásadní roli tomuto tvrzení poprvé přisoudil JOSEPH ALFRED SERRET (1819 – 1885), který vydal učebnici analýzy v r. 1868. V ní připisuje toto tvrzení OSSIANOVI BONNETOVI (1819 – 1892) s ohledem na práci z r. 1868. Rolle patřil ke kritikům Leibnizovým a je do jisté míry pozoruhodné, že základní a relativně hluboké tvrzení „nové analýzy" nese jeho jméno. Zcela akceptovatelné důkazy z hlediska nynějších nároků na přesnost jsou však pozdějšího data; jmenujme několik autorů: ULISSE DINI (1845 – 1918) (1878), CARL GUSTAV AXEL HARNACK (1851 – 1888) (1881), MORITZ PASCH (1843 – 1930) (1882).

Lagrangeova věta pochází z r. 1797 (některé prameny uvádějí dokonce r. 1772), zatímco Cauchyho věta o přírůstku je z práce z r. 1823. První ze soudobého hlediska přesnosti správný důkaz podal r. 1870 Carl Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921), patrně na základě inspirace, pocházející od Weierstrasse z r. 1861.

Tzv. l'Hospitalovo pravidlo je patrně dílem Johanna Bernoulliho z r. 1691/92; své jméno získalo patrně díky knize l'Hospitalově z r. 1696. Spory, které později v otázce priority vyvolával Bernoulli, se zdají být ne zcela opodstatněné. Výsledek patří Johannovi Bernoullimu, avšak l'Hospital nikdy nepopíral jeho zásluhy či zásluhy jiných. V práci z r. 1696 píše: *Mimo jiné stvrzuji, že za mnoho vděčím výtečným myšlenkám bratří Bernoulliů, speciálně mladšímu, který je nyní profesorem v Groningen* (Johann B.). Poznamenejme ještě, že l'Hospital byl renomovaný matematik a že Johannu Bernoulliovi za práva publikovat výsledky, které se od něj naučil, řádně *zaplatil*.

Zásadní význam má Důsledek 5.2.23, který je klíčem k definici Newtonova integrálu a který umožňuje charakterizaci tzv. primitivních funkcí k dané funkci f, tj. funkcí F, pro něž platí $F' = f$.

Po l'Hospitalovi napsala další učebnici infinitezimálního počtu r. 1748 matematička, lingvistka a filozofka Maria Gaetana Agnesi (1718 – 1799), která byla od r. 1750 profesorkou Univerzity v Bologni. Krátce nato se rovněž r. 1748 objevila Eulerova kniha [4], která se na dlouhou dobu stala známým a oblíbeným učebním textem. Za zmínku stojí i to, jak Euler svojí autoritou stabilizoval některá označení, např. $f(x)$ (1734), e (1727), $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ (1777) a patrně i π, užívané i dříve, avšak od Eulera v podstatě již standardizované. I další Eulerovy práce publikované r. 1755 a r. 1768/70 znamenaly významné mezníky ve vývoji matematické analýzy.

Poznamenejme dále, že uvedením Věty 5.2.14 jsme nevyčerpali základní poznatky o spojitých funkcích, případně o jejich derivaci. K celkovému jejich hodnocení se vrátíme po důkazu věty *o stejnoměrné spojitosti* funkce spojité na uzavřeném intervalu. Tu však dokážeme až bezprostředně před její aplikací na existenci Riemannova integrálu. Viz též Historické poznámky ke Kapitole 11.

Jak si čtenář jistě povšiml, ač k základním poznatkům budovaného kalkulu dospěli jeho tvůrci patrně *zcela* nezávisle, jejich přístup se podstatně nelišil. Nešťastné následné spory o prioritu, podněcované spíše žáky a přáteli „hlavních“ tvůrců (Leibniz, Newton), zapříčinily na dlouhou dobu izolaci anglické matematiky i její ulpívání na těžkopádné symbolice. Tento jev však má obecnější charakter: i když mezi matematiky obecně panuje snaha vždy pečlivě vážit prioritu při publikování nových tvrzení, je to někdy mimořádně obtížné. Stále se stává, že k některým objevům dochází takřka současně. Naštěstí prioritní spory bývají poměrně řídké a někdy k nim docházelo pod tlakem politické situace (např. v SSSR, jehož matematika vynikající úrovně se vyvíjela řadu let v jisté izolaci od „západní“ matematiky.

Literatura:

[1] Bressoud, D.: *A radical approach to real analysis*, The Mathematical Association of America, Washington, 1994.

[2] Cauchy, L. A.: *Résumé des Leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Paris, 1823.

[3] Došlá, Z., Kuben, J.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*, Brno, 2003.

[4] Euler, L.: *Introductio in analysin infinitorum I, II*, 1748.

[5] Flett, T. M.: *Some historical notes and speculations concerning the mean value theorems of the differential calculus*, The Institute of Mathematics and its Applications, 1974.

[6] Vopěnka, P.: *Calculus infinitesimalis pars prima*, Práh, Praha, 1996.

Kapitola 6

Elementární funkce

6.1 Úvod: základní vlastnosti funkcí

Až dosud jsme vlastně, až na drobné výjimky, téměř žádné konkrétní funkce nezavedli. Pokusíme se to nyní napravit, nejdříve však některé věci připomeneme.

Poznámka 6.1.1. Dosud jsme pracovali s identitou (Definice 1.4.6), s mocninami s nezáporným celým exponentem a s polynomy (Definice 4.1.9) a s některými dalšími funkcemi (p-tá odmocnina pro $p \in \mathbb{N}$, jednoduchými racionálními funkcemi (viz níže), s Dirichletovou a s Riemannovou funkcí, atp.). Jsou to vesměs funkce algebraické: zhruba řečeno, k jejich definici nepotřebujeme limitní proces. V této kapitole zavedeme mj. další *elementární funkce*, což je sice cosi *přesně nedefinovaného*, nicméně jde o funkce velmi důležité. Některé jejich vlastnosti intuitivně chápeme díky středoškolským poznatkům, ale je ještě mnoho věcí, které o nich nevíme.

Definice 6.1.2. Jestliže pro funkci f a její definiční obor D_f platí

$$(x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f) \quad \text{a zároveň} \quad f(-x) = f(x)\,,$$

pak říkáme, že f *je sudá funkce.* Podobně, jestliže pro funkci f a její definiční obor D_f platí

$$(x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f) \quad \text{a zároveň} \quad f(-x) = -f(x)\,,$$

pak říkáme, že f *je lichá funkce.*

Definice 6.1.3. Jestliže existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že pro funkci f a její definiční obor D_f platí

$$(x \in D_f \Rightarrow x \pm a \in D_f) \quad \text{a zároveň} \quad f(x) = f(x+a) = f(x-a)\,,$$

pak říkáme, že a je *periodou* funkce f. Množinu všech period funkce f označme G_f. Zřejmě vždy platí $0 \in G_f$. Pokud obsahuje G_f více než jeden prvek, je nekonečná, protože

$$f(x) = f(x \pm a) = f(x \pm 2a) = \cdots .$$

Snadno se ukáže, že G_f je množina uzavřená vzhledem ke sčítání i odčítání. Je-li G_f nekonečná, pak říkáme, že f *je periodická funkce.*

Příklad 6.1.4. Je-li f konstantní funkce, je $G_f = \mathbb{R}$. Tento příklad je ovšem triviální.

Příklad 6.1.5. Pokud označíme G_f^+ množinu všech *kladných* period f, platí

$$(\inf G_f^+ = \omega > 0) \Rightarrow \omega \in G_f^+ .$$

To se dokáže sporem: pokud by platilo $\omega \notin G_f^+$, existovala by posloupnost $\{a_n\}$ prvků G_f^+ taková, že $a_n \to \omega$. Tato posloupnost by byla cauchyovská a rozdíly jejích prvků s ohledem na vlastnosti G_f^+ by ležely rovněž v G_f. Existovala by tedy perioda ω_1 taková, pro kterou by platilo $0 < \omega_1 < \omega$, což je hledaný spor.

Definice 6.1.6. Je-li a *nejmenší kladná perioda* funkce f, budeme říkat, že f je *a-periodická funkce.* Někdy se a nazývá *hlavní perioda* funkce f. Předchozí příklad ukazuje, že tato definice je korektní.

Příklad 6.1.7. Riemannova funkce ϱ z Příkladu 4.2.9 je periodická. Snadno nahlédneme, že každé $a \in \mathbb{Z}$ je její periodou a že žádné jiné periody nemá. Je to tedy 1-periodická funkce. Naproti tomu pro Dirichletovu funkci δ z Příkladu 4.1.5 jsou periodami všechna čísla z $\mathbb{Q}$ a tedy δ *nemá* nejmenší kladnou periodu. Obě funkce jsou sudé. Upozorňujeme čtenáře na fakt, že Riemannova funkce, která *má nejmenší kladnou periodu*, je v některých bodech spojitá. Naproti tomu Dirichletova funkce *nemá nejmenší kladnou periodu*, nemá však také žádný bod spojitosti. Tyto zdánlivě málo související věci jsou ve skutečnosti na sobě závislé: *je-li periodická nekonstantní funkce spojitá alespoň v jednom bodě, má nejmenší kladnou periodu.*

Poznámky 6.1.8. 1. Konstantní funkce a také *identita* $\mathrm{Id} : x \mapsto x,\ x \in \mathbb{R}$, jsou funkce spojité na $\mathbb{R}$. Speciální označení pro identitu se většinou neužívá a tak se pracuje s funkcemi x nebo x^2 apod. [1]) Pak ale nemůžeme v některých případech rozlišovat např. mezi funkcí $f(x) = x^2$ a hodnotou této funkce v bodě x. Přesnější označení je naopak těžkopádné, a tak volíme kompromis: mezi funkcí a jejími hodnotami v takovém případě rozlišujeme podle souvislosti. Není to složité, ale vyžaduje to od čtenáře jistou pozornost.

Mocniny x^n s celým nezáporným exponentem n jsme zavedli induktivně; také ony jsou spojitými funkcemi na $\mathbb{R}$; na intervalu $[0, +\infty)$ jsou pro $n \geq 1$ rostoucí a tedy prosté. Mocniny se sudým n jsou sudými funkcemi, mocniny s lichým n jsou liché funkce. Odtud mj. vyplývá, že již nelze „zvětšit interval“ $[0, \infty)$, na němž jsou sudé mocniny (kromě $x^0 \equiv 1$) prosté. Naproti tomu liché mocniny jsou vesměs rostoucí a prosté na celém $\mathbb{R}$.

---

[1]) S označením Id se pracuje např. v učebním textu [3].

2. Příklad 2.4.15 nám umožňuje poměrně brzo zavést odmocniny; slouží k určení jejich definičního oboru. Není proto nutné mít k jejich zavedení hlubší věty o spojitých funkcích (např. Větu 4.3.37). Příklad 2.4.15 ukazuje, že *pro každé* $a > 0$ existuje $\sqrt[n]{a}$. K mocninám s n, $n \geq 1$ definujeme inverzní funkce

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}, \quad x \in [\,0, \infty)\,.$$

Ty nazýváme n-té odmocniny. Poznamenejme, že někdy se pro lichá n zavádějí n-té odmocniny na celém $\mathbb{R}$. Na úrovni střední školy není vůbec zřejmé, že platí $x^2 : [\,0, \infty) \overset{\text{na}}{\to} [\,0, \infty)$, tedy že jde o zobrazení *na*; proto by se to také jako zřejmý fakt nemělo prezentovat. K mocninám a odmocninám se však ještě vrátíme.

3. Pomocí mocnin jsme zavedli polynomy, což jsou opět funkce spojité na $\mathbb{R}$. Exponent nejvyšší mocniny, která se v polynomu vyskytuje s koeficientem $\neq 0$, se nazývá *stupeň polynomu.* Často tímto koeficientem celý polynom dělíme a pracujeme s polynomem, který má u nejvyšší mocniny koeficient 1. Polynom s touto vlastností (budeme říkat, že je v *normálním tvaru*) stupně 1, který nabývá hodnoty 0 v bodě x_1 je jednoznačně určen: je to polynom $P(x) = (x - x_1)$, $x \in \mathbb{R}$. Má-li polynom v normálním tvaru n reálných kořenů a je stupně n, je opět jednoznačně určen. Je to polynom

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n)\,.$$

Tyto věci považujeme za známé z algebry.

4. Několikrát jsem pracovali i s podíly polynomů. Ty tvoří další důležitou třídu funkcí, kterou zavedeme v následující definici.

Definice 6.1.9. Funkce $R(x) = P(x)/Q(x)$, kde P, Q jsou polynomy v proměnné x a polynom Q není identicky roven 0, se nazývají *funkce racionální*; někdy se užívá i název *racionální lomené funkce*. Nejjednoduššími z nich jsou kromě polynomů (v tom případě je jmenovatel Q nenulový polynom stupně 0) *mocniny s celým záporným exponentem*: $x^{-n} = 1/x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Snadno nahlédneme, že tyto funkce jsou spojité na svém definičním oboru $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Všechny racionální funkce jsou spojité ve svém definičním oboru D_R, kterým je komplement množiny nulových bodů (kořenů) jmenovatele Q.

Algebraickými operacemi a eventuálně skládáním funkcí získáme z těchto funkcí funkce složitější. Všechny takové funkce jsou *algebraické* (viz následující Poznámka), my však potřebujeme zavést i některé funkce *transcendentní* (takovou funkcí je např. log; s touto funkcí se čtenář patrně setkal na střední škole), tj. takové, k jejichž definici je nutná nějaká forma limitního přechodu. Limitní přechod může být skryt např. v použití řad, integrálu nebo diferenciálních rovnic. Čím pokročilejší aparát máme k dispozici, tím lze zavedení těchto funkcí zvládnout jednodušeji.

Poznámka 6.1.10. Z hlediska dnešních nároků na přesnost uvedené nepřesné charakteristiky neobstojí. Uveďme proto přesnější popis. Nechť je dána funkce f. Nechť existuje polynom

$$p(y,x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) y^k \,,$$

jehož koeficienty a_k jsou opět polynomy s reálnými koeficienty (v proměnné x), přičemž tyto polynomy nejsou současně všechny rovny identicky 0. Jestliže platí $p(f(x),x) = 0$ všude v D_f, pak je f *algebraická funkce*. Pokud f není algebraická funkce, nazývá se *transcendentní*.

K zavedení elementárních transcendentních funkcí zvolíme cestu co nejjednodušší, kterou lze modifikovat eventuálně tak, aby byla pochopitelná i matematicky orientovaným středoškolákům. Budeme používat jednoduchý nástroj, a to tzv. *funkcionální rovnice*. Vágně řečeno, označujeme tak rovnice (případně i soustavy rovnic), které se dosazením za hledanou funkci či funkce změní v rovnost pro jakoukoli hodnotu uvažovaných proměnných z dané množiny.

Poznámka 6.1.11. Pro průpravu se budeme věnovat těm funkcím f, pro které platí $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. To je příklad jedné konkrétní funkcionální rovnice; řešit ji znamená nalézt všechny funkce f definované na $\mathbb{R}$, pro které platí tato rovnost pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Funkce, které jsou řešeními této funkcionální rovnice, se nazývají aditivní funkce. Snadno lze nahlédnout, že všechny funkce tvaru $f(x) = ax$, $x \in \mathbb{R}$, kde $f(1) = a \in \mathbb{R}$, jsou řešeními rovnice. Trochu méně zřejmé je to, že každá *spojitá* funkce f, která je řešením této rovnice, je uvedeného tvaru. Exponenciálu a logaritmus zavedeme pomocí podobných rovnic (6.3) a (6.7) [2]).

6.2 Aditivní funkce

Definice 6.2.1. Každou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je řešením funkcionální rovnice

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \,, \quad x, y \in \mathbb{R} \,, \tag{6.1}$$

budeme nazývat *aditivní funkce*.

Zkoumejme jednoduché vlastnosti společné všem aditivním funkcím. Dosazením hodnoty $x = y = 0$ dostaneme pro každé řešení f rovnice (6.1)

$$f(0) = 2f(0) \,,$$

tj. $f(0) = 0$. Dosazením $x = y$ dostaneme postupně

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(x+x) = 2f(x) \,, \\ f((n+1)x) &= f(nx+x) = f(nx) + f(x) = (n+1)f(x) \,, \end{aligned}$$

[2]) Všem těmto rovnicím se říká Cauchyho rovnice. Mají podobný tvar a liší se pouze různým užitím operací sčítání a násobení. Další Cauchyho rovnici $f(xy) = f(x)f(y)$ lze vyšetřovat na různých intervalech, např. na $(0, \infty)$, my se jí nebudeme zabývat.

z čehož plyne indukcí pro každé $x \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ rovnost

$$f(nx) = nf(x)\,.$$

S přihlédnutím ke vztahu

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

vidíme, že odvozená rovnost platí pro všechna celá n. Volíme-li $t = (m/n)x$, $x \in \mathbb{R}$, m celé a n přirozené, dostáváme

$$nf(t) = f(nt) = f(mx) = mf(x)\,, \quad \text{tj.} \quad f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x)\,,$$

a odtud již plyne rovnost

$$f(rx) = rf(x)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$. A ještě jeden samozřejmý fakt: dosazením hodnoty $x = 1$ dostaneme vztah

$$f(r) = f(r.1) = rf(1)\,, \quad x \in \mathbb{Q}\,,$$

z něho plyne, že hodnoty každé aditivní funkce jsou na $\mathbb{Q}$ určeny jedinou hodnotou $f(1)$.

Budeme-li se zajímat o *spojitá řešení* f uvažované rovnice, je situace velmi jednoduchá: pro posloupnost $\{r_n\}$ čísel $r_n \in \mathbb{Q}$, $r_n \to x$, platí s ohledem na spojitost v bodě x

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n \cdot f(1) = x \cdot f(1)\,;$$

tuto úvahu lze provést pro každé $x \in \mathbb{R}$. Odtud dostáváme tuto jednoduchou větu:

Věta 6.2.2. *Je-li f spojité řešení rovnice* (6.1), *pak existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(x) = ax\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Poznámka 6.2.3. Podmínka spojitosti funkce f všude v $\mathbb{R}$ je pro linearitu aditivní funkce zbytečně silná. Snadno nahlédneme, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to 0}(f(x) + f(h) - f(x)) = \lim_{h\to 0} f(h)\,. \tag{6.2}$$

Tedy aditivní funkce f je spojitá (v $\mathbb{R}$), právě když je spojitá alespoň v bodě 0, resp. je spojitá alespoň v jednom bodě. Tuto podmínku v následující větě ještě značně oslabíme.

Věta 6.2.4. *Nechť je aditivní funkce f omezená zdola* (*resp. shora*) *na nějakém intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom je f lineární.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti se omezíme na případ omezenosti zdola a budeme předpokládat, že platí

$$f(x) \geq M\,, \quad x \in [\,a, b\,] \subset I\,.$$

Potom pro $x \in [\,0, b-a\,]$ platí

$$f(x) = f(x+a) - f(a) \geq M - f(a)\,.$$

Označme $K := M - f(a)$, $b - a = d$, a uvažujme funkci

$$g(x) := f(x) - \frac{f(d)}{d}\,x\,,$$

která jakožto součet dvou aditivních funkcí musí být také aditivní. Nyní stačí ukázat, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $g(x) = 0$, tj. $f(x) = (f(d)/d)x$, čímž bude důkaz dokončen. Je však $g(d) = f(d) - (f(d)/d)d = 0$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$g(x + d) = g(x) + g(d) = g(x)\,.$$

Protože je g zdola omezená na $[\,0, d\,]$ a periodická s periodou d, je zdola omezená na $\mathbb{R}$. Předpokládáme-li nyní existenci $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x_0) \neq 0$, je zřejmě $x_0 \neq 0$ a lze volit $x_1 \neq 0$ tak, že $g(x_1) < 0$. K tomu stačí položit $x_1 = x_0$ pro $g(x_0) < 0$, nebo $x_1 = -x_0$ pro $g(x_0) > 0$. Z rovnosti

$$g(nx_1) = ng(x_1)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

dostáváme spor, neboť užitím předchozí rovnosti lze lehce najít takové $n \in \mathbb{N}$, aby platilo $ng(x_1) < K$. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Důsledek 6.2.5. *Z předcházející úvahy vyplývá, že pokud je vyšetřovaná aditivní funkce* monotónní *na intervalu* $(0, \delta)$ *s* $\delta > 0$*, je již spojitá a tedy lineární.*

Poznámka 6.2.6. Povšimněme si ještě následujícího faktu: samotný předpoklad spojitosti nezaručí jednoznačnost řešení rovnice (6.1); grafy všech spojitých řešení tvoří svazek přímek procházejících jedním bodem (počátek). Pokud poněkud uměle upravíme již užitou „výběrovou podmínku“, platí pro $f(x) = ax$ zřejmě

$$a = \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = f'(0)\,,$$

tedy jednoznačnost řešení můžeme zaručit předepsáním hodnoty derivace řešení v bodě, kterým grafy všech řešení procházejí.

Poznámka 6.2.7. Předcházející výklad nedává odpověď na otázku, zda vůbec nespojitá aditivní funkce existuje. Jde však již o složitější záležitost, vyžadující zvládnutí pojmu Hamelovy báze. Spadá spíše do algebry, poznamenejme však, že není dostupná bez axiómu výběru či nějakého tvrzení s ním ekvivalentního. Zde se omezíme na konstatování, že takové nespojité aditivní funkce existují a všimneme si jedné jejich vlastnosti, která do jisté míry ukazuje, jak jsou „divoké“.

Graf každé nespojité aditivní funkce je dokonce hustý v $\mathbb{R}^2$. To znamená, že pokud zvolíme intervaly (a, b), (c, d), $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, jakkoli, existuje takové $x \in \mathbb{R}$, pro něž

$$[\,x, f(x)\,] \in (a, b) \times (c, d)\,.$$

To se snadno dokáže: musí existovat takové dva body $x_1, x_2 \in (a, b)$, pro které platí nerovnosti $f(x_1) < c$, $f(x_2) > c$, neboť jinak by byla f na (a, b) shora či zdola omezená. V bodech množiny $\{x_1 + (m/n)(x_2 - x_1);\, m, n \in \mathbb{N},\, 0 \le m \le n\}$ nabývá f hodnot, které tvoří hustou podmnožinu intervalu $(f(x_1), f(x_2))$, a lze tedy snadno volit x tak, že je $[x, f(x)] \in (a, b) \times (c, d)$.

6.3 Exponenciální funkce

Budeme se zabývat řešením podobné funkcionální rovnice, jako byla rovnice (6.1). Nejprve dokážeme toto

Lemma 6.3.1. *Pro každé řešení f funkcionální rovnice*

$$f(x+y) = f(x)f(y)\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}\,, \tag{6.3}$$

které není identicky rovno 0*, platí:* (a) $f(0) = 1$*;* (b) $f(x) > 0$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$*;* (c) $f(-x) = (f(x))^{-1}$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$*,* (d) $f(nx) = (f(x))^n$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$ *a všechna* $n \in \mathbb{N}$*.*

Důkaz. Je-li f nenulové řešení (6.3), existuje alespoň jedno $x_0 \in \mathbb{R}$, pro něž je $f(x_0) \neq 0$. Potom z rovnosti

$$f(x_0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)f(0)$$

plyne $f(0) = 1$. Tedy: *každé řešení* rovnice (6.3), pokud není identicky nulové, nabývá v bodě 0 hodnoty 1. Dále platí pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0\,,$$

to znamená, že všechna řešení (6.3) jsou nezáporné funkce. Protože platí i

$$1 = f(0) = f(x-x) = f(x) \cdot f(-x)\,,$$

vyhovují *nenulová* řešení rovnice (6.3) vztahu

$$f(-x) = (f(x))^{-1}$$

a jsou dokonce *všude kladná.* Konečně ze vztahů

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(x+x) = (f(x))^2\,, \\ f((n+1)x) &= f(nx + x) = (f(x))^n \cdot f(x) = (f(x))^{n+1}\,, \end{aligned}$$

dostáváme pomocí matematické indukce

$$f(nx) = (f(x))^n$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Poznámka 6.3.2. Snadno si rozmyslíme, že uvedené vlastnosti patří k základním vlastnostem exponenciálních funkcí, které jsou čtenáři patrně již dlouho známé. Tím jsme vedeni k formulaci věty, která ukazuje, že se exponenciální funkce dají poměrně velmi jednoduše charakterizovat. Později se ukáže, že následující věta popisuje speciální exponenciální funkci (jejím základem je číslo e), které budeme krátce říkat *exponenciála.*

Věta 6.3.3 (zavedení exponenciály; Cauchy 1821*). *Existuje právě jedna funkce f definovaná na $\mathbb{R}$, která vyhovuje funkcionální rovnici*

$$f(x+y) = f(x)f(y)\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}\,, \tag{6.3}$$

a podmínce

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1\,. \tag{6.4}$$

Důkaz této věty rozložíme do několika kroků. Nejprve dokážeme několik lemmat. Čtenář by si měl připomenout Poznámku 1.3.24 a Lemma 1.3.28.

Lemma 6.3.4. *Každá funkce vyhovující funkcionální rovnici* (6.3) *a podmínce* (6.4) *má derivace všech řádů, je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$ a zobrazuje $\mathbb{R}$ na interval* $(0,\infty)$*; platí pro ni $f' = f$.*

Důkaz. Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1\,.$$

Snadno spočteme derivaci funkce f v ostatních bodech $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x)(f(h)-1)}{h} = f(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h} = f(x)\,.$$

Je tedy $f' = f > 0$, resp. $f^{(n)} = f$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ [3]). Proto je f rostoucí na $\mathbb{R}$, a je $f > 1$ na $(0,\infty)$ a $f < 1$ na $(-\infty, 0)$. Zderivujme funkci $g(x) = f(x) - (x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. Zřejmě platí

$$g'(x) = f'(x) - 1 = f(x) - 1\,,$$

takže $g'(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $g'(x) > 0$ pro $x \in (0,\infty)$. Jelikož je $g(0) = 0$, nabývá g v bodě 0 minima a platí $f(x) \geq x+1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Jelikož je f rostoucí spojitá funkce na $\mathbb{R}$, má tedy Darbouxovu vlastnost. Dále podle tvrzení o limitě funkcí a nerovnostech platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \geq \lim_{x\to\infty} (x+1) = \infty$$

a s ohledem na bod (c) z Lemmatu 6.3.1 je $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Odtud plyne $R_f = (0,\infty)$. □

Následující tvrzení je zajímavé spíše technicky: ukazuje, jak se lze při zavádění exponenciály obejít bez pojmu derivace, a tak se ve výkladu posunout co nejblíže elementární matematice.

[3]) Současně jsme dokázali, že každé řešení rovnice (6.3), vyhovující podmínce (6.4), vyhovuje diferenciální rovnici $y' = y$; viz Kapitola 9.

Lemma 6.3.5. *Pro každou funkci f vyhovující funkcionální rovnici* (6.3) *jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(1) $\lim_{x\to 0}(f(x)-1)/x = 1$;

(2) $f(x) \geq x+1$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$;

(3) $1+x \leq f(x) \leq (1-x)^{-1}$ *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$, $x < 1$.

Důkaz. Z podmínky (1) plyne (2); to jsme ukázali již v důkazu Lemmatu 6.3.4. Podle Lemmatu 6.3.1 platí $1/f(x) = f(-x) \geq 1-x$, a tedy pro $x < 1$ je

$$1+x \leq f(x) \leq \frac{1}{1-x}\,.$$

Tím je dokázána podmínka (3). Konečně, platí-li nerovnosti (3) pro všechna $x < 1$, plyne odtud pro $0 < x < 1$

$$x \leq f(x)-1 \leq \frac{x}{1-x}, \quad \text{resp.} \quad 1 \leq \frac{f(x)-1}{x} \leq \frac{1}{1-x}\,,$$

a pro $x < 0$ také

$$1 \geq \frac{f(x)-1}{x} \geq \frac{1}{1-x}\,.$$

Podle Věty 4.3.12 o limitách funkcí a nerovnostech odtud snadno dostaneme $f'_+(0) = f'_-(0) = 1$ a tedy $f'(0) = 1$. To však je jen jiná forma zápisu podmínky (1). Tím je důkaz ekvivalence podmínek (1) – (3) dokončen. □

K dokončení důkazu Věty 6.3.3 musíme dokázat *existenci* a *jednoznačnost* funkce s požadovanými vlastnostmi. Začneme s důkazem jednoznačnosti.

Lemma 6.3.6. *Existuje nejvýše jedna funkce, která vyhovuje funkcionální rovnici* (6.3) *a podmínce* (6.4).

Důkaz. Předpokládejme, že funkce f a g vyhovují obě předpokladům Věty 6.3.3. Potom podle Lemmatu 6.3.4 platí kromě rovnosti $f' = f$ též $g' = g$, a tedy platí

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{g^2} = 0\,.$$

Podle Důsledku 5.2.23 je podíl f/g konstantní funkcí na $\mathbb{R}$. Existuje tady $K > 0$ tak, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) = Kg(x)$. Dosadíme-li $x = 0$, dostaneme podle bodu (a) Lemmatu 6.3.1 hodnotu K: platí $K = 1$, a proto je $f = g$. □

Lemma 6.3.7. *Existuje funkce f, která vyhovuje funkcionální rovnici* (6.3) *a podmínce* (6.4).

Důkaz. Definujme funkci

$$f(x) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{6.5}$$

a ukažme nejprve, že f je korektně definována na $\mathbb{R}$; k tomu stačí ukázat, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je posloupnost, vystupující v rovnosti (6.5) vpravo, omezená a že existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq k$ je též monotónní. Zvolme $x \in \mathbb{R}$ a k němu $k \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo $|x| < k$, tj. $|x|/k < 1$; toto k tedy závisí na x. Z Bernoulliho nerovnosti plyne pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, odhad

$$(1 + 1/n)^k > 1 + k/n\,,$$

pomocí kterého dále dostáváme

$$\left|\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n\right| \leq \Big(1 + \frac{|x|}{n}\Big)^n \leq \Big(1 + \frac{k}{n}\Big)^n \leq \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{nk} \leq \mathrm{e}^k\,.$$

Označíme-li (x je stále pevně zvoleno)

$$a_n := \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n,$$

je tato posloupnost shora omezená. Dále je $\{a_n\}$ pro všechna $n > k$ neklesající. K důkazu lze použít AG-nerovnost z Lemmatu 1.3.28 nebo Bernoulliho nerovnost z Poznámky 1.3.24. Podle AG-nerovnosti platí pro tato $n > k$ (vlevo v nerovnosti stojí součin $(n-1)$ stejných čísel a čísla 1)

$$\Big(1 + \frac{x}{n-1}\Big)^{n-1} \cdot 1 \leq \Big(\frac{n+x}{n}\Big)^n.$$

Platí tedy $a_{n-1} \leq a_n$. Proto existuje limita $\lim a_n \in \mathbb{R}$ a definice (6.5) je korektní.

Nyní použijeme Bernoulliho nerovnost, pomocí níž dostaneme pro $n > k$

$$f(x) \geq \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \geq 1 + n\frac{x}{n} = 1 + x\,.$$

Odtud podle Lemmatu 6.3.5 vyplývá, že f vyhovuje i podmínce (6.4). Zbývá dokázat, že f vyhovuje funkcionální rovnici (6.3).

Zvolme libovolně $x, y \in \mathbb{R}$ a k nim nyní vyberme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo $\max\{|x/n|, |y/n|, |x+y|/n\} < 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > k$. Z AG-nerovnosti pro dvě nezáporná x_1, x_2 [4]) plyne pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > k$, nerovnost

$$\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \Big(1 + \frac{y}{n}\Big)^n \leq \Big(1 + \frac{x+y}{2n}\Big)^{2n}.$$

Užitím Věty 2.3.2 o limitách a nerovnostech dostaneme pro $n \to \infty$ podle tvrzení o součinu limit $f(x)\,f(y) \leq f(x+y)$. Pro obrácenou nerovnost využijeme opět AG-nerovnost, tentokrát ve tvaru (1.9) z Kapitoly 1. Z ní plyne opět pro shora zvolená $x, y \in \mathbb{R}$ a k pro $n > k$ nerovnost

$$\Big(1 + \frac{x+y}{n-1}\Big)^{n-1} \Big(1 + \frac{xy}{n}\Big) \leq \Big(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\Big)^n = \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \Big(1 + \frac{y}{n}\Big)^n,$$

z níž dostaneme pro f obdobně podle Věty 2.3.2 nerovnost $f(x+y) \leq f(x)\,f(y)$. To znamená, že funkce f vyhovuje funkcionální rovnici (6.3). □

[4]) Viz nerovnost v (1.10).

Důkaz Věty 6.3.3. Shrnutím výsledků z předcházejících dokázaných lemmat dostáváme existenci a jednoznačnost f. $\square$

Definice 6.3.8. Funkci popsanou Větou 6.3.3 nazýváme *exponenciála.* Platí tedy pro všechna $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n , \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Poznámka 6.3.9. Porovnáním se vztahem (3.9) z Příkladu 3.2.7 vidíme, že platí $\exp(1) = \mathrm{e}$. Kdybychom ve Větě 6.3.3 předepsali jinou hodnotu limity v (6.4), dostali bychom jinou (exponenciální) funkci; my se však k ostatním exponenciálním funkcím dostaneme jiným způsobem. Znalost exp nám umožňuje zavést ještě další, relativně důležité funkce. Poznamenejme ještě, že současný náš přístup k elementárním funkcím je založen na práci s *reálnými* funkcemi; pohled na tytéž funkce po jejich rozšíření do oboru komplexních čísel $\mathbb{C}$ nám odhalí další hlubší souvislosti; budeme se jim věnovat v Kapitole 8.

Věc, kterou nyní „informativně“ uděláme, má jednoduché pozadí: rozkládáme přirozeným způsobem exponenciálu na součet sudé a liché funkce. Definitivně se s těmito funkcemi vyrovnáme později. Definujme pro všechna $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh x := \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} , \quad \sinh x := \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} .$$

Funkce cosh se nazývá *hyperbolický kosinus* a funkce sinh se nazývá *hyperbolický sinus.* Tak je též čteme, výrazům typu „koshá“ či „sinhá“ se vyhýbáme.

Poznámka 6.3.10. Je přirozené se tázat, jak jsme „uhodli“, že exp je možno definovat pomocí Definice 6.3.8. Odpověď, že jsme to udělali jako Euler, neobstojí; ukážeme si proto několik dalších souvislostí. Druhou přirozenou otázkou je, jak postup modifikovat tak, aby byl co nejjednodušší a využíval pouze znalostí žáků střední školy. Druhou otázku však zodpovíme až po zavedení logaritmu. vyhovující funkcionální rovnici (6.3) a podmínce (6.4), nebo kterékoli podmínce s ní podle Lemmatu 6.3.5 ekvivalentní. Zvolme libovolně $x \in \mathbb{R}$ a pak $k \in \mathbb{N}$, aby pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > k$ platilo $|x/n| < 1$. Pro všechna taková n platí podle Lemmatu 6.3.5 a Lemmatu 6.3.1, bodu (d)

$$1 + \frac{x}{n} \le f\Big(\frac{x}{n}\Big) \le \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^{-1}, \quad \text{resp.} \quad 1 + \frac{x}{n} \le \Big(f(x)\Big)^{1/n} \le \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^{-1},$$

a tedy platí

$$a_n := \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n \le f(x) \le \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^{-n} =: b_n\,.$$

Protože podle AG-nerovnosti platí (vlevo v nerovnosti stojí opět součin $(n-1)$ stejných čísel a čísla 1)

$$\Big(1 - \frac{x}{n-1}\Big)^{n-1} \cdot 1 \le \Big(\frac{n-x}{n}\Big)^n ,$$

dostáváme odtud přechodem k převráceným hodnotám $b_{n-1} \geq b_n$. Obě posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ mají tutéž limitu. K tomu podle Věty 2.3.2 stačí dokázat, že platí $a_n/b_n \to 1$. Pro všechna $n > k$ však podle Bernoulliho nerovnosti platí

$$1 \geq \frac{a_n}{b_n} = \frac{(1+x/n)^n}{(1-x/n)^{-n}} = (1-x^2/n^2)^n \geq 1 - n(x^2/n^2) = 1 - x^2/n \to 1\,.$$

Odtud z jednoznačnosti limity plyne jiným způsobem i jednoznačnost $f(x)$ i funkce f. Proto je definice exp vcelku velmi přirozená.

Příklad 6.3.11. Ukažme, že funkce e^x je transcendentní. Pokud by existoval polynom $p = p(y,x)$ s vlastnostmi, popsanými v Poznámce 6.1.10, lze předpokládat, že též platí $a_0(x) \not\equiv 0$ (jinak bychom dělili vhodnou mocninou e^x). Limitním přechodem $x \to -\infty$ v rovnosti

$$-a_0(x) = a_1(x)\mathrm{e}^x + a_2(x)\mathrm{e}^{2x} + \cdots + a_n(x)\mathrm{e}^{nx}$$

bychom obdrželi $\lim_{x\to-\infty} a_0(x) = 0$, což je spor.

Příklad 6.3.12. Podle Věty 4.4.1 je $\lim_{x\to 0} \exp(-1/x^2) = 0$; použili jsme její část (2). Existuje proto spojité rozšíření f funkce $\exp(-1/x^2)$ na $\mathbb{R}$. Vyšetřeme ještě derivaci funkce f: je

$$f'(x) = (2/x^3)f(x), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

K funkci f se ještě vrátíme v Příkladu 7.4.29.

6.4 Inverzní funkce

Nyní dokážeme několik jednoduchých obecných tvrzení o inverzních funkcích. Tato tvrzení pak v této kapitole vícekrát použijeme.

Lemma 6.4.1. *Nechť funkce f je rostoucí (resp. klesající) na intervalu I a nechť $f : I \overset{\text{na}}{\to} J$, kde J je také interval. Potom je funkce $g := f^{-1}$ rostoucí (resp. klesající) na J.*

Důkaz. Jsou-li $s, t \in J$, $s < t$, je $x := g(s) < g(t) =: y$. Kdyby totiž platilo $g(s) = x \geq y = g(t)$, pak bychom dostali $f(x) = s \geq t = f(y)$, což vede ke sporu. Podobně se dokáže tvrzení o klesající funkci. $\square$

Lemma 6.4.2. *Funkce f z předcházejícího Lemmatu 6.4.1 je spojitá na intervalu I. Funkce $g := f^{-1}$ je spojitá na intervalu J.*

Důkaz. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že f je rostoucí (druhý případ se dokáže opět obdobně). Funkce f zobrazuje každý interval $(a,b) \subset I$ na interval $(f(a), f(b))$ a má Darbouxovu vlastnost; srovnejte s Důsledkem 4.3.41. Analogicky lze postupovat i u funkce g. Srovnejte s následující Poznámkou 6.4.3. $\square$

Poznámka 6.4.3. Druhou část předcházejícího tvrzení (o spojitosti g) lze dokázat bez užití obecnějších a hlubších poznatků takto: Volme $x \in I$ a předpokládejme, že x není koncovým bodem I, takže $f(x)$ není koncovým bodem J. Zvolme dále $\varepsilon > 0$ tak, aby platilo $x + \varepsilon \in I$. Pro $y \in I$, $x < y < x + \varepsilon$, je $f(y) \in J$, $f(x) < f(y) < f(x + \varepsilon)$ a lze položit $f(x + \varepsilon) - f(x) = \delta$. Zřejmě platí

$$g([f(x), f(x) + \delta)) \subset [x, x + \varepsilon)\,,$$

a tedy g je spojitá zprava v $f(x)$. Obdobně vyšetříme spojitost zleva v bodě, který není počáteční.

Lemma 6.4.4. *Nechť funkce f splňuje opět předpoklady Lemmatu 6.4.1 a nechť f má ve vnitřním bodě $x \in I$ vlastní nenulovou derivaci. Potom $g := f^{-1}$ má vlastní nenulovou derivaci v bodě $s := f(x)$ a platí*

$$g'(s) = \frac{1}{f'(x)}\,. \tag{6.6}$$

Důkaz. Dle Carathéodoryho definice derivace existuje funkce φ spojitá v bodě x tak, že pro y z nějakého okolí $\mathcal{U}(x)$ bodu x platí

$$f(y) - f(x) = \varphi(y)(y - x), \qquad \text{a} \qquad \varphi(x) = f'(x)\,.$$

Nyní opět označíme, tak jako v důkazu Lemmatu 6.4.1, $f(x) = s$, resp. $g(s) = x$ a $f(y) = t$, resp. $g(t) = y$, a první rovnost přepíšeme do tvaru

$$t - s = \varphi(g(t))(g(t) - g(s))\,,$$

což dává po úpravě

$$g(t) - g(s) = \frac{1}{\varphi(g(t))}(t - s)\,.$$

Funkce $(\varphi(g(t)))^{-1}$ je podle Věty 4.2.18 o spojitosti složené funkce rovněž spojitá v bodě s. Dosazení dává zbytek tvrzení. □

Poznámka 6.4.5. Na tomto místě by si měl čtenář uvědomit, že jakmile dokážeme *existenci* derivace $g'(s)$, plyne vzorec (6.6) ze vzorce pro derivování složené funkce

$$1 = (x)' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(s) \cdot f'(x)\,.$$

Existence je tedy tou podstatnou částí důkazu, zbytek je triviální.

Poznámka 6.4.6. Je-li f *rostoucí* a $f'(x) = 0$, je $g'(f(x)) = +\infty$; je-li f klesající a $f'(x) = 0$, je $g'(f(x)) = -\infty$. Podobné tvrzení lze obdržet i pro jednostranné derivace (důkaz přenecháme čtenáři jako cvičení; je založen na definici derivace a definici inverzní funkce).

6.5 Přirozený logaritmus

Podobným způsobem jako jsme zavedli exponenciálu lze zavést přirozený logaritmus. Náš postup bude trochu odlišný: přirozený logaritmus zavedeme jako inverzní funkci k funkci exp. Přesto budeme také pracovat s funkcionální rovnicí pro logaritmus, abychom si ukázali, jak z ní plynou základní vlastnosti logaritmů.

Definice 6.5.1 (zavedení logaritmu; Euler 1748*). Inverzní funkci k exponenciále nazýváme *přirozený logaritmus* a označujeme ji log.

Z dokázaných Lemmat 6.4.1, 6.4.2 a 6.4.4 dostáváme toto tvrzení:

Věta 6.5.2. *Funkce* log *zobrazuje interval* $(0,\infty)$ *na* $\mathbb{R}$*, je na intervalu* $(0,\infty)$ *rostoucí, spojitá a pro její derivaci platí* $\log'(x) = 1/x$*,* $x \in (0,\infty)$ [5]).

Důkaz. Spočteme pouze derivaci log, ostatní je zřejmé. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$1 = (x)' = (\log \circ \exp)'(x) = \log'(\exp x) \exp x\,,$$

a tedy, po záměně $\exp x = y$, $\log'(y) = 1/y$, $y \in (0,\infty)$. □

Poznámka 6.5.3. Z pedagogického hlediska je vhodné, když se se vznikem logaritmů a jejich základními vlastnostmi setkají žáci již na střední škole. Přitom je vhodné upozornit žáky při zavádění mocnin na jednu důležitou okolnost. Lze k tomu použít i trochu historie. Již ve spisu *Arithmetica integra* z r. 1544 si Michael Stifel (1486 – 1567) povšiml, že při práci s aritmetickou a geometrickou posloupností

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & \dots \end{array}$$

násobení členů ve druhé řádce (např. $8 \times 32 = 256$) odpovídá sčítání exponentů v první řádce ($3 + 5 = 8$). Pro praktické využití je uvedená množina čísel, které bychom mohli takto lehce mezi sebou násobit, poněkud „malá“, ale toto povšimnutí sehrálo důležitou historickou roli při objevu logaritmů. Pokud se žáci seznámí brzo s touto vlastností mocnin, snáze budou zavádění logaritmu pomocí funkcionální rovnice chápat.

Lemma 6.5.4. *Inverzní funkce k* exp*,* $g = \exp^{-1}$*,* $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$*, je řešením funkcionální rovnice*

$$g(xy) = g(x) + g(y), \qquad x, y \in (0,\infty)\,.$$

Důkaz. Označme exponenciálu kratčeji f. Pro inverzní funkci $g = f^{-1}$ platí

$$(g \circ f)(x) = x\,,\ x \in \mathbb{R}\,, \qquad (f \circ g)(u) = u\,,\ u \in (0,\infty)\,;$$

pro $u := f(s)$, $v := f(t)$, resp. ekvivalentně $g(u) = s$, $g(v) = t$, dostáváme rovnost $uv = f(s)f(t) = f(s+t)$ a platí tedy

$$g(uv) = (g \circ f)(s+t) = s + t = g(u) + g(v)\,.$$

Tím jsme dospěli k žádané rovnici. □

[5]) Často se setkáte i se zápisem $(\log x)' = 1/x$.

Jak dále uvidíme, z této funkcionální rovnice plynou poměrně velmi jednoduše základní vlastnosti logaritmů.

Lemma 6.5.5. *Pro každé řešení g funkcionální rovnice*

$$g(xy) = g(x) + g(y)\,, \qquad x, y \in (0, \infty)\,, \tag{6.7}$$

platí: (a) $g(1) = 0$, (b) $g(x^{-1}) = -g(x)$ pro všechna $x \in (0, \infty)$, (c) $g(x/y) = g(x) - g(y)$ pro všechna $x, y \in (0, \infty)$, (d) $g(x^n) = ng(x)$ pro všechna $x \in (0, \infty)$ a všechna $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Z (6.7) vyplývá dosazením 1 za y rovnost $g(x) = g(x) + g(1)$, takže zřejmě platí $g(1) = 0$. Dále pro $x \in (0, \infty)$ lehce dostaneme

$$0 = g(1) = g\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)\,,$$

proto pro všechna $x \in (0, \infty)$ je

$$g(x) = -g(x^{-1})\,.$$

Zároveň dostáváme pro $x, y \in (0, \infty)$ rovnost $g(x/y) = g(x) - g(y)$. Konečně ze vztahů

$$g(x^2) = 2g(x)\,,$$
$$g(x^{n+1}) = g(x^n \cdot x) = g(x^n) + g(x) = (n+1)g(x)$$

dostáváme indukcí

$$g(x^n) = n\,g(x)$$

pro všechna $x \in (0, +\infty)$ a $n \in \mathbb{N}$. □

Poznámka 6.5.6. Není obtížné dokázat, že je-li g inverzní funkce k exponenciále, platí pro ni

$$\lim_{y \to 1} \frac{g(y)}{y-1} = 1\,.$$

Označíme-li exponenciálu f, pak $f(0) = 1$, a tedy $g(1) = 0$. Dále po dosazení $x = g(y)$ platí pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $y \in (0, \infty) \setminus \{1\}$

$$\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{f(g(y)) - f(g(1))}{g(y)} = \frac{y-1}{g(y)}\,.$$

Odtud vyplývá

$$1 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{f(x) - 1} = \lim_{y \to 1} \frac{g(y)}{y-1} = \lim_{y \to 1} \frac{g(y)}{f(g(y)) - f(g(1))}$$

podle Věty 4.4.1 o limitě složené funkce, neboť g je spojitá a $(f(x) - 1)/x$ lze spojitě rozšířit do bodu 0.

Nyní již víme, že inverzní funkce k exponenciále vyhovuje funkcionální rovnici

$$g(xy) = g(x) + g(y)\,, \qquad x, y \in (0, \infty)\,,$$

a podmínce

$$\lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{x-1} = 1\,. \tag{6.8}$$

Podmínka (6.8) je přitom ekvivalentní s podmínkou $g(x) \leq x-1$ pro všechna $x \in (0,\infty)$. Dá se dokázat analogické tvrzení jako to, kterým jsme zavedli exponenciálu:

Věta 6.5.7. *Existuje právě jedna funkce $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, která vyhovuje funkcionální rovnici* (6.7) *a podmínce* (6.8).

Bylo by zbytečné se snažit dokazovat krok za krokem analogická tvrzení jako v případě exponenciály, spokojíme se s konstatováním, že to jde. Je možné si představit, že by z nějakých důvodů bylo vhodné začít výklad od logaritmů a na nich si „odpracovat vše". Pak se exponenciála zavede jako inverzní funkce k přirozenému logaritmu. Také tento postup lze nalézt v literatuře, viz např. [1].

Je užitečné zdůraznit, že log je taková funkce, která po zderivování dává funkci $1/x$, $x \in (0,\infty)$; jak uvidíme, toto indikuje další postup, jak lze pomocí funkce $1/x$ definovat přirozený logaritmus. K němu však nemáme ještě vybudováno potřebné teoretické zázemí a nebudeme se mu věnovat ani později.

Jak si čtenář již jistě povšiml, symbol log značí v tomto textu vždy *přirozený logaritmus*, který se často značí též lg nebo ln. V našem výkladu vystupuje prakticky stále jen přirozený logaritmus, není tedy potřeba „mezi logaritmy" rozlišovat. Je však třeba vztah k ostatním logaritmickým funkcím vymezit.

Ukažme si použití logaritmu k porovnání kritérií pro konvergenci řad, která jsme zavedli v Kapitole 3.

Příklad 6.5.8. Nechť posloupnost $\{x_n\}$ kladných čísel konverguje k $x \in (0,\infty)$. Potom pro $n \to \infty$ platí

$$u_n = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \to x\,.$$

Z předpokladu a spojitosti logaritmu zřejmě plyne $\log x_n \to \log x$. Podle Lemmatu 2.4.22 platí

$$y_n = \frac{\log x_1 + \dots + \log x_n}{n} = \log \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \log u_n \to \log x\,, \tag{6.9}$$

a odtud plyne s ohledem na vlastnosti exponenciály i $u_n \to x$.

Předcházející příklad se může zdát samoúčelný, má však jeden zajímavý důsledek, který je obsahem následujícího tvrzení:

Lemma 6.5.9. *Nechť $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = a \geq 0$. Potom je*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}\,. \tag{6.10}$$

Důkaz. Použitím rovnosti limit z Příkladu 6.5.8 na posloupnost

$$a_1, \ \frac{a_2}{a_1}, \ \frac{a_3}{a_2}, \ \dots, \ \frac{a_n}{a_{n-1}}, \ \frac{a_{n+1}}{a_n}, \ \dots$$

dostaneme tvrzení pro případ, že $a > 0$. Při $a = 0$ či $a = \infty$ však rovnost (6.10) rovněž platí, pouze je třeba v Příkladu 6.5.8 v (6.9) nahradit $\log x$ hodnotami $-\infty$ a $+\infty$. □

Další zkoumání souvislosti podílového a odmocninového kritéria odložíme na dobu, kdy je ještě trochu zobecníme. Viz Lemma 8.4.14.

Příklad 6.5.10. Položme $a_n = n!/n^n$. Potom z předcházejícího Lemmatu 6.5.9 vyplývá

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \to e^{-1},$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1};$$

speciálně odtud vyplývá, že $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ pro $n \to \infty$.

Z Lemmatu 6.5.9 rovněž vyplývá, že lze-li o konvergenci řady s kladnými členy rozhodnout pomocí limitního podílového kritéria, lze výsledek obdržet i pomocí limitního odmocninového kritéria. To nás opravňuje k domněnce, že „limitní odmocninové kritérium není slabší než limitní podílové kritérium“. Pokuste se tuto myšlenku vyjádřit přesněji a eventuálně uvést vhodné příklady.

Historická poznámka 6.5.11. Význam logaritmů jako jediného prostředku pro zrychlení a zjednodušení výpočtů je v dnešní „počítačové době“ zanedbatelný, přesto však jsou přirozený logaritmus či obecněji všechny logaritmické funkce velmi důležité pro popis dějů ve fyzikálních, ekonomických i technických aplikacích, a též pro matematiku samu. Jak jsme již viděli, logaritmus hraje důležitou roli při zkoumání rychlosti divergence harmonické řady. Jako jiný důležitý výsledek zmiňme zákon o rozložení prvočísel, který objevil Pafnutij L'vovič Čebyšev (1821 – 1894). V r. 1848 publikoval práci *Sur les nombres premiers*, jejíž hlavní výsledek si přiblížíme.

Označíme-li $\pi(x)$ funkci, která udává počet prvočísel nejvýše rovných x, bylo jedním ze základních problémů analýzy 19. stol. nalézt co nejpřesnější informace o jejím chování. Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) ukázal, že ji nelze popsat žádnou racionální funkcí a empiricky dospěl r. 1798 k přibližnému vyjádření

$$\pi(x) \doteq x(\log x - 1{,}08366)^{-1},$$

zatímco Čebyšev dokázal odhad

$$A_1 < \frac{\pi(x)}{x/\log x} < A_2$$

s $0,992 < A_1 < 1$ a $1 < A_2 < 1,105$. Odhady byly později zlepšeny, ale nutno poznamenat, že Čebyšev *nedokázal*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1\,;$$

tento tzv. *zákon o rozložení prvočísel* obdrželi r. 1896 nezávisle na sobě JACQUES HADAMARD (1865 – 1963) a CHARLES-JEAN DE LA VALLÉE POUSSIN (1866 – 1962). Použití zákona dává tyto praktické výsledky: např. mezi prvním milionem přirozených čísel je 78 499 prvočísel, funkce $x/\log x$ však dává o 129 více, takže chyba je menší než 0,2 %; pro prvních 10 milionů přirozených čísel dává přesný výpočet 664 580 prvočísel, chyba v tomto případě činí méně než 0,06 %.

Exponenciála a přirozený logaritmus jsou i dnes, kdy se upouští od užívání logaritmických tabulek, nesporně velmi důležité, a to i na středoškolské úrovni. Jsou však také klíčem k definici dalších funkcí. Připomeňme nejprve význačné hodnoty pro funkce exp a log. Je $\exp 0 = 1$ a $\exp 1 = \mathrm{e}$. Proto $\log 1 = 0$ a $\log \mathrm{e} = 1$.

Definice 6.5.12. Pro každé $a \in (0,\infty)$ a každé $b \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^b := \exp(b \log a)\,. \tag{6.11}$$

Dále definujeme pomocí (6.11) pro každé $a \in (0,\infty)$ *obecnou exponenciální funkci* vztahem

$$a^x : x \mapsto \exp\,(x \log a), \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.12}$$

Číslo a nazýváme zpravidla *základ* exponenciální funkce. Podobně definujeme opět pomocí (6.11) pro každé $a \in \mathbb{R}$ *obecnou mocninu* vztahem

$$x^a : x \mapsto \exp\,(a \log x), \quad x \in (0,\infty)\,. \tag{6.13}$$

Poznámka 6.5.13. Snadno dokážete, že funkce a^x vyhovuje funkcionální rovnici (6.3), obecně však nikoli již podmínce (6.4). Přesto lze však použít Lemma 6.3.1 a tak dostat základní vlastnosti obecné exponenciály. Pro Eulerovu konstantu e pak platí

$$\mathrm{e}^x = \exp x, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

což ukazuje vztah k tradičnímu značení exponenciály. V našem případě jde o důsledek definice obecné exponenciální funkce.

Poznámka 6.5.14. V Definici 6.5.12 se definuje výraz a^b pro každé $a \in (0,\infty)$ a každé $b \in \mathbb{R}$. My jsme však již definovali např. a^n pro $n \in \mathbb{N}$ apod. Jsme proto povinni ukázat, že tato nová definice již užitou definici rozšiřuje, avšak nekoliduje s ní. Označme na okamžik nově definovanou mocninu $a\,\widehat{}\,n$. Pak pro $a \in (0,\infty)$ platí

$$a\,\widehat{}\,n = \exp(n \log a) = (\exp(\log a))^n = a^n\,.$$

Zápis působí poněkud nezvykle, začali jsme však od „nové definice“ a skončili u té, kterou jsme dosud užívali. Jde tedy opravdu (na intervalu $(0,\infty)$!) o rozšíření a tak lze užívat označení, na něž jsme zvyklí.

Příklad 6.5.15. V průběhu výkladu jsme odvodili vzorce pro derivování. Platí

$$(\mathrm{e}^x)' = \exp'(x) = \mathrm{e}^x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \qquad \text{a také} \qquad \log'(x) = 1/x\,, \quad x \in (0,\infty)\,.$$

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ dále platí

$$(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x \log a}\right)' = \mathrm{e}^{x \log a} \log a = a^x \log a\,.$$

Odtud vyplývá, že pro všechna $a \neq 1$ je exponenciála o základu a spojitá funkce, která zobrazuje $\mathbb{R}$ na interval $(0,\infty)$. Pro $a > 1$ je tato funkce rostoucí a pro $0 < a < 1$ je klesající, avšak ve všech těchto případech je prostá. Proto vždy pro $a > 0$, $a \neq 1$ existuje inverzní funkce k a^x.

Definice 6.5.16. Je-li exponenciální funkce a^x o základu a prostá (tedy $a \neq 1$), nazýváme funkci k ní inverzní *obecným logaritmem*, resp. *logaritmem o základu* a; značíme ji $\log_a$.

Příklad 6.5.17. Je zřejmé, že pro funkce $\log_a$ platí

$$\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R}\,.$$

Pro $a > 1$ jsou tyto funkce rostoucí, pro $0 < a < 1$ jsou klesající. Snadno lze pomocí Lemmatu 6.4.4 pro každé $x \in (0,\infty)$ dokázat vzoreček

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x \log a}\,.$$

Příklad 6.5.18. Odvodíme ještě převodní vztahy mezi logaritmickými funkcemi. Je-li $a, b \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, označme $\varphi := \log_a x,\ x \in (0,\infty)$; potom platí

$$\log_b x = \log_b(a^\varphi) = \varphi \log_b a = \log_a x \log_b a\,,$$

a tedy platí

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}\,, \quad x \in (0,\infty)\,.$$

Příklad 6.5.19. Snadno se dá opět dokázat, že funkce $\log_a$ vyhovuje funkcionální rovnici (6.7), obecně však nikoli již podmínce (6.8). Lemma 6.5.5 popisuje základní vlastnosti obecného logaritmu. Pro Eulerovu konstantu e a pro logaritmy platí vztahy

$$\log_e x = \log x\,, \quad \log_a x = \frac{\log x}{\log a}\,, \quad x \in (0,\infty)\,.$$

Příklad 6.5.20. Ověřte derivováním platnost vzorců (jde o dva vzorce)

$$\left(\log|x+\sqrt{x^2\pm 1}|\right)' = \left(\sqrt{x^2\pm 1}\right)^{-1}\ !$$

Poznamenejme, že ve vzorci se znaménkem '+' je absolutní hodnota zbytečná a že vzorec se znaménkem '−' platí pro případ, kdy je $|x| > 1$.

Jelikož již víme, co je log, ukážeme si souvislost této funkce s harmonickou řadou. Vágně lze problém vyjádřit otázkou, jak rychle diverguje harmonická řada.

Příklad 6.5.21 (Euler 1740). Jednoduchou aplikací Lagrangeovy věty dostaneme

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log(n) < \frac{1}{n}\,. \tag{6.14}$$

Jestliže nyní označíme

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n\,, \qquad b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \log n\,,$$

dostaneme pomocí (6.14)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} > 0\,, \quad b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \log\frac{n+1}{n} < 0\,.$$

Protože dále platí $b_n - a_n = 1/n$, můžeme uplatnit princip vložených intervalů a definovat

$$\gamma := \lim\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}[\,a_n, b_n\,]$$

Číslo γ se nazývá *Eulerova* nebo *Euler-Mascheroniova* konstanta. Později, v souvislosti s integrálním kritériem, které nám umožní tuto situaci krásně zviditelnit, snadno nahlédneme, že platí $\gamma \in [\,1/2, 1\,]$. Platí $\gamma = 0,5772156649\ldots$.

Příklad 6.5.22 (Ohm 1839*). Vraťme se ještě jednou k řadě $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{-1}$ a zkoumejme konvergenci řady, která z ní vznikne následujícím přerovnáním: jsou-li $p, q \in \mathbb{N}$, sečteme nejprve prvních p *kladných* členů, potom prvních q *záporných* členů, pak následujících p kladných a následujících q záporných, atd. Takto vzniklou řadu označme $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a určeme její součet; použijeme-li označení z důkazu Věty 3.4.7 je $p = m_1 = m_2 = \cdots$ a $q = m_1' = m_2' = \cdots$.

S ohledem na Příklad 6.5.21 platí

$$T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \alpha_n\,,$$

kde $\alpha_n \to 0$. Je tedy

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{T_n}{2} = \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\alpha_n\,.$$

Snadno nahlédneme, že platí

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2q-1}=T_{2q}-\frac{1}{2}T_q=$$
$$=\log 2q+\gamma+\alpha_{2q}-\frac{1}{2}\log q-\frac{1}{2}\gamma-\frac{1}{2}\alpha_q=\log 2+\frac{1}{2}\log q+\frac{1}{2}\gamma+\beta_q\,,$$

kde opět $\beta_q \to 0$. Sečtením celkem m kladných a m záporných skupin dostaneme:

$$\Big(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2mp-1}\Big)-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2mq}\Big)=$$
$$=\log 2+\frac{1}{2}\log mp+\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\log mq-\frac{\gamma}{2}+\delta_m\,,$$

kde také $\delta_m \to 0$. Odtud dostaneme úpravou a limitním přechodem

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\log\sqrt{\frac{4p}{q}}\,.$$

Pozor, uvědomte si, že zatím jsme dokázali pouze konvergenci *vybrané posloupnosti* $\{t_m\}=\{s_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ z posloupnosti všech částečných součtů $\{s_n\}$ přerovnané řady. Platí $t_m=s_{m(p+q)}$, $m\in\mathbb{N}$. Lze však odhadnout zbytek: Označíme-li součet přerovnané řady s, je pro všechna $n\geq m(p+q)$

$$|s_n-s|\leq|s_{m(p+q)}-s|\leq\frac{p}{2mp+1}+\frac{q}{2mq+2}\to 0 \text{ pro } m\to\infty\,,$$

z čehož dostáváme výsledek, tj. je $s_n\to s$.

6.6 Goniometrické funkce

Dále zavedeme goniometrické funkce. Bezprostředně však dokážeme podstatně méně; budeme se zabývat pouze jejich vlastnostmi, ale *zatím nedokážeme* jejich existenci a jednoznačnost. V této části budeme používat i vyšších derivací funkce. Definujeme je rekurentním předpisem.

Definice 6.6.1. Vyšší derivace definujeme (jako funkce) rekurentně. Protože větší počet čárek není vždy přehledný, užíváme alternativní zápis: píšeme f', f'', ale často $f^{(3)}$ místo f''' atp. Definujeme (jde opět o typ induktivní definice)

$$f^{(n+1)}=(f^{(n)})'\,,\qquad n\in\mathbb{N}\,.$$

Klademe tedy $f^{(0)}=f$, $f^{(1)}=f'$, $f^{(2)}=(f')'=f''$ atd. Je-li $I\subset\mathbb{R}$ interval, pak $f\in\mathcal{C}^{(k)}(I)$ znamená, že k-tá derivace je definována na I (v krajních bodech eventuálně jednostranné derivace) a je to *spojitá funkce* na I. Místo $f\in\mathcal{C}^{(0)}(I)$ píšeme pouze $f\in\mathcal{C}(I)$. Z předchozího víme, že $\mathcal{C}(I)$ je lineární prostor; snadno nahlédneme, že i $\mathcal{C}^{(k)}(I)$ je lineární prostor. Je-li konečně $f\in\mathcal{C}^{(k)}(I)$ pro všechna $k\in\mathbb{N}$, píšeme $f\in\mathcal{C}^{(\infty)}(I)$. Také $\mathcal{C}^{(\infty)}(I)$ je zřejmě lineární prostor.

Příklad 6.6.2. Jelikož pro derivování exponenciály platí

$$\exp = \exp' = \exp'' = \exp''' = \dots ,$$

znamená to, že $\exp \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Také polynomy jsou funkce z $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Snadno též nalezneme příklady funkcí z $\mathcal{C}^{(k)}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^{(k+1)}(\mathbb{R})$.

Obraťme nyní naši pozornost ke goniometrickým funkcím. Výběr vhodných funkcionálních rovnic není jediný možný. Tak například bychom mohli použít tzv. d'Alembertovy rovnice

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}\,, \tag{6.15}$$

a snažit se pomocí ní zavést funkci cos. Zřejmým řešením (6.15) je funkce $f \equiv 0$. Pokud hledáme netriviální řešení, pak ze standardního triku (dosazení $y = 0$) dostáváme $2f(x) = 2f(x)f(0)$, tedy pro každé netriviální řešení platí $f(0) = 1$. Dosadíme-li do funkcionální rovnice (6.15) $x = 0$, vidíme, že pro každé řešení (6.15) platí

$$f(y) = f(-y)\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,.$$

Odtud plyne, že každé řešení této rovnice je *sudá* funkce. Jestliže dále vyloučíme řešení $f \equiv 1$, pak jediná spojitá řešení rovnice (6.15) na $\mathbb{R}$ jsou tvaru ($a \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = \cos ax\,, \qquad f(x) = \cosh ax\,,$$

což dokázal již Cauchy v r. 1821. Jestliže budeme předpokládat, že řešení jsou hladká (např. existuje druhá (vlastní) derivace $f''(x)$ všude v $\mathbb{R}$), dostaneme dvojím zderivováním rovnice (6.15) podle proměnné y rovnici

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,,$$

která po dosazení $y = 0$ a zkrácení nabude tvaru

$$f''(x) = f''(0)\cdot f(x)\,, \quad \text{resp.} \quad y'' - ky = 0\,, \tag{6.16}$$

kde $k = f''(0)$. Tento výsledek si pouze zapamatujeme pro pozdější dobu.

Při zavádění goniometrických funkcí si uvědomíme, že již na střední škole jsme poznali řadu vzorců, ve kterých tyto funkce vystupovaly. Přitom se všechny tyto vzorce dají snadno odvodit z malého počtu základních formulí. S ohledem na další cíle budeme postupovat tak, že za determinující funkcionální rovnice zvolíme dvojici rovnic

$$\begin{aligned} c(x-y) &= c(x)c(y) + s(x)s(y)\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}\,,\\ s(x-y) &= s(x)c(y) - c(x)s(y)\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

s omezující podmínkou pro funkci s, která je analogická podmínkám, s nimiž jsme již pracovali:

$$\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1\,. \tag{6.17}$$

Ukažme si, jak odtud vyplynou základní vlastnosti funkcí sin a cos. Ty tvoří jedinou dvojici spojitých funkcí, které jsou řešením uvedených rovnic a vyhovují předcházející podmínce. Poznamenejme ještě, že různý přístup ke goniometrickým funkcím pomocí funkcionálních rovnic popisuje např. [7].

Odvození všech základních vlastností obou funkcí je delší a sestává se z řady vzájemně provázaných kroků. Postupně odvodíme řadu elementárních poznatků o funkcích sin a cos (zatím je značíme s a c); tyto poznatky budeme při výpočtech používat, teprve později však ukážeme, jak se dokáže existence a jednoznačnost goniometrických funkcí. Následující větu tedy zatím nedokazujeme.

Věta 6.6.3 (zavedení goniometrických funkcí). *Existuje právě jedna dvojice funkcí na $\mathbb{R}$, které vyhovují rovnicím*

$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}\,, \tag{6.18}$$
$$s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y)\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}\,, \tag{6.19}$$

a podmínce

$$\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1\,. \tag{6.20}$$

Tyto funkce nazýváme sinus a kosinus (*označení:* sin *a* cos).

Poznámky 6.6.4 (Vlastnosti funkcí sin a cos). Funkce s a c mají následující vlastnosti (budeme je odvozovat a popisovat zároveň):

1. Ze rovnice (6.18) dostaneme rovnost

$$c(y-x) = c(y)c(x) + s(y)s(x) = c(x-y)\,, \tag{6.21}$$

z níž po dosazení $y = 0$ dostaneme $c(x) = c(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, a proto je c *sudá* funkce.

2. Podobně snadno dostaneme rovnost

$$s(y-x) = s(y)c(x) - c(y)s(x) = -s(x-y)\,, \tag{6.22}$$

z níž po dosazení $y = 0$ vyplývá $s(-x) = -s(x)$, $x \in \mathbb{R}$, a že funkce s je *lichá.*

3. Z $s(0) = -s(0)$ dostáváme $s(0) = 0$. Odtud a z již odvozených rovností (6.22), (6.21) dostaneme „součtové“ vzorce $c(x+y) = \cdots$, $s(x+y) = \cdots$, a speciálně vzorce

$$c(2x) = c^2(x) - s^2(x)\,, \quad s(2x) = 2s(x)c(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

4. Z (6.20) vyplývá, že funkce s není konstantní. Existuje tedy $x_1 \in \mathbb{R}$ tak, že $s(x_1) \neq 0$. Dále platí $s(x) = s(x+0) = s(x)c(0) + c(x)s(0)$, odkud vyplývá dosazením x_1 za x a užitím $s(0) = 0$ rovnost $c(0) = 1$.

5. Dále snadno obdržíme

$$1 = c(0) = c(x - x) = c^2(x) + s^2(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,; \tag{6.23}$$

odtud vyplývají pro všechna $x \in \mathbb{R}$ odhady $|c(x)| \leq 1$, $|s(x)| \leq 1$, takže funkce s a c jsou omezené na $\mathbb{R}$.

6. Ukážeme, že funkce s a c mají všude v $\mathbb{R}$ vlastní derivaci: pro libovolně zvolené $x \in \mathbb{R}$ platí (v průběhu výpočtu použijeme rovnost $c(h) = c^2(h/2) - s^2(h/2)$, a také rovnost (6.23))

$$\begin{aligned}
s'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{s(x)c(h) + c(x)s(h) - s(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{s(x)(c(h)-1) + c(x)s(h)}{h} = \\
&= s(x) \lim_{h\to 0} \frac{(c(h)-1)}{h} + c(x) \lim_{h\to 0} \frac{s(h)}{h} = \\
&= -s(x) \lim_{h\to 0} \left(\frac{s(h/2)}{h/2} \right)^2 (h/2) + c(x)\cdot 1 = -s(x)\cdot 1\cdot 0 + c(x) = c(x)\,,
\end{aligned}$$

a proto je $s'(x) = c(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Podobně se dokáže rovnost $c'(x) = -s(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Z odvozených vzorců vyplývá, že funkce c a s mají vlastní derivace všech řádů, takže $s, c \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$.

7. S ohledem na $c(0) = s'(0) = 1$ a spojitost vidíme, že funkce s je kladná na nějakém intervalu $(0, p)$ [6]), a protože platí $c'(x) = -s(x)$, je c klesající na $(0, p)$. Vypočtěme ještě hodnoty derivací funkce c: $c(0) = 1$, $c'(0) = -s(0) = 0$, $c''(0) = -c(0) = -1$, $c'''(0) = s(0) = 0$ a $c''''(0) = c(0) = 1$. Pro funkci c platí pro všechna $x \geq 0$

$$1 - \frac{x^2}{2!} \leq c(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\,.$$

Tento odhad lze dokázat elementárními prostředky sloužícími k vyšetřování průběhu funkcí. Nyní si stačí povšimnout, že polynom vpravo nabývá v bodě 2 záporné hodnoty, a tedy platí i $c(2) < 0$. K důkazu existence nejmenšího kladného nulového bodu funkce c využijeme větu o spojitém obrazu intervalu.

8. Nejmenší kladné číslo, v němž funkce c nabývá hodnoty 0, označíme α; z uvedených nerovností je můžeme snadno i odhadnout; snadno zjistíme, že platí nerovnosti $\sqrt{2} < \alpha < (2(3 - \sqrt{3}))^{1/2}$. Je $s(\alpha) = 1$, přičemž s roste na $(0, \alpha)$.

---

[6]) Maximální interval této vlastnosti souvisí s dále uvedenou definicí π.

9. Dále platí
$$c(x-\alpha) = c(x)c(\alpha) + s(x)s(\alpha) = s(x)\,,$$
a tak postupně dostaneme
$$\begin{aligned} c(x+\alpha) &= -s(x)\,, & s(x+\alpha) &= c(x)\,,\\ c(x+2\alpha) = -s(x+\alpha) &= -c(x)\,, & c(x+4\alpha) &= -c(x+2\alpha) = c(x)\,,\\ s(x+2\alpha) = c(x+\alpha) &= -s(x)\,, & s(x+4\alpha) &= -s(x+2\alpha) = s(x)\,. \end{aligned}$$
Vidíme, že funkce c a s jsou periodické s nejmenší kladnou periodou 4α; položíme $\pi := 2\alpha$. Toto je pro nás *definice* π. Platí $c(\alpha) = 0 = c(3\alpha)$, a proto se c anuluje právě ve všech bodech množiny $\{(2k+1)\alpha;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Podobně dostaneme popis množiny všech nulových bodů funkce s; je to množina $\{2k\alpha;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Poznámka 6.6.5. I když jsme dokázali mnoho vlastností goniometrických funkcí sin a cos, dosud nám chybí důkaz jejich existence a jednoznačnosti. Ten provedeme později mnohem snáze jinými prostředky. V každém případě teprve potom můžeme nazvat řešení rovnic (6.18) a (6.19) splňující podmínku (6.20) sinus a kosinus. Existenci a jednoznačnost funkcí sin a cos lze dokázat pomocí jejich rozvojů v mocninnou řadu, pomocí elementární teorie diferenciálních rovnic apod.

Definice 6.6.6. Pomocí funkcí sin a cos definujeme další funkce
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\,, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\,.$$
Funkce tg je definována na množině $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2;\ k \in \mathbb{N}\}$, funkce cotg je definována na množině $\mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{N}\}$. V obou případech se odečítají množiny všech nulových bodů funkcí, vystupujících ve jmenovateli. Označení funkce tg čteme „tangens“ a funkce cotg „kotangens“.

Poznámka 6.6.7. Někdy se zavádějí funkce sec ($= 1/\cos$), jejíž označení čteme „sekans“ a cosec ($= 1/\sin$), což čteme „kosekans“). Pro nás nemají větší význam a nebudeme se jimi podrobněji zabývat. Ukážeme si však, jak se dají odvodit další součtové vzorce. Pracujme např. s funkcí tg. Platí
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)} = \frac{\sin x \cos y \pm \cos x \sin y}{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y} = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}\,, \tag{6.24}$$
pokud ovšem jsou definovány všechny v rovnici vystupující výrazy.

Příklad 6.6.8. Limity, které se vyskytovaly ve větách o zavedení funkcí exp a sin, se vyskytují často v příkladech. Tak např. snadno spočteme
$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(\sin x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(\sin x) - 1}{\sin x} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(\sin x) - 1}{\sin x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$
Kromě tvrzení o limitě součinu jsme použili i Větu 4.4.1.

Poznámky 6.6.9. 1. Budeme často používat Bolzanovu větu o „spojitém obrazu intervalu“ (Věta 4.3.37), na které spočívá určení definičního oboru vyšetřovaných inverzních funkcí.

2. Funkce sin, cos a tg *nejsou* prosté. Existují však intervaly, na nichž prosté jsou a tyto intervaly jsou „maximální“. Na nich budeme hledat k těmto funkcím funkce inverzní. Avšak i takových intervalů je více a my si z nich vybíráme tak, aby příslušné inverzní funkce byly co nejjednodušší.

3. Tak např. funkce sin je prostá na $[-\pi/2, \pi/2]$, je na tomto intervalu rostoucí a spojitá, a má tam vlastní derivaci. K tomu nyní opět použijeme již dokázaná lemmata o inverzních funkcích.

Příklad 6.6.10. Protože $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ a nabývá na tomto intervalu obou extrémních hodnot, je

$$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \overset{\text{na}}{\to} [-1, 1],$$

neboť sin je spojitá funkce. Víme též, že sin je na tomto intervalu rostoucí a má na něm vlastní derivaci. Ta je nenulová, v krajních bodech má sin pouze jednostranné derivace, které jsou rovny 0. Proto je inverzní funkce, která se značí arcsin (čteme „arkus sinus“), definována na intervalu $[-1, 1]$, je tam rostoucí a spojitá,

$$\arcsin : [-1, 1] \overset{\text{na}}{\to} [-\pi/2, \pi/2]$$

a v $(-1, 1)$ platí

$$\arcsin'(y) = \left(\sqrt{1-y^2}\right)^{-1}.$$

Často se vzorec píše ve tvaru $(\arcsin y)' = \cdots$; význam tohoto zjednodušeného zápisu je zřejmý. Odvodíme poslední vzorec; označme $y = \sin x$ a spočtěme

$$\begin{aligned} 1 = (x)' &= (\arcsin \circ \sin)'(x) = \arcsin'(y) \cdot \cos x = \\ &= \arcsin'(y) \cdot \sqrt{1-\sin^2 x} = \arcsin'(y) \cdot \sqrt{1-y^2}\,. \end{aligned}$$

Poznámka 6.6.11. Funkci arcsin můžeme využít k popisu řešení rovnice $\sin x = y$, určitá opatrnost je však nutná. Je-li $y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, rovnice nemá řešení. Pro $y \in [-1, 1]$ však takových řešení existuje *nekonečně mnoho* a rovnice $x = \arcsin y$ popisuje pouze jedno z nich. Situace je proto složitější: x je řešením rovnice, právě když je

$$x \in \{\arcsin y + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arcsin y + (2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Inverzní funkce k sin na jiném (maximálním) intervalu, na kterém je funkce sin prostá, není arcsin, ale funkce podobná: např. pro restrikci sin na interval $[\pi/2, 3\pi/2]$ je to funkce $\pi - \arcsin x$ a pro restrikci na interval $[3\pi/2, 5\pi/2]$ je inverzní funkcí funkce $\arcsin x + 2\pi$.

Příklad 6.6.12. Nechť arccos (čteme „arkus kosinus“) je inverzní funkce k funkci cos na intervalu $[\,0, \pi\,]$. Potom je na intervalu $[\,-1, 1\,]$ funkce arccos zřejmě spojitá, klesající a platí

$$\arccos'(y) = -\left(\sqrt{1-y^2}\right)^{-1}, \quad y \in (-1, 1)\,.$$

Tento vzorec se odvodí analogicky jako vzorec pro derivování funkce arcsin. Dále platí

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2\,, \quad x \in [-1, 1]\,. \tag{6.25}$$

K tomu stačí zjištění, že výraz na levé straně rovnice má na intervalu $(-1, 1)$ nulovou derivaci, takže je to konstantní funkce. Její hodnota je $\pi/2$, což vyplývá např. ze vztahu $\arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \pi/2 = \pi/2$.

Poznámky 6.6.13. 1. Připomeňme, že derivace funkce sin, tj. cos, je nenulová na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$, takže výpočet derivace funkce arcsin pomocí derivování složené funkce byl korektní. Podobně i pro funkci arccos existenci derivace zaručuje opět Lemma 6.4.4 o derivování inverzní funkce.

2. Máme-li tedy zavedenu funkci arcsin, není již zavedení funkce arccos s ohledem na vztah (6.25) tak naléhavě důležité. Užitečnost této funkce souvisí totiž převážně s hledáním takové funkce, která po zderivování dá $1/\sqrt{1+x^2}$.

3. Jednostranné derivace funkcí arcsin a arccos krajních bodech intervalů, na nichž jsou definovány, jsou nevlastní a lze je spočítat podle Poznámky 6.4.6. Později si v Kapitole 7 ukážeme pohodlnější způsob výpočtu; viz Věta 7.1.2.

Poznámka 6.6.14. Vzorci typu $\arcsin(x + y) = \ldots$, podobnými součtovým vzorcům pro goniometrické funkce, se nebudeme zabývat; zajímavější je situace s trochu odlišnými vzorci typu $\arcsin x + \arcsin y = \ldots$. Jeden na ukázku odvodíme. Z rovností, platných pro $x_1, x_2 \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} y_1 &= \arcsin x_1 \quad \left(\text{resp.} \quad \sin y_1 = x_1, \quad \cos y_1 = \sqrt{1-x_1^2}\right) \quad \text{a} \\ y_2 &= \arcsin x_2 \quad \left(\text{resp.} \quad \sin y_2 = x_2, \quad \cos y_2 = \sqrt{1-x_2^2}\right) \end{aligned}$$

dostaneme pomocí vztahu

$$\sin(y_1 + y_2) = \sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2$$

mechanickým výpočtem hodnot arcsin výrazů na obou stranách rovnosti po dosazení rovnost

$$\begin{aligned} \arcsin x_1 + \arcsin x_2 &= \arcsin\left(x_1\sqrt{1-x_1^2} + x_2\sqrt{1-x_2^2}\right) = \\ &=: \arcsin\left(Z(x_1, x_2)\right)\,. \end{aligned}$$

Ta však platí pouze s jistými omezeními. Hodnoty arcsin tvoří interval $[-\pi/2, \pi/2]$ a součet dvou takových hodnot vyplní interval $[-\pi, \pi]$. Proto je též někdy odlišný od $Z(x_1, x_2)$. Spokojíme se pouze s výsledkem, detailní odvození nebudeme provádět:

$$\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = \begin{cases} \arcsin Z(x_1, x_2)\,, & \text{pro } (x_1 x_2 \le 0) \vee (x_1^2 + x_2^2 \le 1)\,, \\ \pi - \arcsin Z(x_1, x_2)\,, & \text{pro } (x_1, x_2 > 0) \wedge (x_1^2 + x_2^2 > 1)\,, \\ -\pi - \arcsin Z(x_1, x_2)\,, & \text{pro } (x_1, x_2 < 0) \wedge (x_1^2 + x_2^2 > 1)\,. \end{cases}$$

Příklad 6.6.15. Funkce arctg (čteme „arkus tangens“) je definována jako inverzní funkce k funkci tg na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Zformulujeme důsledky dokázaných tvrzení pro tuto funkci: platí

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \overset{\text{na}}{\to} (-\pi/2, \pi/2)\,.$$

Funkce arctg je rostoucí a je

$$\operatorname{arctg}'(y) = 1/(1+y^2)\,, \quad y \in \mathbb{R}\,. \tag{6.26}$$

Ukažme si pouze odvození posledního vzorečku: lze použít vzorce pro derivování složené funkce (obě skládané funkce mají vlastní nenulové derivace) a je

$$\begin{aligned} 1 = (x)' &= (\operatorname{arctg} \circ \operatorname{tg})'(x) = \operatorname{arctg}'(y) \cdot (\cos^2 x)^{-1} = \\ &= \operatorname{arctg}'(y) \cdot \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right) = \operatorname{arctg}'(y)(y^2+1)\,. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že opět je běžný zápis (6.26) ve tvaru $(\operatorname{arctg} y)' = \cdots$.

Příklad 6.6.16. Ukážeme si odvození součtového vzorce pro funkci arctg. Postupujme formálně: je zřejmě

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}\,;$$

vzorec platí v případě, že $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$, $\cos(x+y) \neq 0$. Pro $x, y \in \mathbb{R}$ označme $\operatorname{arctg} x = u$, $\operatorname{arctg} y = v$. Pak je $x = \operatorname{tg} u$, $y = \operatorname{tg} v$ a

$$\operatorname{tg}(u+v) = \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}\,.$$

Pak *formálně* dostaneme

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = u + v = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(u+v)) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v} = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}\,.$$

To je však jen částečný výsledek. Musíme se ptát, pro jaká x, y vzorec platí; zde je odpovídající výsledek:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \alpha\,,$$

přičemž $\alpha = 0$ pro $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \in (-\pi/2, \pi/2)$. Dále platí $\alpha = \pi$, jestliže je $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \in (\pi/2, \pi)$ a $\alpha = -\pi$ pro $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \in (-\pi, \pi/2)$. Počítáme-li však podle tohoto vzorce, pak je nepohodlné mít výsledky závislé na $u + v$. Chtěli bychom tedy mít závislost na x, y. Ta je následující: $\alpha = 0$ při $xy < 1$, $\alpha = \pi$ při $xy > 1$, $x > 0$, a $\alpha = -\pi$ při $xy > 1$, $x < 0$. Výsledek je však nutno podrobně zdůvodnit. Srovnejte se cvičeními ke kapitole VII v [6].

Příklad 6.6.17. Ani funkce arctg není na předcházejících funkcích nezávislá. Pro všechna $x \in (-1, 1)$ platí

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,.$$

To lze dokázat již standardním postupem: zderivujeme-li rozdíl funkcí na obou stranách rovnice, vidíme, že je konstantní (derivace je rovna 0). Avšak obě funkce nabývají v bodě 0 hodnoty 0, je tedy tato konstantní funkce rovna také 0. Pro tvar svojí derivace je funkce arctg užitečná při hledání tzv. primitivních funkcí, s nimiž se setkáte v Kapitole 8.

Poznámka 6.6.18. Inverzní funkce k funkci cotg na intervalu $(0, \pi)$ se značí arccotg (čteme „arkus kotangens“) a není příliš zajímavá. Snadno si samostatně dokážete, že $\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ je spojitá, klesající funkce, pro kterou platí na $\mathbb{R}$

$$\operatorname{arccotg}'(x) = -1/(1 + x^2)\,.$$

Stejně snadno dokážete vztah

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \pi/2\,.$$

Poznámka 6.6.19. Snadno ověříme, že funkce sinh je rostoucí spojitá funkce na $\mathbb{R}$, která zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Existuje tedy opět inverzní funkce, která se značí argsinh. Její význam tkví ve vztahu k jiným funkcím; výpočtem její derivace a srovnáním s Příkladem 6.5.20 dostaneme totiž

$$(\operatorname{argsinh} x)' = (\log(x + \sqrt{x^2 - 1})' = 1/(\sqrt{x^2 - 1})\,,$$

pro další výklad však stačí si zapamatovat pouze ekvivalentní vyjádření funkce pomocí logaritmu, resp. přímo vzorec z Příkladu 6.5.20

$$\big(\log|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|\big)' = \big(\sqrt{x^2 \pm 1}\big)^{-1}\,.$$

Poznamenejme na závěr, že zavádění elementárních transcendentních funkcí na úrovni střední i vysoké školy je vždy složitým pedagogickým problémem, neboť je nutné je z různých důvodů zavádět zpravidla dříve, než je k dispozici potřebné teoretické zázemí; podrobněji viz [12]. Postup, který jsme zvolili, není nejkratší, používá však aparát, s nímž se vyspělejší středoškolák může seznámit. Jeho další předností je, že se lze odvolat na všechny vlastnosti goniometrických funkcí, známé ze střední školy, kde se odvozují vzorce právě z těch vztahů, které jsme užili v definici. Doporučujeme čtenáři, aby si samostatně sestavil např. tabulku derivací zavedených funkcí. Velmi důležité je i vytvoření vlastního systému a mnemotechnických pomůcek k zapamatování vzorců, neboť řadu vzorců je nutno umět zpaměti. Tak např. pro hodnoty funkce sin platí

$$\sin(0) = \sqrt{0/4}\,,\ \sin(\pi/6) = \sqrt{1/4}\,,\ \sin(\pi/4) = \sqrt{2/4}\,,\ \sin(\pi/3) = \sqrt{3/4}\,\ldots$$

což začátečníkům usnadní zapamatování.

Historické poznámky 6.6.20. Klasifikace a terminologie, kterou jsme uvedli (mocniny, polynomy, racionální funkce), pochází od Leonharda Eulera (1707 – 1783). Transcendentní funkce, které jsme zavedli, se objevily velmi dávno ve formě tabulek. U Claudia Ptolemaia (asi 100 – asi 178), který navázal na babylónská astronomická pozorování, nacházíme tabulky *délek tětiv* kružnice. Pokusme se stručně naznačit, co znamená zápis

$$\operatorname{tet} 36^\circ = 37^p\ 4'\ 55''\,.$$

V kružnici o poloměru r (načrtněte si obrázek) uvažujme tětivu AB příslušnou středovému úhlu $\measuredangle ASB = 2\alpha$; její délka $\operatorname{tet} 2\alpha$ vyjádřená „v šedesátinách poloměru r" je tedy

$$\left(37 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60 \cdot 60}\right) \cdot \frac{r}{60}\,.$$

Označme C střed tětivy AB. Pak, jak snadno nahlédneme, platí rovnosti

$$\sin\alpha = BC/BS = AB/2r = (\operatorname{tet} 2\alpha)/120\,,$$

takže tabulky délek tětiv byly v podstatě tabulkami goniometrických funkcí. Ptolemaios, jehož hlavní dílo *Syntaxis mathematica* je známější pod názvem arabského překladu *Almagest*, měl takové tabulky s krokem půl stupně pro rozmezí 0° – 180°. Je pravděpodobné, že vzorem jeho tabulek byly tabulky Hiparchovy (asi 180 – 125 před n. l.), které se však nezachovaly. Poznamenejme, že obecný význam periodicity funkcí si uvědomil patrně v celé šíři teprve Henri Poincaré (1854 – 1912), který ji též podrobněji studoval.

Již v úvodní kapitole jsme reprodukovali Archimedovy výpočty vedoucí k odhadům čísla π. Zde jen poznamenejme, že např. Euler udává na základě výpočtů, které provedli dříve jiní, π na více než 100 desetinných míst (s chybou na 113. místě). Vzorce, které jsme použili k definici goniometrických funkcí, tj. v podstatě součtové vzorce pro sin a cos, uvádějí již Ptolemaios cca v r. 150 a později také Johann Müller (Regiomontanus) (1436 – 1476). François Viète (1540 – 1603) znal již vzorce pro $\sin nx$. Termín *trigonometrie* pochází od Bartolomea Pitisca (1561 – 1613).

O vznik prvních logaritmických tabulek se zasloužili všestranně nadaný skotský šlechtic John Napier (1550 – 1617), švýcarský jemný mechanik, hodinář a výpočtář Jost Bürgi (1552 – 1632) a anglický matematik Henry Briggs (1561 – 1630), mezi zmíněnými jediný „profesionál". Jejich idea usnadnění výpočtů se však objevovala již dříve. Tak např. počtář Paul Wittich (? – ?), který pracoval v r. 1582 na Hvaru, si práci na výpočtech pro dánského astronoma TYCHO DE BRAHE (1546 – 1601) usnadňoval při násobení užíváním vzorečku

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] .$$

Připomeňme si, že Tycho de Brahe je pohřben v Praze v Týnském chrámu [7]). Bürgi prováděl složité astronomické výpočty pro JOHANNA KEPLERA (1572 – 1630). Bürgiho tabulky byly publikovány r. 1620. To vše se odehrávalo v době krátce před objevem prvního (mechanického) počítacího stroje, který navrhl a skutečně i zkonstruoval r. 1642 BLAISE PASCAL (1623 – 1662).

Musíme se ještě podrobněji zmínit o Keplerovi, který přišel r. 1600 do Prahy a stal se po smrti Tycho de Brahe dvorním hvězdářem Rudolfa II. Kepler používal Napierovy tabulky od r. 1614; velmi mu usnadnily numerické výpočty. Kepler později sám vydal jiné logaritmické tabulky r. 1624, zpočátku patrně silně závislé na Napierových (srv. [5]). I když Kepler učinil v Praze mnoho objevů, po smrti Rudolfově r. 1612 odešel, patrně z náboženských důvodů, z Prahy do Lince. Mnoho dalších informací o historii logaritmů lze nalézt např. v [5] a také v [11].

Našemu přístupu předcházely jiné způsoby zavedení elementárních funkcí, které se objevily např. již v pracích ISAACA NEWTONA (1642 – 1727). Exponenciálu jsme zavedli kombinací způsobů, které mají kořen v postupech Eulera a LOUISE AUGUSTINA CAUCHYHO (1789 – 1857). FLORIMON DEBEAUNE (1601 – 1652) zformuloval geometricky již v r. 1638 úlohu o křivce, jejíž tečna v libovolném bodě má směrnici rovnou hodnotě funkce v tomto bodě. Přestože úloha vzbudila zájem předních soudobých matematiků, teprve GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716) navrhl její řešení.

Euler se zabýval úlohami typu *Jestliže velikost populace v jisté oblasti vzrůstá ročně o jednu třicetinu a činí v určitém roce 100000 obyvatel, jaká bude její velikost po 100 letech* (tato je z práce z r. 1778), které ho dovedly až ke zkoumání výrazů tvaru

$$(1+\omega)^N ,$$

kde ω je malé a N velmi veliké (kladné) číslo. Srovnejte s ukázkou z Poznámky 3.2.9.

Jak Newton (1669), tak i Leibniz (1676) znali rozvoj exponenciály v mocninnou řadu (viz dále); zdá se, že i termín *exponenciální* zavedl Leibniz. Užití *funkcionálních rovnic* pochází z Cauchyho již mnohokrát citované práce [2] z r. 1821. Za zmínku stojí fakt, že aditivní funkce jsou při splnění mnohem slabších podmínek, než jsme výše uvedli, lineární a tedy „velice pěkné“. Pokud tento případ nenastává, jsou naopak „velmi ošklivé“. Historicky první funkcionální rovnicí tvaru

$$f(x+y) - f(x-y) = g(x)h(y)$$

se zabýval kolem roku 1750 JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717 – 1783) v souvislosti s vyšetřováním chvění strun. Napsal o funkcionálních rovnicích tři práce, z nichž poslední byla věnována skládání sil. Z jednoduchých, fyzikálně velmi přirozených požadavků, odvodil „rovnoběžníkové pravidlo“ pro skládání sil. Pokud se chcete seznámit s úvahami tohoto typu, naleznete je např. v [4], str. 33. Pro velikosti sil a úhly mezi jejich směry dospěl k rovnici tvaru

$$f(x+y) = f(x) + f(y) , \quad x, y \in \mathbb{R} ,$$

[7]) Jak Brahe tak i Bürgi žili v Praze, Brahe od roku 1599 do smrti r. 1601 a Bürgi v letech 1603 – 1622.

což je, jak již bylo řečeno, jedna Cauchyho funkcionální rovnice (někdy se tímto názvem označuje právě tato rovnice), a k rovnici

$$g(\alpha+\beta)+g(\alpha-\beta)=2g(\alpha)g(\beta)\,,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\,.$$

Této rovnici se dnes zpravidla říká d'Alembertova funkcionální rovnice. Obě tyto rovnice a také další, kterými jsme se v této kapitole zabývali, studoval později systematicky Cauchy. Jean Gaston Darboux (1842 – 1917), který byl od r. 1900 sekretářem francouzské akademie, dokázal již r. 1880 následující tvrzení: *Každá aditivní funkce, která je nezáporná* (*resp. nekladná*) *pro všechna* (*dostatečně malá*) $x>0$*, je již lineární, tj.* $f(x)=ax$ *pro jisté* a.

Po delší dobu však nebylo jasné, zda nějaké nespojité aditivní funkce vůbec existují. Že tento případ opravdu nastává, dokázal Georg Carl Wilhelm Hamel (1877 – 1954) až v r. 1905. Rovnici pro aditivní funkce elegantním způsobem zobecnil Jan Vilém Pexider (1874 – 1914). Řešil rovnici s více neznámými funkcemi tvaru

$$f(x+y)=g(x)+h(y)\,,\qquad x,y\in\mathbb{R}\,;$$

podobně se dají modifikovat i ostatní Cauchyho rovnice. Funkcionální rovnice jsou jednou z možných partií, které lze probírat v zájmových rozšířeních standardní výuky matematiky. Jak jsme ukázali, jsou funkcionální rovnice *i na této úrovni velmi užitečné.* Viz též [4].

Vztah funkcí a jim „podobných" řad byl patrně ve své názorné podobě znám poměrně dlouho; ukázali jsme si to pro případ hyperboly popsané funkcí $f(x)=1/x$ a harmonické řady. Později se k tomuto vztahu vrátíme. Poznamenejme, že již r. 1647 dokázal exhaustivní metodou jezuita Gregorius a Santo Vincentio (1584 – 1667), že plocha pod grafem větve rovnoosé hyperboly má charakteristickou vlastnost logaritmů; souvislosti s logaritmem si však povšiml teprve o dva roky později jeho žák Alfons Anton de Sarasa (1618 – 1667)). Označíme-li symbolem $J_{a,b}$ pro $0<a<b$ obsah obrazce omezeného přímkami a křivkou o rovnicích $y=0$, $x=a$, $x=b$ a $xy=1$, $x\in(0,\infty)$, platí pro všechna $t>0$

$$J_{a,b}=J_{ta,tb}\,;$$

odtud dostáváme pro $x,y\in(0,\infty)$

$$J_{1,xy}=J_{1,x}+J_{1,y}\,.$$

Pro $f(x)=J_{1,x}$ tak dostaneme funkcionální rovnici

$$f(xy)=f(x)+f(y)\,,\qquad x,y\in(0,\infty)\,.$$

Není to tak obtížné, čtenář se o tom může přesvědčit nahlédnutím do [8]. Vzorec, který objevil Nicolaus Kaufmann (Mercator) (1620 – 1687) v r. 1668 a který my odvodíme později, dává souvislost logaritmu a řady:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots\,.$$

Poznamenejme, že existenci integrálu k funkci $(1+x)^{-1}$, resp. funkce k této funkci primitivní, není obtížné dokázat (integruje se *monotónní* spojitá funkce, nepotřebujeme tedy hlubší větu o stejnoměrné spojitosti); viz ještě dále. Tudy vede cesta k zavedení logaritmu pomocí primitivní funkce. Tento přístup, který velice propagoval Felix Klein (1849 – 1925), byl populární v šedesátých letech tohoto století i u nás, ovšem na vysokoškolské úrovni; viz [9]. V nejschůdnější formě přes „plochu pod grafem" je pracný, ale zvládnutelný dokonce i na úrovni střední školy; srovnej s [8].

Cesta k elementárním goniometrickým funkcím by byla nejschůdnější prostřednictvím exponenciální funkce, avšak *v komplexním oboru* přes Eulerovy vzorce. Tento přístup prakticky nelze studentům na úrovni střední školy přiblížit, proto jsme zvolili jinou cestu. Jejím nedostatkem je fakt, že se k existenci a jednoznačnosti dostaneme později, předností je soulad s látkou střední školy. Tak odpadá zdlouhavé odvozování vzorců, jejichž znalost si studenti přinesou na vysokou školu. K zavedení goniometrických funkcí pomocí exponenciály se dostaneme v Kapitole 8.

Hyperbolické funkce zavedl r. 1757 Vincencio Ricatti (1707 – 1775), jejich standardní značení pochází od Johanna Heinricha Lamberta (1728 – 1777). Jejich první tabulky se objevily r. 1890. Grafem funkce cosh je křivka, která se nazývá *řetězovka*.

Vyšetření souvislosti logaritmu s harmonickou řadou provedl Euler, který r. 1734 ukázal, že konverguje posloupnost o členech

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\,.$$

Její limitu nazýváme na jeho počest *Eulerovou konstantou*. Její hodnotu určil Euler na 15 desetinných míst: $\gamma = 0.577215664901532$. Protože ji později Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800) spočetl na 32 desetinných míst (pouze 19 však bylo správně spočteno), užívá se často název *Euler-Mascheroniova konstanta*. Dodnes se *neví*, zda je γ racionální nebo iracionální číslo. Za zmínku stojí i velmi efektivní výpočty hodnoty γ, které provedl autor programu TEX Donald Knuth (1938 –). Poznamenejme, že TEX je nejdokonalejší program pro sazbu složitých, zejména matematických textů.

Později se setkáme s další „elementární" funkcí. Máme sice již prostředky k jejímu zavedení, ale ne k jejímu podrobnějšímu vyšetření. Je to funkce, splňující funkcionální rovnici

$$f(x+1) = xf(x)\,, \quad x \in (0, +\infty)\,,$$

podmínku $f(1) = 1$ a pro kterou $\log(f)$ má na intervalu $(0, +\infty)$ kladnou derivaci. Tato funkce se značí symbolem Γ, sejdeme se však s ní až ve druhém díle tohoto textu.

Literatura:

[1] Barner, M., Flohr, F.: *Analysis I*, Walter de Gruyter, Berlin, 1987.

[2] Cauchy, L. A.: *Course d'analyse de l'École Royal Polytechnique*, Paris, 1821.

[3] Černý, I.: *Matematická analýza, 1. část*, Technická univerzita Liberec, Liberec, 1995, (existují tři části).

[4] Davidov, L.: *Funkcionální rovnice*, Mladá fronta, Praha, 1984, (vydal ÚV Matematické olympiády).

[5] Goldstine, H. H.: *A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century*, Springer, New York, 1977.

[6] Jarník, V.: *Diferenciální počet I*, Academia, Nakladatelství ČSAV, Praha, 199x. (kniha vyšla ve více vydáních).

[7] Kannapan, P.: *Trigonometric identities and functional equations*, The Mathematical Gazete **88** (2004), str. 249 – 257.

[8] Klambauer, G.: *Aspects of Calculus*, Springer, Berlin, 1986.

[9] Klein, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, Springer, Berlin, 1908.

[10] Studnička, F. J.: *Základové vyšší mathematiky, D 1: O počtu differenciálním*, Nákladem spisovatelovým, Praha, 1868.

[11] Tropfke, J.: *Geschichte der Elementar-Mathematik I. - IV.*, Walter de Gruyter, Berlin, 1930, (3. vydání).

[12] Veselý, J.: *Existuje královská cesta k exponenciále a logaritmu ?*, Učitel matematiky **4**/2 (18) str. 65 – 80, **4**/3 (19) str. 129 – 145, JČMF, Praha, 1996.

Kapitola 7

Užití derivací

7.1 Některé doplňky

Začneme jedním užitečným lemmatem pro výpočet *jednostranných* derivací. Ukážeme si na příkladě, že situace může být dosti složitá a pak se pokusíme vypozorovat určité zákonitosti.

Poznámka 7.1.1. Odvodili jsme vzoreček

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,, \quad y \in (-1,1)\,,$$

a konstatovali, že v krajních bodech definičního oboru jsou obě jednostranné derivace rovny $+\infty$, tj.

$$\arcsin'_+(-1) = \arcsin'_-(1) = +\infty\,.$$

Platí tedy

$$\lim_{y\to 1_-} \arcsin'(y) = \arcsin'_-(1)\,.$$

Jde o náhodu nebo o hlubší zákonitost? Začátečníkům se často nedaří představit si funkci, která má všude vlastní derivaci, ale $x \mapsto f'(x)$ není spojitá. Definujme

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2)\,, & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

Pak platí

$$f'(x) = 2x\sin(1/x^2) - (2/x)\cos(1/x^2)\,, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

Derivaci $f'(0)$ určíme podle definice. Je

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin(1/h^2) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin(1/h^2) = 0\,,$$

kde jsme v posledním případě použili výsledku z Poznámky 4.4.5 o limitě součinu omezené funkce a funkce s nulovou limitou. Funkce f' definovaná na $\mathbb{R}$ není v bodě 0 spojitá; platí dokonce více: na žádném okolí bodu 0 není omezená a pro každý interval (a,b) obsahující bod 0 platí $f'((a,b)) = \mathbb{R}$.

Přesto (pro někoho možná překvapivě) není ještě vše ztraceno; platí totiž následující tvrzení:

Věta 7.1.2. *Nechť funkce f je zprava spojitá v bodě a a nechť pro nějaké $\varepsilon > 0$ existuje* vlastní *$f'(x)$ pro všechna $x \in (a, a+\varepsilon)$. Nechť dále existuje*

$$\lim_{x\to a_+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*\,.$$

Potom též existuje $f'_+(a)$ a je rovna A.

Důkaz. Pro každé $x \in (a, a+\varepsilon)$ lze na interval $[\,a, x\,]$ aplikovat Lagrangeovu větu o střední hodnotě, neboť f je na tomto intervalu spojitá a derivace funkce f existuje všude v (a,x). Pro každé takové x získáme $\xi_x \in (a,x)$, pro něž platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi_x)\,.$$

Položme $\xi(x) := \xi_x$, $x \in (a, a+\varepsilon)$. Zřejmě platí $\lim \xi(x) = a$ pro $x \to a_+$. Proto též platí

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a_+} f'(\xi(x)) = \lim_{y\to a_+} f'(y)\,,$$

neboť existence poslední limity se předpokládá. □

Poznámky 7.1.3. 1. Analogická věta platí i pro derivaci zleva; jako cvičení si ji dokažte. Význam věty spočívá v tom, že velmi často je pohodlnější spočítat limitu derivací než např. podle definice příslušnou jednostrannou derivaci. V jistém smyslu jsme odstranili kaz ve vyšetřování derivací funkcí arcsin a arccos v krajních bodech jejich definičních oborů (užili jsme Poznámku 6.4.6, jejíž důkaz jsme přenechali čtenáři).

2. Jednostranné derivace funkce $f(x) = |\,x^2 - 4x + 3\,|$ v bodech 1 a 3 jsou „vidět"; platí $f'(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4x + 3)(2x - 4)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$, takže podle Věty 7.1.2 dostaneme $f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} 1 \cdot (2x - 4) = -2$, a dále podobně

$$f'_+(1) = 2\,, \quad f'_-(3) = -2\,, \quad f'_+(3) = 2\,.$$

3. Funkce $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$ rozšířená spojitě hodnotou $g(0) = 0$ na $\mathbb{R}$, kterou jsme uvedli výše, *má* v bodě 0 derivaci, ale jednostranné limity derivace v bodě 0 neexistují. Jednostranné limity derivace funkce sgn v bodě 0 jsou obě rovny nule, avšak $\operatorname{sgn}'(0) = \infty$. V obou případech však nejsou splněny předpoklady Věty 7.1.2.

V Kapitole 5 o derivování jsme slíbili uvést později některé složitější příklady na použití l'Hospitalova pravidla; dříve, než tak učiníme, vyslovíme modifikaci l'Hospitalova pravidla pro vícenásobné použití.

Důsledek 7.1.4 (důsledek Věty 5.2.28). *Nechť f, g mají vlastní derivace až do řádu n-tého všude v (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$, $g^{(k)}(x) \neq 0$ všude v (a,b) pro všechna $k = 0, 1, \dots, n$ a*

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = A \in \mathbb{R}^* . \tag{7.1}$$

Je-li dále splněn jeden z předpokladů

(1) $f^{(k)}(x) \to 0$, $g^{(k)}(x) \to 0$ *pro* $x \to a_+$ *a všechna* $k = 0, 1, \dots, n-1$, *nebo*

(2) $|g^{(k)}(x)| \to +\infty$ *pro* $x \to a_+$ *a všechna* $k = 0, 1, \dots, n-1$,

pak platí pro všechna $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$\lim_{x\to a_+} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)} = A . \tag{7.2}$$

Totéž platí (po příslušné modifikaci tvrzení) pro $x \to b_-$, resp. $x_0 \in (a,b)$.

Příklady 7.1.5. 1. Užitím l'Hospitalova pravidla snadno dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{1} = +\infty .$$

První znamení rovnosti je zdůvodněno l'Hospitalovým pravidlem, avšak teprve až víme, že platí druhá rovnost, tj. $\lim_{x\to\infty}((\exp x)/1) = \infty$; první rovnost píšeme „podmíněně", neboť o její platnosti se rozhodne až po provedení výpočtu. Zápis se přesto provádí shora uvedeným způsobem. Pomocí l'Hospitalova pravidla analogicky snadno porovnáme v bodě $+\infty$ růst funkcí a^x, x^a, $\log x$, x^n atp.

2. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí podle Důsledku 7.1.4 [1])

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{nx^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{\exp x}{n!} = \infty .$$

Všechny rovnosti jsou však zdůvodněny teprve po ověření platnosti poslední z nich, tj. po dokončení výpočtu. Nesmíme zapomenout postupně stále ověřovat, že jde o výpočet limit, na něž lze pravidlo aplikovat; v tomto případě to znamená si uvědomit, že jde stále o typ „∞/∞".

3. Podobně dostaneme

$$\lim_{x\to 0_+} x\log x = \lim_{x\to 0_+} \frac{\log x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = 0 ;$$

pro výpočet jsme upravili součin typu „$0\cdot(-\infty)$" na podíl typu „$(-\infty)/\infty$".

[1]) Zpravidla říkáme jen „Podle l'Hospitalova pravidla . . . ", i když používáme tento důsledek.

4. Užitím Důsledku 7.1.4 dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}\,.$$

Pokud bychom se snažili spočítat tuto limitu např. jen pomocí základní limity $(\sin x)/x \to 1$ pro $x \to 0$, narazili bychom na velké obtíže.

5. Platí zřejmě

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x - x}{\sin x + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sin x)/x - 1}{(\sin x)/x + 1} = -1\,;$$

zlomek je typu „∞/∞“, avšak limita podílu derivací

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}$$

neexistuje, neboť jmenovatel zlomku se anuluje v každém okolí bodu $+\infty$. Proto nelze l'Hospitalovo pravidlo k výpočtu limity použít.

6. Podobně se lehce ukáže, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(x^{-1})}{\sin x} = 0\,,$$

avšak

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x \sin(x^{-1}) - \cos(x^{-1})}{\cos x}$$

neexistuje, i když tentokrát je funkce za znamením lim definována v nějakém prstencovém okolí bodu 0. Poznamenejme, že l'Hospitalovo pravidlo je užitečné i při použití na značně složitější příklady (např. typu „1^∞“, „$(\infty)^0$“ apod.). My si ukážeme jen jednodušší příklady tohoto typu.

7. Platí $A := \lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = \lim_{x\to\infty} \exp(x \log(1+1/x))$; touto úpravou jsme převedli výpočet limity typu „1^∞“ na výpočet limity „$0\cdot\infty$“. Dalšími úpravami dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} x \log(1 + 1/x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(1 + 1/x)}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1 + 1/x)^{-1}(-1/x^2)}{-1/x^2} = 1\,.$$

Proto platí $A = \exp(1) = \mathrm{e}$. Zde však nemusíme užít l'Hospitalova pravidla, neboť je (kroky podrobně zdůvodněte)

$$\lim_{x\to\infty} (1 + 1/x)^x = \lim_{t\to 0+} (1 + t)^{(1/t)} = \lim_{t\to 0+} \exp\left(\frac{\log(1 + t)}{t}\right) = \cdots = \mathrm{e}\,.$$

8. V souvislosti s předcházejícím příkladem nás může zajímat i limita funkce $(1+x)^{1/x}$ pro $x \to \infty$. Jde o limitu typu „∞^0“, jejíž výpočet snadno převedeme na výpočet limity typu „∞/∞“

$$\lim_{x\to\infty} (1+x)^{1/x} = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+x)}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x}\right) = 1\,.$$

Při důkazu předposlední rovnosti jsme opět užili l'Hospitalovo pravidlo. Čtenář by si měl tuto látku procvičit na dalších příkladech.

Dále se v této kapitole budeme věnovat vyšetřování vlastností funkcí pomocí derivování; budeme již pracovat s derivacemi vyšších řádů.

7.2 Konvexní funkce

Jedním z velmi důležitých pojmů v matematice je pojem *konvexity.* Tím se nyní budeme v souvislosti se studiem funkcí zabývat.

Definice 7.2.1. Nechť X je libovolný lineární prostor. Je-li $z = \alpha x + (1-\alpha)y$, kde $0 \le \alpha \le 1$ a $x, y \in X$, pak říkáme, že z je *konvexní kombinací* bodů x, y. Jsou-li x, y dva *různé* body lineárního prostoru X, definujeme *úsečku o koncových bodech x, y* jako množinu

$$\{z \in X; z = \alpha x + (1-\alpha)y\,,\ 0 \le \alpha \le 1\}\,.$$

Množina M v lineárním prostoru X je *konvexní množina*, jestliže s každými dvěma body $x, y \in M$ obsahuje i celou úsečku o koncových bodech x, y.

Definice 7.2.2. Funkce f definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je *konvexní* na I, jestliže pro každé dva body $x_1, x_2 \in I$ a každé $\alpha \in (0,1)$ platí

$$f(\alpha\, x_1 + (1-\alpha)\, x_2) \le \alpha\, f(x_1) + (1-\alpha)\, f(x_2)\,. \tag{7.3}$$

V případě, že v nerovnosti (7.3) pracujeme s „$\ge$“ místo s „$\le$“, dostáváme definici funkce konkávní na I [2]). Nahradíme-li relaci „$\le$“ v (7.3) relacemi „$<$“ nebo „$>$“, dostaneme definice funkce *ryze konvexní* nebo *ryze konkávní* na I.

Poznámka 7.2.3. Položíme-li $x := \alpha\, x_1 + (1-\alpha)\, x_2$, pak je podmínka (7.3) ekvivalentní s podmínkou

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)\,.$$

Jednoduchá geometrická interpretace této podmínky říká, že sečna grafu funkce f procházející body $[\,x_1, f(x_1)\,]$ a $[\,x_2, f(x_2)\,]$, $x_1 \ne x_2$, leží „mezi body“ x_1 a x_2

[2]) Zřejmě je funkce f konkávní na I, právě když je funkce $-f$ konvexní na I.

nad grafem nebo na grafu funkce f. Následující věta obsahuje v (7.4) nerovnosti mezi směrnicemi tří takových sečen.

Věta 7.2.4. *Funkce f je konvexní na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, právě když pro body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, platí kterákoli ze tří nerovností* [3])

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}\,. \tag{7.4}$$

Důkaz. Nechť f je konvexní. Zvolíme-li body $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, pak platí

$$x_2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} x_3\,,$$

a tedy

$$f(x_2) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\, f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\, f(x_3)\,, \tag{7.5}$$

což po jednoduchých úpravách dává nerovnosti (7.4); viz následující Příklad 7.2.5. Nechť jsou nyní zvoleny libovolně body $x, y \in I$, $x < y$, $\alpha \in [\,0,1\,]$ a nechť platí pro každou volbu $x_1 < x_2 < x_3$ jedna ze *tří* nerovností z (7.4), např. nerovnost

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}\,. \tag{7.6}$$

Násobením nerovnosti (7.6) faktorem $(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$ a úpravou dostaneme

$$f(x_2)(x_3 - x_1) \le (x_3 - x_2)\, f(x_1) + (x_2 - x_1)\, f(x_3)\,.$$

Zvolíme-li nyní $\alpha = (x_3 - x_2)/(x_3 - x_1)$, dostaneme snadno přímým výpočtem $(x_2 - x_1)/(x_3 - x_1) = 1 - \alpha$, a po dosazení x za x_1 a y za x_3 dostaneme (7.3), protože $x_2 = \alpha x + (1 - \alpha) y$. V případech dalších dvou „výchozích nerovností“ ze (7.4) je výpočet analogický. □

Příklad 7.2.5. Z nerovnosti (7.5) dostaneme násobením obou jejích stran faktorem $(x_3 - x_1)$ a převedením všech členů na pravou stranu nerovnost

$$0 \le (x_3 - x_2) f(x_1) - (x_3 - x_1) f(x_2) + (x_2 - x_1) f(x_3)\,.$$

(Všimněte si souvislosti výrazu na pravé straně nerovnosti s obsahem trojúhelníku omezeného uvažovanými sečnami.) Rozepsáním $x_3 - x_2 = (x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)$ a jednoduchou úpravou dostaneme

$$0 \le (x_3 - x_1)(f(x_1) - f(x_2)) + (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_1))\,,$$

a posléze i první z nerovností v (7.4). Druhá se dokáže obdobnou úpravou a třetí z obou vyplyne, avšak my jsme ji již dokázali.

[3]) Třetí nerovnost je nerovnost mezi oběma krajními členy v (7.4).

Poznámky 7.2.6. 1. Každá z nerovností v (7.4), pokud je splněna pro každou trojici bodů $x_1, x_2, x_3 \in I$, $x_1 < x_2 < x_3$, charakterizuje konvexitu funkce f na intervalu I. Doporučujeme čtenáři, aby si načrtl obrázek a uvědomil si geometrický význam nerovností (7.4), které porovnávají *směrnice sečen* grafu konvexní funkce.

2. Pokud intuitivně zavedeme „nadgraf“ funkce f definované a konvexní na (a, b), pak f je konvexní funkce, právě když je „nadgraf“ f konvexní množina; opět je užitečné si načrtnout obrázek.

Příklad 7.2.7. Je zřejmé, že například funkce $f : [\,0, 1\,] \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in (0,1)\,, \\ 1\,, & x \in \{0,1\}\,, \end{cases}$$

je konvexní, ale není spojitá v bodech 0 a 1, což jsou krajní body jejího definičního oboru. Všude v intervalu $(0, 1)$ však spojitá je. Dokážeme, že poslední vlastnost je důsledkem konvexity f.

Lemma 7.2.8. *Nechť funkce f je konvexní na* otevřeném *intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom platí:*

(1) *jednostranné derivace $f'_+(x)$ a $f'_-(x)$ existují pro každé $x \in I$ a jsou to neklesající funkce na I;*

(2) *platí $f'_- \le f'_+$ na I;*

(3) *funkce f je spojitá a má v I vlastní derivaci všude až na spočetnou množinu.*

Důkaz. Volme bod $x \in I$. Zřejmě funkce, definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu 0 vztahem

$$\varphi(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,,$$

je podle (7.4) neklesající na pravém i levém okolí bodu 0. Existují proto limity

$$\lim_{h \to 0+} \varphi(h) = f'_+(x)\,, \qquad \lim_{h \to 0-} \varphi(h) = f'_-(x)\,.$$

Pro $h > 0$ plyne porovnáním prvního a třetího výrazu ve vztahu (7.4) a dosazením $x_1 = x - h$, $x_2 = x$, $x_3 = x + h$, nerovnost

$$\frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \le \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,,$$

z níž plyne nerovnost limitním přechodem pro $h \to 0+$ nerovnost $f'_- \le f'_+$ na I. Pokud přecházíme k limitě jen na jedné straně nerovnosti, dostáváme též konečnost $f'_-(x)$, $f'_+(x)$ pro všechna $x \in I$. Pro $x, y \in I$, $x < y$, snadno dostaneme

$$f'_+(x) \le \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le \lim_{t \to y_+} \frac{f(t) - f(y)}{t - y} = f'_+(y),$$

takže f'_+ je neklesající na I; obdobně se dokáže, že i f'_- je neklesající na I. Tím jsme dokázali (1) a (2). Z konečnosti jednostranných derivací $f'_-(x)$ a $f'_+(x)$ dostaneme jako ve Cvičení 5.2.2 spojitost f v bodě x pro každé $x \in I$. Konečně (3) plyne užitím Tvrzení 4.3.43 na f'_+. $\square$

Poznámka 7.2.9. Pokud není $I \subset \mathbb{R}$ otevřený, pak ukazuje Příklad 7.2.7, že funkce f konvexní na I může být nespojitá v krajních bodech intervalu I. Vzhledem k této možné nespojitosti funkce f konvexní na uzavřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ se velmi často pracuje s konvexními funkcemi pouze *na otevřených intervalech.*

Nevýhodou předcházejícího důkazu spojitosti funkce f konvexní na intervalu (a, b) je, že ho nelze „přenést“ na případ funkcí více proměnných. V další části budeme pracovat s tzv. Lipschitzovou podmínkou, která je v této souvislosti velmi užitečná.

Definice 7.2.10. Budeme říkat, že funkce f splňuje na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ *Lipschitzovu podmínku,* jestliže existuje takové $K \in (0, \infty)$, že pro všechna $x, y \in I$ platí

$$|f(x) - f(y)| \le K|x - y|\,.$$

Zkráceně pak říkáme, že f je *lipschitzovská* na I. Pokud f je lipschitzovská v okolí každého bodu $x \in I$, pak říkáme, že f je *lokálně lipschitzovská* na I.

Lemma 7.2.11. *Funkce f konvexní na intervalu I je lokálně lipschitzovská na I (a tedy spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I).*

Důkaz. Zvolme v I libovolně body $a < x < y < b$. Podle (7.4) platí

$$L := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le \frac{f(b) - f(y)}{b - y} =: M\,,$$

takže absolutní hodnota $|f(y) - f(x)| \,/\, |y - x|$ je omezená na (a, b) a f je tudíž spojitá v každém vnitřním bodě I. $\square$

Lemma 7.2.12. *Nechť funkce f má všude v (a, b) vlastní derivaci. Potom f je konvexní, právě když je funkce f' neklesající.*

Důkaz. Pokud existuje $f'(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$, je $f'(x) = f'_+(x)$ a f' je tedy neklesající podle Lemmatu 7.2.8, bod (1). Druhou (častěji užívanou) implikaci dokážeme takto: nechť je f' neklesající na (a, b). Zvolme libovolně $x_1 < x_2 < x_3$ v intervalu (a, b). Pak platí podle Lagrangeovy věty

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)\,, \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\eta) \tag{7.7}$$

a $x_1 < \xi < x_2 < \eta < x_3$. Protože je f' neklesající, platí $f'(\xi) \le f'(\eta)$. Zbytek vyplývá z Věty 7.2.4, čímž je důkaz dokončen. $\square$

Lemma 7.2.13. *Nechť funkce f má všude v (a, b) vlastní druhou derivaci. Potom f je konvexní, právě když na (a, b) platí $f'' \ge 0$.*

Důkaz. Je-li $f'' \geq 0$, pak je f' podle Věty 5.2.22 neklesající a f je konvexní podle předcházejícího lemmatu. Jestliže existuje bod $x \in (a,b)$ takový, že $f''(x) < 0$, pak je $[\,x-\delta, x+\delta\,] \subset (a,b)$ a $f'(x-h) > f'(x) > f'(x+h)$ pro nějaké $\delta > 0$ a všechna $h \in (0,\delta)$. Zvolíme-li nyní $x_1 = x-\delta$, $x_2 = x$, $x_3 = x+\delta$, dostaneme z Věty 5.2.18 o střední hodnotě pro nějaká $\zeta_1 \in (x-\delta, x)$ a $\zeta_2 \in (x, x+\delta)$ nerovnost

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f(\zeta_1) > f(\zeta_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\,,$$

takže f *není* konvexní na $[\,a,b\,]$ a ekvivalence obou podmínek je dokázána. □

Poznámka 7.2.14. I když se to může zdát zbytečné, výslovně čtenáře upozorňuji na některé detaily: konvexní funkce f *nemusí být spojitá* (Poznámka 7.2.9), *nemusí mít* v některých bodech *derivaci* (takové body mohou existovat v každém otevřeném intervalu I ležícím v definičním oboru D_f) a její *druhá derivace* f'' *nemusí být definována.* Proto pokusy o *definici* konvexní funkce f pomocí druhé či první derivace funkce f nemohou v obecném případě „fungovat“.

Definice 7.2.15. Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in (a,b)$ derivaci (vlastní či nevlastní, ale *oboustrannou*) a je v tomto bodě spojitá. Nechť dále existuje $\delta > 0$ tak, že platí

(1) funkce f je v levém okolí $(x_0-\delta, x_0)$ bodu x_0 ryze konkávní a v pravém okolí $(x_0, x_0+\delta)$ bodu x_0 ryze konvexní (viz Definice 7.2.2), nebo

(2) funkce f je v levém okolí $(x_0-\delta, x_0)$ bodu x_0 ryze konvexní a v pravém okolí $(x_0, x_0+\delta)$ bodu x_0 ryze konkávní.

Potom říkáme, že bod x_0 je *inflexním bodem* funkce f.

Poznámka 7.2.16. Z předcházející definice vyplývá, že „podezřelými“ body při hledání inflexních bodů f jsou nulové body f''. Inflexe ovšem nastane v případě, že v takovém nulovém bodě „mění f'' znaménko“. Srovnejte případ mocnin x^3 a x^4 v počátku: prvá má v tomto bodě inflexní bod, druhá nikoli.

Je-li funkce f definována v okolí $\mathcal{U}(+\infty)$, resp. $\mathcal{U}(-\infty)$, pak se může na nich chovat podobně jako lineární funkce $l(x) = ax+b$ (vágně řečeno, graf f „se blíží“ grafu l). To je někdy užitečné vědět, musíme však naši úvahu zpřesnit.

Definice 7.2.17. Říkáme, že přímka o rovnici $y = ax+b$ je *asymptotou* grafu funkce f v bodě $+\infty$, platí-li současně

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big) = 0\,, \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = a\,.$$

Platí-li současně

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big) = 0\,, \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to-\infty} f'(x) = a\,,$$

je přímka o rovnici $y = ax+b$ *asymptotou* grafu funkce f v bodě $-\infty$.

Příklad 7.2.18. Přímka o rovnici $y = 0$ je asymptotou grafu funkce $f(x) = 1/x$ v bodech $-\infty$ i $+\infty$, což je zřejmé. Jestliže je

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x + 1}\,,$$

pak $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}((2x^2 + 4x - 3)/(x + 1)^2) = 2$. Dále je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 + 3}{x + 1} - (2x + b) = b - 2\,,$$

takže tato limita je rovna 0 pro $b = 2$. Proto je asymptotou grafu f v $+\infty$ přímka o rovnici $y = 2x + 2$. Velmi podobně se chová f v okolí bodu -1, kde se „graf f blíží k přímce o rovnici $x = -1$“; avšak tato přímka není grafem funkce „v proměnné x“.

7.3 Průběh funkce

Jednou z rozšířených licencí je úloha *určit průběh funkce*, často formulovaná i ve znění *určit graf funkce*. Tato úloha žádá nalézt odpovědi na zvykově určené otázky, které souvisejí se znázorněním grafu funkce (to je, jak již víme, množina, která plně funkci určuje a která se často jako *definice funkce* užívá). Schématický náčrtek je pak podstatnou částí výsledku, neboť se velmi lehce kontroluje. Co vše k vyšetření průběhu funkce patří, nelze chápat dogmaticky, v základních otázkách však panuje obecná shoda. Uveďme popis jednotlivých kroků formou poznámek.

Poznámky 7.3.1. 1. Funkce je většinou určena vzorcem a tak prvním úkolem bývá určit *definiční obor* vyšetřované funkce (označme ji f). Někdy je tato množina přímo součástí zadání, jindy D_f určujeme v souladu s úmluvou jako maximální podmnožinu $\mathbb{R}$, na níž má vzorec smysl. Funkce může být i popsána slovně, nebo i několika vzorci, které popisují funkci v částech definičního oboru, případně jako limita nebo součet řady apod.

2. Důležité bývá i povšimnutí, kde funkce nabývá „významných“ hodnot (průsečíky se souřadnými osami apod.), zda je její graf symetrický (sudé a liché funkce) nebo rozložitelný na shodné části (periodicita).

3. Další přirozenou otázkou je vyšetření spojitosti zkoumané funkce v D_f a jejích případných limit ve vybraných („krajních“) bodech, tj. těch bodech mimo definiční obor, v jejichž nějakém (levém, pravém či symetrickém) prstencovém okolí je funkce definována.

4. Pak zpravidla zkoumáme derivaci f' funkce f všude, kde je to možné, tj. určíme ty body x, kde je $f'(x)$ vlastní, ale i ty, kde je nevlastní nebo v nichž existují pouze obě, nebo jedna z jednostranných derivací. Často nevystačíme jen se vzorci pro derivování a počítáme např. na základě definice derivace, nebo pomocí věty o limitě derivace a jednostranné derivaci.

5. Potom obvykle hledáme dle možnosti *maximální* intervaly, na kterých je funkce monotónní. To jsou ty intervaly, které nejsou vlastní podmnožinou nějakého „většího“ intervalu, na kterém by byla f ještě monotónní. Používáme k tomu jak definice monotonie, tak i vět o souvislosti derivace a monotonie spojité funkce.

6. V souvislosti s určením oboru hodnot H_f určujeme též extrémy funkce f ($\sup f$ a $\inf f$) a zkoumáme, zda jich funkce nabývá. Je užitečné znát body, kde se nabývá maxima či minima (někdy nás mohou zajímat i body, kde se nabývá extrémů vzhledem k nějakému okolí, tedy tzv. *lokální extrémy*. Rozhodujeme o nich jak z monotonie, tak vyšetřováním nulových bodů derivace, případně z informací plynoucích z chování vyšších derivací.

7. Vyšetřujeme též, zda je funkce konvexní, či konkávní na určitých intervalech. K tomu používáme vět o monotonii derivace, případně o souvislosti s druhou derivací. Pozornost věnujeme i bodům, v nichž nastává inflexe.

8. Někdy je vhodné určit i speciální přímky, např. asymptoty grafu. Je užitečné si všimnout i chování v prstencovém okolí bodu, ve kterém funkce není definovaná, avšak existují v něm jednostranné limity funkce. Bývá často typu „asymptoty“ o rovnici $x = a$ (my jsme tyto přímky jako asymptoty grafu f nedefinovali).

9. Na závěr získané informace použijeme pro znázornění grafu jednoduchým obrázkem. Kreslíme ho zpravidla od ruky, ale pečlivě a s vyznačením „důležitých“ bodů.

Poznámka 7.3.2. Použití vhodných vět je spíše věcí citu a rozhodně obecně *není otázkou algoritmu*. Přílišná algoritmizace naznačeného postupu je škodlivá. Je-li např.

$$f(x) = \arcsin\left(2x/(1+x^2)\right) ,$$

získáme mnoho informací z vyšetření „vnitřní funkce“, které lze provádět prakticky jen se znalostí definic a středoškolských vědomostí o kvadratické rovnici. Řešením (zkoumáním řešitelnosti) rovnice $2x/(1+x^2) = \alpha$ v závislosti na parametru α dostaneme snadno obor hodnot „vnitřní“ funkce $[-1, 1]$, a tedy informaci o extrémech f. Funkce je lichá, což vidíme snadno z toho, že „vnitřní funkce“ je zřejmě lichá a tu skládáme s lichou funkcí arcsin. Protože je „vnější funkce“ monotónní, je vhodné užít elementárního úsudku o skládání monotónních funkcí (i když jsme takovou větu explicitně nedokazovali). Je žádoucí si povšimnout co nejdříve, že v bodě $x = 1$ budeme muset počítat derivaci jinak, než podle vzorečků, a že máme na výběr prakticky tři možné varianty postupu: jednostranné derivace můžeme určit přímo z definice, nebo podle Věty 7.1.2, nebo podle varianty věty o derivaci složené funkce pro jednostranné derivace. Doporučuji čtenáři, aby si tento příklad *samostatně* přepočítal.

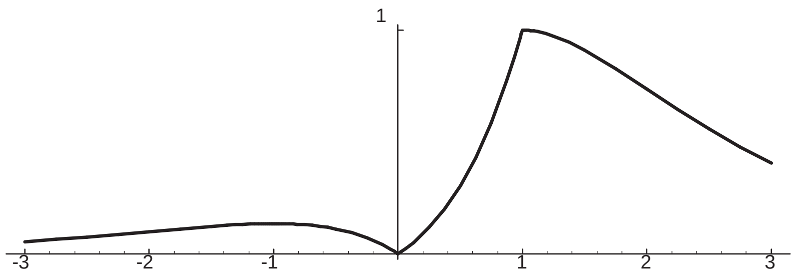
Poznámka 7.3.3. Vyšší derivace jsou užitečným nástrojem pro zkoumání funkcí, jejich význam však nesmí být přeceňován; každopádně není vhodné začít například bezhlavě derivovat např. funkci $f(x) = |x|$ nebo $g(x) = \sin(\operatorname{arctg} x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, ku zjištění, že mají v bodě 0 absolutní minimum.

Nevěnovali jsme se odvození speciálních vět pro vyšetřování průběhu funkcí, neboť někdy právě ony vedou ke škodlivé algoritmizaci postupů. Jde o věty typu: je-li $f'(x) = 0$ a $f''(x) > 0$, nabývá f v x svého lokálního minima. Je zde ještě další důvod: s nástupem počítačů lze získat (někdy trochu hrubší) obrázek o průběhu funkce použitím programů pro „počítačovou algebru“. Jsou to programy, které již umí mnoho věcí: ovládají nejen kreslení grafů funkcí jedné a dvou proměnných, ale umí i nalézt derivaci dané funkce, sečíst některé řady, případně provést i složitější operace. Existuje jich celá řada; některé jsou vysoce specializované (např. na číselně-teoretické výpočty, na kalkulus nebo na logiku), jiné mají velmi široké použití. K těm obecně nejznámějším patří *Derive*, *Maple*, *Mathematica* či *MuPad* [4]) V tomto textu používáme ukázek, zpracovaných programem *Mathematica*. Jeho autorem je tým, vedený teoretickým fyzikem STEPHENEM WOLFRAMEM (1959 –) [5]).

Zadáme-li v programu *Mathematica* nakreslení grafu funkce $f(x) = |x| \exp(-|x-1|)$ instrukcí (používáme známý velmi populární příklad)

```
f[x_]:=Abs[x]*Exp[-Abs[x-1]]
Plot[f[x],{x,-3,3}, PlotRange->{0,2},]
```

dostaneme tento obrázek:



Obr. 7. 1.

I když si můžeme s obrázkem pohrát a měnit různě měřítko, stěží z něj zjistíme, že inflexní body f jsou body -2 a 2; to však lze velmi lehce spočítat.

Příklad 7.3.4. Nalezení extrémů polynomu druhého stupně je jednou z úloh, k jejímuž řešení *nebudeme* používat infinitezimálního počtu. Zřejmě platí

$$ax^2 + bx + c = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

a je-li $a > 0$, je hodnota $(4ac - b^2)/4a$ minimální, kdežto při $a < 0$ je tato hodnota maximem. Jiných extrémů funkce zřejmě nenabývá.

Historická poznámka 7.3.5. Všimněme si stručně historie určování extrémů. Jednou z nejstarších „extremálních úloh“ je nalezení obdélníku s daným obvodem takového, aby byl jeho obsah maximální [6]). Je-li velikost obvodu p, pak jde o nalezení maxima funkce

$$O(x) = (p/4 + x)(p/4 - x) = \frac{p^2}{16} - x^2$$

[4]) Program *MuPad* patří k finančně nejdostupnějším a jeho tvorba a zdokonalování probíhá na základě grantu na Univerzitě v Paderbornu (SRN). Vyžaduje však zatím pro provoz hodně výkonný počítač.

[5]) Pro „soukromníka“ je tento program finančně málo dostupný.

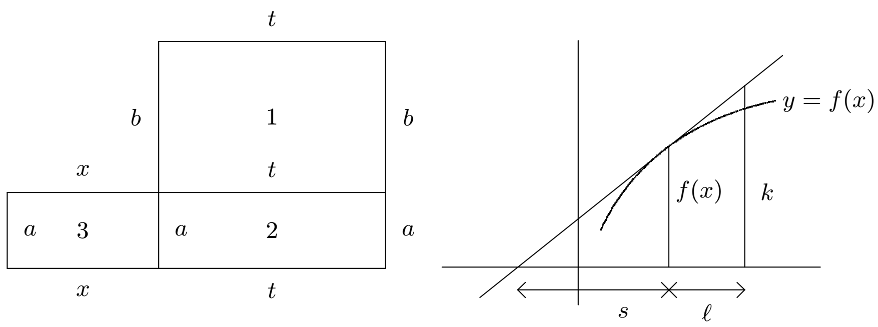
[6]) Jednou z nejstarších extrémálních úloh je *isoperimetrický problém*: jde o nalezení rovinného obrazce, který má při daném obvodu *maximální* obsah. ZENODORUS (asi 200 – asi 100 před n. l.) patrně napsal práci, kterou jiní zmiňují, kde je určen kruh jako řešení tohoto problému.

na intervalu $[-p/4, p/4]$. Toho se zřejmě nabývá pro $x = 0$, takže řešením je čtverec o straně $p/4$.

Jiné řešení je založeno na AG-nerovnosti dokázané v Lemmatu 1.3.28. Označíme-li délky stran uvažovaného obdélníku x a y, platí

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{16}\,.$$

V nerovnosti podle zmíněného Lemmatu nastává rovnost v jediném případě, kdy $x = y$.



Obr. 7. 2.

Staří Řekové řešili tuto úlohu geometricky. Na připojeném Obr. 2 vlevo je čtverec o straně $t = a + b$ a obdélník o stejném obvodu a stranách a, $t + x$. Protože platí $2(t + a + b) = 2(t + a + x)$, dostáváme odtud $b = x$. Oba tyto rovnoběžníky mají společnou část 2 o obsahu at. Porovnáme tedy obsah části 1, který činí bt, s obsahem části 3 o velikosti ax. Protože však platí $t = a + b > a$, dostáváme odtud vynásobením nerovnosti čísly b a x (jsou si rovna!) nerovnost

$$bt > ax\,,$$

z čehož plyne, že součet obsahů částí 1 a 2 je větší než součet obsahů částí 1 a 3.

Pierre de Fermat (1601 – 1665) užíval jiného postupu, který si ukážeme na stejné úloze.

Je-li p opět daný obvod, má se „maximalizovat" funkce

$$V(x) = \left(\frac{p}{2} - x\right)x\,.$$

V libovolné blízkosti bodu, v němž se nabývá maximální hodnoty, lze nalézt body x_1, x_2, $x_1 \neq x_2$, pro něž platí (kreslete si obrázek!)

$$\left(\frac{p}{2} - x_1\right)x_1 = \left(\frac{p}{2} - x_2\right)x_2\,,$$

neboli

$$\frac{p}{2}(x_1 - x_2) = x_1^2 - x_2^2\,.$$

Po zkrácení dostáváme $p/2 = x_1 + x_2$. Při přibližování bodů x_1, x_2 se dostáváme stále blíže k situaci $x_1 = x_2 = p/4$. Fermat užíval stejnou techniku „pseudorovnosti“ i při hledání (směrnic) tečen ve složitějších situacích. Sledujte postup na Obr. 2 vpravo.

Platí $(s+l)/s = k/f(x)$ a pokud nahradíme $k \approx f(x+l)$ a vyřešíme rovnici vzhledem k s, obdržíme

$$s \approx \frac{l \cdot f(x)}{f(x+l) - f(x)} = \frac{f(x)}{(f(x+l) - f(x))/l}\,.$$

V modernější úpravě přechodem k limitě dostáváme odtud $s = f(x)/f'(x)$ a protože směrnice tečny ke grafu má hodnotu $f(x)/s$, je rovna $f'(x)$. V konkrétním případě podle tohoto postupu dostáváme např. pro $f(x) = x^3$

$$s \approx \frac{lx^3}{(x+l)^3 - x^3} = \frac{lx^3}{l(3x^2 + 3xl + l^2)} = \frac{x^3}{3x^2 + 3xl + l^2}\,.$$

Zanedbáním členů s l dostaneme $s = x^3/3x^2 = x/3$ a $f(x)/s = x^3/(x/3) = 3x^2$ pak dává hodnotu derivace $f'(x) = 3x^2$.

7.4 Aproximace polynomy

Velmi jednoduchými funkcemi jsou polynomy. Mají spojité derivace všech řádů, které jsou všechny až na konečný počet identicky nulové, a díky svému algebraickému charakteru jsou snadným objektem studia vlastností funkcí. Proto je vhodné se snažit složitější funkce nahradit polynomy, které jsou jim v nějakém smyslu „blízké“, neboli které je v jistém smyslu dobře *aproximují*. Úlohami tohoto typu se nyní budeme zabývat.

Příklad 7.4.1. Zvolme libovolně $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ zřejmě existuje polynom p_k, jehož k-tá derivace $p^{(k)}(x_0)$ je rovna 1 a ostatní jsou všechny rovny 0. Za polynom p_k lze volit

$$p_0(x) := (x - x_0)^0 = 1\,, \qquad p_1(x) := (x - x_0)^1 = x - x_0$$

a obecně, pro každé $k \in \mathbb{N}_0$,

$$p_k(x) := \frac{1}{k\,!}(x - x_0)^k\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Definice 7.4.2 (Taylorův polynom). Nechť $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ a f je funkce, definovaná v okolí bodu x_0. Předpokládejme, že pro funkci f platí $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ Položme

$$\begin{aligned} T_{f,x_0,n}(x) := T(x) :&= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\,. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Tento polynom, který je konstruován tak, že má v bodě x_0 s funkcí f shodné derivace až do řádu n, se nazývá *Taylorův polynom* (stupně nejvýše n-tého) funkce f v bodě x_0. Pro $x_0 = 0$ se tento polynom nazývá též *Maclaurinův polynom.*

Poznámka 7.4.3. Zjednodušujeme poněkud označení, neboť bychom měli stále psát $T_{f,x_0,n}(x)$ nebo $T_n(f, x_0; x)$ apod., abychom vyznačili závislost na f, x_0 a n. Pokud pracujeme s pevně zvolenou funkcí f a fixovaným bodem x_0, nehrozí nebezpečí z nedorozumění; budeme proto pro polynom definovaný v (7.8) užívat jen zjednodušené označení pomocí T či T_n.

Čtenář by si měl povšimnout, že pro polynom T platí

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) p_k(x)\,.$$

Polynom T má lokální chování „blízké“ chování funkce f; proto říkáme zpravidla, že je *lokální aproximací* nebo *lokálním přiblížením* funkce f. Přesnější popis lze nalézt v Lemmatu 7.4.20. Nežli budeme vlastnosti polynomu T studovat podrobněji, všimneme si dalších možností.

Nechť je v intervalu $[\,a, b\,]$ dána konečná množina $M := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Zkusme najít polynom, který v bodech množiny M nabývá stejných hodnot jako daná funkce f definovaná na $[\,a, b\,]$ [7]). Zkusíme postupovat obdobným způsobem.

Příklad 7.4.4. Snadno ověříme, že pro každý prvek $x_k \in M$, $k = 0, 1, \dots, n$, existuje polynom q_k, pro který platí $q_k(x_k) = 1$ a dále $q_k(y) = 0$, právě když $y \in (M \setminus \{x_k\})$. Stačí položit

$$q_k(x) = \prod_{m=0, m\neq k}^{n} (x - x_m) \cdot \Big(\prod_{m=0, m\neq k}^{n} (x_k - x_m) \Big)^{-1}\,.$$

Definice 7.4.5 (Lagrangeův interpolační polynom). Nechť f je funkce, definovaná na intervalu $[\,a, b\,]$. Položme

$$L_{f,M,n}(x) := L(x) := \sum_{m=0}^{n} q_k(x) f(x_k)\,. \tag{7.9}$$

Tento polynom $L = L_n$ nejvýše n-tého stupně, který nabývá v bodech množiny M stejných hodnot jako funkce f, se obvykle nazývá *Lagrangeův interpolační polynom.* O označení uzavřeme analogickou úmluvu jako je ta z Poznámky 7.4.3 a budeme psát pouze L či L_n.

V obou případech, tj. pro Taylorův polynom T i Lagrangeův polynom L, je důležité získat informace o rozdílu polynomu a původní funkce, s pomocí které byl konstruován.

[7]) Čtenář si může představit, že chceme na základě stavů určitého fyzikálního děje, kvantitativně popsaných v nerovnoměrně rozložených časech měření, tento děj co nejjednodušeji popsat.

Definice 7.4.6. Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$, existuje $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$ a T_n je polynom určený vzorcem (7.8), pak položíme

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)\,, \tag{7.10}$$

pro x „blízká bodu x_0“; funkce f je zřejmě v nějakém okolí x_0 definována. Funkci $R_n(x)$ nazýváme obvykle *zbytek* v *Taylorově vzorci*

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)\,. \tag{7.11}$$

Poznámka 7.4.7. Poznamenejme, že běžně užívaný název Taylorův vzorec (7.11) není adekvátní, neboť Taylor zbytek R_n vůbec nezkoumal. Již r. 1697 Johann Bernoulli (1667 – 1748) dospěl k podobnému vyjádření řadou, je tedy otázka původu jednotlivých myšlenek velice složitá.

Věta 7.4.8 (Lagrange 1797). *Nechť $x_0, x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$, a $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že funkce f má v uzavřeném intervalu I o krajních bodech x_0, x derivace až do řádu $(n+1)$* [8]*). Nechť T_n je určen vzorcem* (7.8) *a R_n vzorcem* (7.10)*. Potom existuje vnitřní bod ζ intervalu I tak, že*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,. \tag{7.12}$$

Důkaz. Budeme předpokládat např. $x > x_0$ a pracovat na intervalu $[\,x_0, x\,]$; druhý případ se vyšetří obdobně. Definujme R_n pomocí rovnosti (7.10) a položme

$$F(t) = (x-x_0)^{n+1}R_n(t) - (t-x_0)^{n+1}R_n(x)\,, \quad t \in [\,x_0, x\,]\,.$$

Zřejmě je $F(x_0) = F(x) = 0$ a na F můžeme aplikovat Rolleovu větu. Existuje bod ζ_1, $\zeta_1 \in (x_0, x)$, s vlastností $F'(\zeta_1) = 0$, . Postup opakujeme: protože platí $F'(x_0) = F'(\zeta_1) = 0$ a existuje tedy $\zeta_2 \in (x_0, \zeta_1)$ tak, že $F''(\zeta_2) = 0$. Po provedení konečně mnoha obdobných kroků spočívajících v opakovaném užití Rolleovy věty dospějeme tak k bodu ζ_{n+1} s vlastností $F^{(n+1)}(\zeta_{n+1}) = 0$, kde

$$F^{(n+1)}(t) = (x-x_0)^{n+1}f^{(n+1)}(t) - R_n(x)\cdot(n+1)!\,.$$

Platí $\zeta = \zeta_{n+1} \in (x_0, \zeta_n) \subset \cdots \subset (x_0, x)$ a snadným výpočtem obdržíme žádaný tvar zbytku (7.12). □

Poznámka 7.4.9. Toto je nejjednodušší tvar zbytku v Taylorově vzorci, který se též nejsnáze pamatuje. Stačí provést srovnání se členy T_n a vidíme, že $R_n(x)$ je „skoro $(n+1)$-vý člen“. Nazývá se *zbytek v Lagrangeově tvaru* a jeho název napovídá do jisté míry i metodu důkazu. Jde totiž o „zobecnění Lagrangeovy věty“, neboť vztah pro $n = 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(\zeta)}{1!}(x-x_0)$$

je jen jiným zápisem Lagrangeovy věty. Ve Větě 7.4.24 dokážeme obecnější tvrzení.

[8]) Odtud plyne, že na tomto intervalu je funkce z $\mathcal{C}^{(n)}$, uvažované derivace jsou do řádu n vlastní.

Analogicky si budeme počínat pro odhad zbytku u Lagrangeova interpolačního polynomu. Pro zdůraznění analogie zvolíme stejné či velmi podobné označení.

Věta 7.4.10 (Lagrange 1795). *Nechť $M = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ a nechť funkce f má v uzavřeném intervalu $I = [\,a, b\,]$ obsahujícím body $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ derivace až do řádu $(n+1)$. Nechť L_n je určen vzorcem* (7.9) *a R_n na $[\,a, b\,]$ vzorcem*

$$R_n(x) := f(x) - L_n(x)\,. \tag{7.13}$$

Potom existuje vnitřní bod ζ intervalu I tak, že

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\,. \tag{7.14}$$

Důkaz. Definujme R_n pomocí rovnosti (7.13) a položme

$$F(t) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)R_n(t) - (t - x_0)\cdots(t - x_n)R_n(x)\,, \quad t \in I\,.$$

Zřejmě je $F(x) = F(x_0) = F(x_1) = \cdots = F(x_n) = 0$ a na F můžeme aplikovat na vhodně zvolených intervalech Rolleovu větu. Pro $x = x_k$, $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ je $R_n(x) = 0$, stačí tedy provést úvahu pro $x \in I \setminus M$. Seřaďme body z $M \cup \{x\}$ vzestupně a označme je v tomto pořadí $t_0^0 < t_1^0 < \cdots < t_{n+1}^0$. Nalezneme tak $n+1$ bodů $t_k^1 \in (t_k^0, t_{k+1}^0)$, $k = 0, \dots, n$ s vlastností $F'(t_k^1) = 0$. Postup dále opakujeme: je $F'(t_0^1) = F'(t_1^1) = \cdots = 0$ a existují tedy body $t_k^2 \in (t_k^1, t_{k+1}^1)$, $k = 0, \dots, n-1$ s vlastností $F''(t_k^2) = 0$. Po konečném počtu aplikací Rolleovy věty dospějeme k bodům t_0^n, t_1^n, v nichž se anuluje $F^{(n)}$. Posledním krokem najdeme $\zeta := t_0^{n+1} \in (t_0^n, t_1^n)$ tak, že $F^{(n+1)}(\zeta) = 0$, kde

$$F^{(n+1)}(t) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)f^{(n+1)}(t) - R_n(x)\cdot(n+1)!\,.$$

Bod ζ zřejmě leží v intervalu (a, b). Odtud snadno dostáváme zbytek ve formě (7.14). □

Příklad 7.4.11. Je-li f polynom stupně k, snadno nahlédneme, že pro $n \geq k$ je zbytek R_n v *obou případech* identicky roven 0, neboť $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$. Proto platí $T_n(x) = f(x)$ všude v $\mathbb{R}$. Je poučné si to vyzkoušet např. s Taylorovými rozvoji v alespoň dvou různých bodech a případně srovnat s algebraickými postupy pro transformace polynomů. Platí např.

$$7 - 5x + 3x^2 = 5 + (x - 1) + 3(x - 1)^2\,,$$

kde vpravo stojí rozvoj polynomu na levé straně rovnice v bodě $x_0 = 1$.

Příklad 7.4.12. Jestliže však zvolíme např. $f(x) = \exp x$, pak pro *žádné* n nemůže nastat rovnost $T_n = f$ na $\mathbb{R}$, neboť, jak snadno nahlédneme, je zbytek R_n vždy nenulový.

Poznámka 7.4.13. Jak Taylorovy, tak Lagrangeovy polynomy jsou volbou f, x_0 a n, resp. f a M určeny jednoznačně. Rozdíl Taylorových polynomů stupně nejvýše n-tého je opět polynom stupně nejvýše n-tého a má v bodě x_0 všechny derivace rovny 0, Rozdíl Lagrangeových polynomů má $(n+1)$ různých nulových bodů. Jednoznačně jsou ve zřejmém smyslu určeny tedy i polynomy p_k a q_k z Příkladů 7.4.1 a 7.4.4.

Příklady 7.4.14 (důležité). 1. Protože platí $\exp' = \exp$ a $\exp(0) = 1$, je pro exp, $x_0 = 0$ a fixované x

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,, \qquad R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(\zeta)\,,$$

kde ζ leží mezi body 0 a x. Dále platí

$$0 \le |R_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(|x|) \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(|x|) = 0\,.$$

Stačí si uvědomit, že řada o členech $a_n = \exp(|x|)|x|^{n+1}/(n+1)!$ podle podílového kritéria konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, takže $\lim a_n = 0$. Odtud vyplývá, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\exp(x) = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{7.15}$$

2. Jestliže provedeme stejnou úvahu pro funkce sin a cos, dostaneme podobně pro všechna $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \quad \cos x = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,. \tag{7.16}$$

Příklad 7.4.15. Stejnou úvahou pro funkce sinh a cosh dostaneme podobně pro všechna $x \in \mathbb{R}$

$$\sinh x = \sum_0^\infty \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \quad \cosh x = \sum_0^\infty \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,. \tag{7.17}$$

Poznámka 7.4.16. V Lemmatu 3.2.11 jsme dokázali, že číslo e je iracionální. Z toho samozřejmě *neplyne*, že číslo e^2 je iracionální, avšak i to lze dokázat podobným způsobem: z rovnosti $\mathrm{e}^2 = p/q$, kde $p, q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, dostáváme $p\mathrm{e}^{-1} = q\mathrm{e}$. Pak vyjádříme e a e^{-1} řadami, upravíme a limitním přechodem odvodíme spor.

Další důležitou aproximaci polynomy budeme studovat ve druhém díle tohoto textu, kde pro funkci $f \in \mathcal{C}([a,b])$ a danou „přesnost“ $\varepsilon > 0$ budeme hledat polynom p tak, aby platilo $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ pro *všechna* $x \in [a,b]$. Protože žádáme stejnou přesnost aproximace ve všech bodech, hovoří se v tom případě o *stejnoměrné aproximaci* polynomem.

Historická poznámka 7.4.17. Doplňme výklad několika historickými poznámkami. Opravdovým mistrem ve studiu interpolačních problémů byl nesporně Isaac Newton (1643 – 1727); svědčí o tom i řada všeobecně užívaných názvů (např. Newton-Gaussova formule, Newton-Besselova formule apod.). Již dříve bylo nutno interpolovat v souvislosti se vznikem tabulek. Dříve zmíněnou často řešenou úlohou, související s astronomickými pozorováními, bylo určení hodnoty funkce f v bodě x_{n+1} na základě jejích hodnot v bodech $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, s intervaly o různých délkách $x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Označíme-li postupně $f_0 := f(x_0)$, $f_1 := \bar{f}(x_0, x_1) := (f(x_1) - f(x_0))/(x_1 - x_0)$ a obecněji

$$\begin{aligned} f_{k+1} &:= \bar{f}(x_0, x_1, \ldots, x_{k+1}) := \\ &:= \frac{\bar{f}(x_0, x_1, \ldots, x_k) - \bar{f}(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})}{x_0 - x_{k+1}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

pak lze výpočtem ověřit rovnost

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(x_1) + (x_0 - x_1)\bar{f}(x_0, x_1) = \\ &= f(x_1) + (x_0 - x_1)\left[\bar{f}(x_1, x_2) + (x_0 - x_2)\bar{f}(x_0, x_1, x_2)\right] = \cdots \\ &= f(x_1) + (x_0 - x_1)\bar{f}(x_0, x_1) + (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\bar{f}(x_0, x_1, x_2) + \cdots + \\ &+ (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)\bar{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n) + R_n\,. \end{aligned}$$

Zde pro R_n platí

$$R_n = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_{n+1})\bar{f}(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})\,.$$

Nahradíme-li x_0 proměnnou x, dostaneme tak formuli, kterou Newton používal a která se po něm jmenuje. Je-li přitom f polynom stupně n, je $R_n = 0$. Neprovedli jsme nic jiného, než jsme již dělali, avšak v odlišném značení. Newton dříve odvodil jiné interpolační vzorce, avšak v práci *Regula Differentiarum*, jejíž vznik se klade do r. 1676, píše: *Lze popsat jiné vzorce tohoto druhu, ale já dávám přednost zahrnout vše do jediného obecného vztahu* .... Výsledek může být čtenáři stále silně nepovědomý, pokusme se tedy ještě o další zjednodušení. Definujme pro $h > 0$

$$\begin{aligned} \Delta^0_{x,h} f &= f(x)\,, \qquad \Delta^1_{x,h} f = f(x+h) - f(x)\,, \\ \Delta^2_{x,h} f &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\,, \\ \Delta^{k+1}_{x,h} f &= \Delta^1_{x,h}(\Delta^k_{x,h} f)\,, \qquad k = 1, 2, \ldots\,. \end{aligned}$$

Podobně je vhodné zavést ještě toto zkrácené označení

$$(x)_{0,h} = 1\,,\ (x)_{1,h} = x\,,\ (x)_{k,h} = x(x-h)\cdots(x-(k-1)\,h)\,,\ k = 1, 2, \ldots\,.$$

Snadno ověříme, že pro

$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}\,,\ \ x \in \mathbb{R}\,,\ \ k \in \mathbb{N}\,,\ \binom{m}{0} = 1\,,\ \text{je}\ (x)_k := (x)_{k,1} = k\,!\binom{x}{k}\,,$$

a také

$$\Delta^1_{x,1}(x)_k = (x+1)_k - (x)_k = (x)_{k-1}\left[(x+1) - (x-(k-1))\right] = k\,(x)_{k-1}\,.$$

Pracujeme-li tedy s rovnoměrně rozloženými body, dostaneme formulku ještě mnohem povědomější: pro polynom f stupně n platí (srovnejte s Taylorovým, resp. Maclaurinovým polynomem)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k_{0,1} f}{k\,!}\,(x)_k\,.$$

Poslední rovnost se někdy nazývá *Harriot-Briggsova formule*, byla však nezávisle objevena Newtonem a JAMESEM GREGORYM (1638 – 1675), který o ní psal JOHNU COLLINSOVI (1625 – 1683) [9]) v dopise z r. 1670. Gregory odvodil mnoho výsledků a zdá se, že již dobře znal a užíval „taylorovské“ postupy. Zdá se oprávněná domněnka (srovnej s [3], str. 75, podle níž dospěl Gregory k Taylorově vzorci resp. k Taylorově řadě (viz následující definice) dříve, a to právě v souvislosti s interpolačními formulemi. Poznamenejme již nyní, že Gregory např. odvodil binomický rozvoj, kterým se zabýváme dále v Příkladu 7.4.28 a také r. 1671 rozvoj funkce arctg z Příkladu 8.3.14.

Definice 7.4.18 (Taylor 1715). Nechť f má v bodě x_0 derivace všech řádů, tj. existují $f^{(n)}(x_0)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom se řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{7.18}$$

nazývá *Taylorova řada* funkce f v bodě x_0.

Poznámky 7.4.19. 1. Zde je pojmenování patrně více na místě, neboť Taylor k řadě dospěl, i když nezkoumal její konvergenci. Jak jsme se již zmínili, k této řadě však dospěl již r. 1697 Johann Bernoulli a dříve možná i Gregory. Je známo, že Gregory odvodil 16 rozvojů tohoto typu, méně je však známo jak a také doba, kdy je určil. Viz ještě níže.

2. Zdaleka není pravda např. to, že má-li funkce f derivace všech řádů na $\mathbb{R}$ (píšeme $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$), je rovna součtu příslušné Taylorovy řady. Jak uvidíme později, např. na základě Příkladu 7.4.29, jde o záležitost dosti složitou.

3. Je-li funkce f definována na okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0 a existuje-li $f'(x_0)$ vlastní, lze Taylorův polynom prvního stupně interpretovat jako *tečnu* grafu funkce f. Je to přímka o rovnici

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Hledání tečen ke křivkám bylo jedním z hlavních motivů pro vznik infinitezimálního počtu. Poznamenejme, že situace nemusí odpovídat našemu názornému chápání tečny jako přímky, která má v „bodě dotyku“ x_0 s grafem f jediný společný bod. Uvažte funkci

$$f(x) = x^2 \sin(1/x)\,, \quad x \neq 0\,, \qquad f(0) = 0$$

a polohu jejího grafu vůči přímce $y = 0$. Ta je podle naší definice tečnou grafu f v bodě 0.

4. Nechť f má např. spojitou první derivaci v okolí bodu x_0. Všimněte si, že přímka $y = f(x_0)$ v obecném případě aproximuje f v okolí bodu x_0, ale ne příliš dobře. Je

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0\,, \quad \text{ale} \quad \lim_{h\to 0}(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$$

[9]) Collins byl sekretářem anglické *Royal Society* (zal. 1662).

nemusí již obecně existovat, a pokud existuje, nemusí být rovna 0. Jsou-li $a, b \in \mathbb{R}$, pak obě limity

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-(a(x_0+h)+b))\,,\ \lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-(a(x_0+h)+b))/h) \qquad (7.19)$$

jsou rovny 0 pouze pro jedinou lineární funkci. Geometricky: tuto vlastnost má mezi přímkami o rovnici $y = a(x-x_0)+b$ pouze ta, pro kterou je $a = f'(x_0)$. Čtenář by si měl uvědomit, že je-li druhá limita v (7.19) rovna 0, je rovna automaticky 0 i první limita v (7.19). Viz následující lemma.

Lemma 7.4.20. *Nechť existuje vlastní $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Potom existuje jediný polynom n-tého stupně P takový, že pro $P(x-x_0)$ platí*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P(x-x_0)}{(x-x_0)^n} = 0\,. \qquad (7.20)$$

Polynom $P(x-x_0)$ je právě Taylorův polynom funkce f stupně n v bodě x_0.

Důkaz. Je-li $g(x) = f(x) - T(x)$, pak $g^{(k)}(x_0) = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n$; aplikací l'Hospitalova pravidla $(n-1)$-krát totiž dostaneme

$$n!\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = (n-1)!\lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x\to x_0}\frac{g^{(n-1)}(x)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0\,,$$

neboli je splněna podmínka (7.20). Nechť je $g(x) = f(x) - P(x-x_0)$ a nechť platí (7.20). Pak ale je $g(x) = f(x) - T(x) + (T(x) - P(x-x_0))$, a proto i pro *polynom* $h(x) = T(x) - P(x-x_0)$ platí $\lim_{x\to x_0}(h(x)/(x-x_0)^n) = 0$. Analogicky je

$$\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{(x-x_0)^n}(x-x_0)^{n-k} = 0$$

pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k < n$. Protože pracujeme s rozdílem polynomů, tj. polynomem, který je nejvýše stupně n, jsou všechny jeho koeficienty nulové, a proto platí $T(x) = P(x-x_0)$. □

Příklad 7.4.21. Pro funkci $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$, je na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$f'(x) = (1/3)x^{-2/3}\,, \qquad f''(x) = (-2/9)x^{-5/3}\,, \qquad f'''(x) = (10/27)x^{-8/3}\,.$$

Použijeme-li již odvozený Lagrangeův tvar zbytku, dostaneme

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1} = f(8) + f'(8)\cdot 1 + (1/2)f''(8)\cdot 1^2 + (1/6)f'''(8+\theta) \doteq$$
$$\doteq 2 + 1/12 - 1/(9\cdot 32) + (5/81)(8+\theta)^{-8/3}\,, \quad \theta \in (0,1)\,.$$

Tak dostaneme pro $\sqrt[3]{9} \doteq 2.0798611$ místo $2,0800838$; triviální odhad chyby činí $5/20736 \doteq 0,0002411$, zatímco skutečná chyba je $\doteq 0,0002227$. Přesnost byla volena tak, aby zahrnovala všechna „zajímavá“ místa.

Definice 7.4.22. Jestliže k funkci f definované na okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0 existuje funkce g definovaná na okolí $\mathcal{U}(x_0)$ a konstanta K, $0 \le K < \infty$ tak, že na tomto okolí je

$$|f(x)| \le K \cdot |g(x)|\,,$$

zapisujeme to pomocí vztahu $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$. Čteme „funkce f je velké O funkce g pro x jdoucí k x_0“ apod. Existuje-li ke každému $\varepsilon > 0$ takové okolí bodu $\mathcal{U}(x_0)$, na němž platí

$$|f(x)| \le \varepsilon \cdot |g(x)|\,,$$

zapisujeme to pomocí vztahu $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$ (při čtení říkáme podobně jako výše „…malé o …“ apod.

Příklad 7.4.23. Pomocí zavedených pojmů se dají počítat poměrně snadno některé limity. Výpočty jsou založeny na tom, že stačí umět s touto symbolikou úsporně zacházet a mít nástroje (zde jsou jimi Taylorovy polynomy) k určování funkcí g. Bez podrobnějšího výkladu si ukažme jednoduchý příklad výpočtu:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-(x-x^3/6+o(x^4))}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3/6+o(x^4))}{x^3} = \\ = \lim_{x\to 0}(1/6+o(x^4)/x^3) = 1/6\,.\end{aligned}$$

Věta 7.4.24 (obecnější tvar zbytku). *Nechť $x_0, x \in \mathbb{R}$, $x \ne x_0$, a $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že funkce f má v uzavřeném intervalu I o krajních bodech x_0, x derivaci až do řádu $(n+1)$. Nechť T_n je určen vzorcem* (7.8) *a R_n vzorcem* (7.10). *Nechť φ je funkce spojitá na I, která má v každém vnitřním bodě t intervalu I derivaci $\varphi'(t) \ne 0$. Potom existuje vnitřní bod ζ intervalu I tak, že*

$$R_n(x) = \frac{(x-\zeta)^n}{n!}\,\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\zeta)}\,f^{(n+1)}(\zeta)\,. \tag{7.21}$$

Důkaz. Definujme funkci g rovností (g je $R_n(x)$, kde x_0 zaměníme za t)

$$g(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\,.$$

Zřejmě platí $g(x) = 0$, $g(x_0) = R_n(x)$. V intervalu I (včetně krajních bodů) má funkce g derivaci

$$\begin{aligned} g'(t) = -f'(t) \quad &- \quad \left(-f'(t) + f''(t)\frac{(x-t)}{1!}\right) - \\ &- \quad \left(-f''(t)\frac{(x-t)}{1!} + f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\right) - \cdots - \\ &- \quad \left(-f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\right)\,. \end{aligned}$$

Odtud po úpravě dostaneme jednoduchý vztah

$$g'(t) = -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n\,!}\,.$$

Nyní použijeme na interval I Cauchyho větu. Nalezneme tak bod ζ s vlastností

$$\frac{g(x)-g(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = \frac{g'(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}\,,$$

a odtud dostáváme

$$-R_n(x) = -\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\zeta)}f^{(n+1)}(\zeta)\frac{(x-\zeta)^n}{n\,!}\,,$$

což je již žádaný tvar zbytku. □

Důsledek 7.4.25. *Položme v* (7.21) $\varphi(t) = t$*. Pak dostaneme tzv.* Cauchyho tvar zbytku

$$R_n(x) = \frac{(x-\zeta)^n(x-x_0)}{n\,!}f^{(n+1)}(\zeta)\,. \tag{7.22}$$

(*Lagrangeův tvar zbytku* (7.12) *dostaneme volbou* $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$.)

Příklad 7.4.26. Použití Maclaurinova vzorce pro rozvoj funkce log nepřipadá v úvahu, neboť log není v bodě 0 definován. Budeme tedy rozvíjet modifikovanou funkci $f(x) := \log(1+x)$. Platí

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\,,\dots\,,\quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)\,!}{(1+x)^n}\,,\dots\,,$$

z čehož plyne

$$f(0) = \log 1 = 0\,,\ f'(0) = 1 = 0\,!\,,\ f''(0) = -1\,!,\dots,f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)\,!\,.$$

Pro $1+x>0$, tj. $x>-1$, je proto

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)\,. \tag{7.23}$$

Nyní můžeme dobře srovnat efektivitu užití Lagrangeova a Cauchyho zbytku: pro $0<x\le 1$ a $n\in\mathbb{N}$ dostaneme při použití prvního vzorce (7.12)

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}\cdot(-1)^n\frac{n\,!}{(1+\zeta)^{n+1}}$$

a lze provést odhad

$$|R_n(x)| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}\cdot\frac{n\,!}{(1+\zeta)^{n+1}} < \frac{x^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1}\,.$$

Pro každé uvažované x je $\zeta \in (0,x)$ a odhad je nejhorší pro ζ blízká k 0, ale i v případě, že odhadneme zbytek tak, že v něm položíme $\zeta = 0$ a $x = 1$, dává odhad konvergenci řady k f.

V případě užití Cauchyho vzorce (7.22) dostaneme pro tatáž x

$$R_n(x) = \frac{x(x-\zeta)^n}{n!} \cdot (-1)^n \frac{n!}{(1+\zeta)^{n+1}}$$

a opět můžeme odhadnout pro $0 < x \le 1$, že

$$|R_n(x)| = \frac{x(x-\zeta)^n}{(1+\zeta)^{n+1}} \le \frac{x^{n+1}}{(1+\zeta)^{n+1}} < x^{n+1}\,.$$

Vidíme, že odhad je při fixovaném x nejhorší pro ζ blízká k 0, ale i v případě, že zbytek odhadneme hodnotou pro $\zeta = 0$ a $x < 1$, dává konvergenci k f.

Pro $|x| > 1$ Maclaurinův rozvoj funkce $\log(1+x)$ diverguje podle podílového kritéria; diverguje také v bodě $x = -1$, neboť je to až na znaménko harmonická řada. Zbývá vyšetřit případ $-1 < x < 0$, kdy řada (7.23) konverguje, ale není zřejmé, zda její součet je f.

Předcházející odhad podle Lagrangeova vzorce nelze použít, neboť je $1+\zeta < 1$. Při výpočtu totiž dostáváme

$$|R_n(x)| = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{|1+\zeta|^{n+1}} < \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1}$$

s ohledem na fakt, že ζ může ležet v libovolně malém levém okolí bodu x. Tak např. pro $x = -3/4$ nejsme z provedeného odhadu konvergenci řady k f schopni dokázat, neboť $3^n/(n+1) \to \infty$. Použijeme proto Důsledek 7.4.25 s Cauchyho tvarem zbytku (7.22). Platí

$$|R_n(x)| = \frac{|x|}{1+\zeta} \cdot \left(\frac{|x|+\zeta}{1+\zeta}\right)^n < \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\,,$$

neboť zlomek $(|x|+\zeta)/(1+\zeta)$ je pro $-|x| < \zeta < 0$ odhadnut svojí hodnotou pro $\zeta = 0$. Odtud plyne konvergence rozvoje k f pro všechna uvažovaná x. Závěr: vzorec

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \tag{7.24}$$

platí pro $-1 < x \le 1$. Speciálně platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \log 2\,. \tag{7.25}$$

Příklad 7.4.27. Připomínáme výsledek, který již známe a který je třeba si uvědomit. Maclaurinova řada funkce $f(x) = (1-x)^{-1}$ je velmi jednoduchá. Platí

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\,, \qquad x \in (-1,1)\,. \tag{7.26}$$

Řada vpravo diverguje pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$. Jak se to dá využít pro jednodušší přístup k odvození některých rozvojů si ukážeme v následující kapitole.

Příklad 7.4.28 (binomický rozvoj). Obdobně jako vzorec pro Maclaurinův rozvoj $\log(1+x)$ se dokazuje vzorec zobecňující známou binomickou větu. Redukuje se na tuto větu pro $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$. V těchto speciálních případech vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Pro x vyhovující podmínce $|x| < 1$ platí i pro ostatní $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \binom{\alpha}{0} x^0 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots\,, \tag{7.27}$$

kde pro $k \in \mathbb{N}$ a $m \in \mathbb{R}$ je opět

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!}\,, \quad \binom{m}{0} = 1\,.$$

Lze snadno dokázat, že řada vpravo absolutně konverguje pro všechna x, pro něž platí $|x| < 1$. To, že se součet řady shoduje s funkcí na levé straně, plyne pro $0 \le x < 1$ např. z Lagrangeova tvaru zbytku, pro $-1 < x < 0$ je nutno opět použít Cauchyho tvar zbytku. Ten nám dá výsledek i pro $|x| < 1$, budeme-li postupovat poněkud rafinovaněji takto (srovnejte s vyšetřením $\log(1+x)$):

Pro $n \in \mathbb{N}$ je Taylorův polynom $T_n(x)$ v $x_0 = 0$ roven n-tému částečnému součtu řady (7.27) a pro Cauchyho tvar zbytku dostáváme pro $|x| < 1$, $\zeta = \theta x$, a $0 < \theta < 1$

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{(1-\theta)^n x^n x}{n!} f^{n+1}(\theta x) = \\ &= \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!} \Big(\prod_{k=0}^{n} (\alpha - k) \Big) (1+\theta x)^{\alpha - n - 1} = \\ &= \alpha x \cdot (1+\theta x)^{\alpha-1} \cdot \Big(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \Big)^n \prod_{k=1}^{n} \Big[\Big(\frac{\alpha}{k} - 1 \Big) x \Big]\,. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Zvolme nyní pevně x a β tak, že je $|x| < \beta < 1$. Protože je $0 < 1 - \theta < 1 + \theta x$, je

$$0 < (1-\theta)/(1+\theta x) < 1 \tag{7.29}$$

a lze nalézt $m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|(\alpha/k - 1)x| < \beta \tag{7.30}$$

pro všechna $k > m$. Nyní položme $M = 2^{\alpha-1}$ pro $\alpha \geq 1$ a $M = (1-\beta)^{\alpha-1}$ pro $\alpha < 1$. Číslo M je nezávislé na n a platí

$$0 < (1+\theta x)^{\alpha-1} \leq M \tag{7.31}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (číslo θ na n závisí). Z rovnosti (7.28) a odhadů (7.29) – (7.31) dostáváme

$$|R_n(x)| \leq |\alpha| M(|\alpha|+1)^m \beta^{n-m}$$

pro všechna $n > m$, a tedy $R_n(x) \to 0$ pro $n \to \infty$. Tím je vzorec (7.27) pro $|x| < 1$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ dokázán. V bodě $x = -1$ jsme dokázali konvergenci této řady pro $\alpha > 0$ v Poznámce 3.2.33; k binomické řadě se ještě vrátíme a ukážeme si trik, kterým lze předcházející dosti složitý výpočet obejít.

Příklad 7.4.29 (Cauchy 1822). Nechť $f(x) = \exp(-1/x^2)$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Tato funkce je všude na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kladná. V Příkladu 6.3.12 jsme dokázali, že je spojitá na $\mathbb{R}$ a že má na $\mathbb{R} \setminus 0$ všude derivaci; z jejího tvaru je též patrné, že je $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Nyní ukážeme, že platí $f^{(n)}(0) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Protože pro každý polynom P platí pro všechna $x \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})$

$$\begin{aligned}(P(1/x)\exp(-1/x^2))' &= \\ = P'(1/x)(-1/x^2)(\exp(-1/x^2) + P(1/x)(2/x^3)(\exp(-1/x^2) &= \\ = Q(1/x)(\exp(-1/x^2)\,,\end{aligned}$$

kde Q je opět polynom, stačí podle Věty 7.1.2 ukázat, že limita funkce stojící v předchozím vztahu na pravé straně poslední rovnosti je v bodě 0 rovna 0. K tomu však stačí dokázat, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ je $\lim_{x\to 0} \exp(-1/x^2)/x^k = 0$. Mimo bod 0 platí

$$\exp(1/x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!x^{2k}} > \frac{1}{m!x^{2m}}\,,$$

kde volíme m tak, aby platilo $2m > k$. Odtud plyne

$$0 < |\exp(-1/x^2)/x^k| < k!|x|^{2m-k}\,,$$

a podle Věty 2.3.2 i žádaný výsledek.

Platí tedy $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$ a zároveň Taylorova řada v počátku (tj. Maclaurinova řada) funkce f má všechny koeficienty nulové. Konverguje tedy všude k funkci identicky rovné 0. Tento příklad drasticky ukazuje, že i „nekonečně hladká“ funkce nemusí být „krásná“: její Maclaurinův rozvoj konverguje v $\mathbb{R}$ k funkci, která se shoduje s původní funkcí v jediném bodě.

Příklad 7.4.30. Později získáme Taylorovy rozvoje dalších funkcí, abychom však lépe rozuměli celé problematice, *budeme tyto otázky studovat v* $\mathbb{C}$. Platí

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \,,$$

přičemž vpravo stojí Taylorova řada, která nekonverguje pro žádné $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí $|x| > 1$, i když funkce na levé straně je z $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$; na tomto místě trochu předběhněme a poznamenejme, že body komplexní roviny, v nichž se anuluje jmenovatel, mají od počátku vzdálenost rovnou 1 [10]). Známý český matematik Matyáš Lerch (1860 – 1922) publikoval r. 1888 poměrně jednoduchý příklad funkce $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$, jejíž Taylorův rozvoj v okolí žádného bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ nekonverguje k f. Řadami typu Taylorovy řady (nazývají se mocninné řady) se budeme zabývat podrobněji v následující kapitole. Seznámíme se však pouze s jejich základními vlastnostmi. K tomu budeme potřebovat obor všech komplexních čísel $\mathbb{C}$, který je přirozeným životním prostorem, na němž mocninné řady „žijí“.

Historické poznámky 7.4.31. Problém hledání extrémů se objevuje již v antice. Zdá se, že definice extrému pochází opět až od Louise Augustina Cauchyho (1789 – 1857) z r. 1821 (zde je důraz na přesnosti, intuitivně s nimi matematici starověku pracovali). Za zmínku stojí fakt, že metodu určování extrémů pro *polynomy*, ekvivalentní hledání nulových bodů derivace, používal již Fermat r. 1636, kdy pojem derivace *nebyl znám.* Derivaci v této souvislosti užil jako první teprve až Gottfried Wilhelm Leibniz (1642 – 1727) r. 1684.

Historií l'Hospitalova pravidla jsme se zabývali již dříve. Vyšetřování konvexity sahá až k Johannu Bernoullimu (1667 – 1748), který se zabýval geometrickým smyslem druhé derivace.

Konvexita sama patří k nejdůležitějším matematickým pojmům a i pouze stručný popis jejího vývoje přesahuje rámec našich možností. Zmiňme pouze několik jmen: Hermann Minkowski (1864 – 1909), Eduard Helly (1884 – 1943), Johann Karl Augustin Radon (1887 – 1956). Tito matematici rozeznali její mimořádnou důležitost. Samotná vlastní definice konvexní množiny se explicitně objevuje u Minkowského (1903). Z těch, kteří se věnovali studiu konvexních funkcí, zmíníme alespoň Johana Ludwiga Williama Valdemara Jensena (1859 – 1925) [11]), který se však věnoval spíše zobecnění tohoto pojmu. V r. 1905 dospěl k podmínce z Definice 7.2.1. V práci *Om konvekse funktioner ...* mj. napsal: „Zdá se mi, že pojem konvexní funkce je stejně základní, jako funkce nezáporná nebo funkce rostoucí. Nemýlím-li se v tom, tento pojem by měl nalézt své místo v elementárních textech věnovaných teorii reálných funkcí.“ Dnes existuje několik monografií, které jsou věnovány výlučně konvexitě a konvexním funkcím a v základních textech z analýzy pojem konvexní funkce již dávno zdomácněl; viz např. [6]. Poznamenejme však, že k průkopníkům studia konvexity patřili též Leibniz prací z r. 1677 (publikována 1684) a Newton prací z r. 1671 (publikována 1736).

Na intuitivní úrovni se konvexitou, dokonce v jisté axiomatické podobě, zabýval již Archimedes (287 – 212 před n. l.) [12]), její moderní pojetí se však datuje od doby, kdy

[10]) V komplexní rovině $\mathbb{C}$ je f definována v $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.

[11]) Matematik s patrně nejdelším jménem, alespoň z těch, o kterých se zmiňujeme.

[12]) Zejména v traktátu o kouli a válci.

se jí věnoval Minkowski. Vše, co je v části této kapitole o konvexitě uděláno, lze najít v mnoha knížkách o kalkulu a tvoří to jen malý zlomek látky z [6].

Již jsme se zmínili o složitosti vývoje kolem objevu Taylorovy řady a Taylorova polynomu. Maclaurin popsal konstrukci Taylorovy řady v práci z r. 1742. Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) je spojován s Lagrangeovou větou pro práci, která byla obecněji věnována zbytku v Taylorově vzorci. Důkaz byl založen na Větě 5.2.26, resp. její variantě, kterou však Lagrange nedokázal. Podrobnosti lze nalézt v [2]. Konkrétní Taylorovy rozvoje byly objeveny nezávisle několika matematiky, mezi nimiž byli např. Gregory (1670), Newton (1676), Leibniz (1697) a další. Otázky konvergence se zkoumaly teprve později. Jestliže však zjednodušeně řekneme, že Newton znal Taylorovy řady funkce exp a sin, je to nepřípustné zjednodušení. Popišme stručně, jak např. dospěl k rozvoji funkce sin. Formálně jde o Taylorovu, resp. Maclaurinovu řadu, ale postup jejího získání byl značně komplikovaný.

Při této příležitosti zmiňme jeden zajímavý detail: šíření nových myšlenek před existencí vědeckých časopisů bylo značně závislé na osobní korespondenci objevitelů samotných. Jedním z těch, kdo významně pomáhali myšlenky šířit, byl Marin Mersenne (1588 – 1648), který si dopisoval téměř se všemi evropskými matematiky své doby. Po jeho smrti převzal tuto „informátorskou funkci“ Collins, z jehož korespondence se dovídáme zajímavé údaje o vzniku důležitých matematických objevů. Např. první Newtonovy práce z kalkulu jsou z let 1669 a 1671 (publikována 1736!), ale Newton o nich informoval Collinse dopisem z 10. prosince 1672.

Připomeňme, že Newton v r. 1665 odvodil *binomickou řadu* s racionálním exponentem. Použijeme-li dnes vžité označení, dospěl k formuli

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n}\Big[1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{m/n}{k}Q^k\Big]\,.$$

Proto mohl např. lehce získat rozvoj pro funkci $\sqrt{1-x^2}$. Newton též vyvinul techniku tzv. *inverze řady*, která se dnes prakticky nepoužívá. (Viz [1], str. 204.) Podrobněji: jde o prostředek, jak k funkci dané mocninnou řadou v počátku získat rozvoj funkce k ní inverzní. Newton použil k určení rozvoje funkce sin jako výchozí řadu

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

a "invertoval" ji pomocí inverze řady. Dostal tak nám důvěrně známou řadu

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

Zbývá dodat, jak Newton odvodil shora uvedenou řadu pro arcsin. Postup zahrnoval rozvinutí funkce $f(t)=\sqrt{1-t^2}, t\in[-1,1]$, popisující horní polovinu jednotkové kružnice, o názor opřený výpočet obsahu křivočaře ohraničeného obrazce (části kruhu) pomocí integrace funkční řady člen po členu a nezbytné formální úpravy; viz podrobněji [1], str. 205.

Gregory patrně dospěl k Taylorově řadě pomocí konečných diferencí. Newton i Gregory měli přítele, který byl spolehlivým informátorem o matematických objevech. Byl to John Collins (1625 – 1683), který korespondoval s mnoha matematiky své doby a přispíval tím k šíření objevených poznatků. BROOK TAYLOR (1685 – 1731) v r. 1712 ohlásil a r. 1715 publikoval tvar rozvoje, jemuž dnes dáváme obvykle jeho jméno. Nezabýval se však konvergencí řady, a tak jeho teoretický vklad do pokladnice matematických znalostí nebyl veliký. Nedoceněn zůstává v běžných knížkách o kalkulu Maclaurin, jemuž se připisuje zpravidla jen speciální tvar Taylorovy řady (o středu 0). Maclaurin byl zázračným dítětem: již ve 12 letech začal studovat na univerzitě v Glasgow a v 19 letech byl (v dnešní terminologii) vedoucím katedry matematiky v Aberdeenu. Získal prestižní pocty, mj. v roce 1740 spolu s LEONHARDEM EULEREM (1707 – 1783) a DANIELEM BERNOULLIM (1700 – 1782) za práce o přílivu a odlivu. Jeho jménem se označuje např. *Euler-Maclaurinova formule*, která se však v základním kurzu analýzy neobjevuje.

Přibližme si část Maclaurinovy úvahy z práce *A treatise of fluctions* z r. 1742, týkající se Taylorových polynomů (podle knihy [4]): *Pro funkci* $y = f(x)$ *a daný bod* x_0 *hledáme řadu* (*nebo polynom*)

$$p(x) = p_0 + (x - x_0)\,q_0 + (x - x_0)^2 r_0 + (x - x_0)^3 s_0 + \cdots \tag{$*$}$$

pro kterou

$$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{$**$}$$

tj. obě funkce mají stejné derivace až do jistého řádu v bodě x_0. *Položíme-li* $x = x_0$ *v rovnosti* $(*)$, *dostaneme ze vztahu* $(**)$ *rovnosti* $p_0 = p(x_0) = f(x_0)$. *Derivujeme-li* $(*)$ *a opět položíme* $x = x_0$, *dostaneme* $q_0 = p'(x_0) = f'(x_0)$. *Další derivování dává* $2!r_0 = f''(x_0)$, $3!s_0 = f'''(x_0)$, *atd. Proto řada* $(*)$ *je tvaru*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots$$

a její částečné součty se nazývají Taylorovy polynomy. Jak vidíme, je jeho přístup (ve srovnání s přístupy jeho současníků) docela moderní.

Geometrický přístup k problematice lokální aproximace v podobě Lemmatu 7.4.20 ukazuje patrně nejlépe, že Taylorův polynom, styk křivek apod. nejsou o nic složitější než tečna ke grafu nebo Lagrangeova věta. Ukazuje, že názorný přístup k tečnám, extrémům a konvexitě sahající až k postupnému vzniku diferenciální geometrie, není ničím novým, ale je spíše návratem ke kořenům problémů. Toto poznání nám zprostředkovává mj. i znalost historie matematiky. Matematická analýza nám poskytuje takových příkladů, často i mnohem závažnějších, celou řadu.

Literatura:

[1] Edwards, C. H.: *The historical development of the calculus*, Springer, New York, 1979.

[2] Flett, T. M.: *Some historical notes and speculations concerning the mean value theorems of the differential calculus*, The Institute of Mathematics and its Applications, 1974.

[3] Goldstine, H. H.: *A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century*, Springer, New York, 1977.

[4] Hairer, E., Wanner, G.: *Analysis by its history*, Springer, New York, 1996.

[5] Petr, K.: *Počet differenciální* (*část analytická*), Jednota československých mathematiků a fysiků, Praha, 1923.

[6] Roberts, A. W., Varberg, D. E.: *Convex functions*, Academic Press, New York and London, 1973.

[7] Rudin W.: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Comp., New York, 1976, (3. vydání).

[8] Stromberg, K. R.: *An introduction to classical real analysis*, Wadsworth, Inc., Belmont, CA, 1981.

[9] Šimerka, V.: *Přídavek k Algebře pro vyšší gymnasia*, Tiskem a nákladem Dr. E. Grégra, Praha, 1864.

Kapitola 8

Mocninné řady

I když je tento text věnován analýze v $\mathbb{R}$, musíme udělat jakousi výjimku: mocninné řady je třeba vyložit v komplexním oboru. V jistém smyslu je teorie komplexních funkcí komplexní proměnné ztotožnitelná s teorií mocninných řad, které tvoří její základ a jejich vyšetřování pouze v $\mathbb{R}$ by čtenáři neumožnilo vhled do principů této teorie. Na konci druhého dílu se k mocninným řadám ještě vrátíme.

8.1 Komplexní čísla

V této části zavedeme komplexní čísla a zobecníme poznatky o posloupnostech a řadách na případ posloupností a řad s *komplexními* členy. Zavedení oboru všech komplexních čísel $\mathbb{C}$ není zdaleka tak složité jako zavedení oboru reálných čísel $\mathbb{R}$, pokud již obor $\mathbb{R}$ pokládáme za známý.

Definice 8.1.1. Komplexní čísla jsou uspořádané dvojice reálných čísel. Jestliže $z = [\,x, y\,] \in \mathbb{C}$, pak číslo x nazýváme *reálná část* čísla z a číslo y *imaginární část* čísla z. Píšeme

$$x = \operatorname{Re} z\,, \quad y = \operatorname{Im} z\,.$$

Pro komplexní číslo $[\,0, 1\,]$ zavádíme speciální označení písmenem i. Definujeme *sčítání* a *násobení* komplexních čísel (užíváme opět $+$ a $\cdot$ k označení operací včetně konvence o vynechávání znaku $\cdot$ pro násobení) takto: jsou-li $z_1 = [\,x_1, y_1\,]$, $z_2 = [\,x_2, y_2\,]$ komplexní čísla, klademe

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &:= [\,x_1 + x_2,\, y_1 + y_2\,]\,, \\ z_1 z_2 &:= [\,x_1 x_2 - y_1 y_2,\, x_1 y_2 + x_2 y_1\,]\,. \end{aligned}$$

Množinu všech komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$. Komplexní čísla si často geometricky znázorňujeme pomocí bodů v rovině: číslu $[\,x, y\,]$ odpovídá bod roviny o souřadnicích x, y. Proto se často pro $\mathbb{C}$ užívá též názvů *komplexní rovina*, nebo *rovina komplexních čísel*, nebo *Gaussova rovina*.

Poznámka 8.1.2 (důležitá). Snadno nahlédneme, že pro dvojice s nulovou imaginární částí jsou tyto operace ve shodě s operacemi v $\mathbb{R}$:

$$[\,x_1, 0\,] + [\,x_2, 0\,] = [\,x_1 + x_2, 0\,]\,, \qquad [\,x_1, 0\,] \cdot [\,x_2, 0\,] = [\,x_1 x_2, 0\,]\,;$$

můžeme tedy množinu všech těchto komplexních čísel „ztotožnit“ s $\mathbb{R}$. Zavedené operace vyhovují v $\mathbb{C}$ stejným požadavkům, jako byly ty, které jsme použili k zavádění $\mathbb{R}$ pod čísly (1) – (9); proto je $\mathbb{C}$ pole. Je vhodné uvážit, že prvek opačný k číslu $[\,x, y\,] \in \mathbb{C}$ je číslo $[\,-x, -y\,] \in \mathbb{C}$ a prvek inverzní k číslu $[\,x, y\,] \in \mathbb{C}$, $[\,x, y\,] \neq [\,0, 0\,]$, je číslo

$$\left[\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right] \in \mathbb{C}\,.$$

Ověření se provede přímým výpočtem. Mnoho pojmů, které dále používáme, se zavede analogicky jako v případě $\mathbb{R}$, tedy např. induktivně zavedeme mocniny

$$z^0 = 1,\ z^1 = z,\ z^2 = z \cdot z, \ldots, z^{n+1} = z \cdot z^n\,;$$

polynomy definujeme jako jejich lineární kombinace (s koeficienty z $\mathbb{C}$!) a racionální funkce jako podíly polynomů. Analogicky pracujeme s konvencí o definičním oboru: maximální množinu, kde má „předpis smysl“, hledáme však v $\mathbb{C}$. Zavedení dalších elementárních funkcí je složitější, u odmocnin je řeší algebra (viz ještě níže). Všimněte si, že je $1^2 = (-1)^2 = 1$. Podobně je

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = [\,0, 1\,] \cdot [\,0, 1\,] = [\,-1, 0\,] = -1\,, \quad (-\mathrm{i})^2 = -1\,.$$

Pokud bychom tedy hledali množinu, na které je funkce $z \mapsto z^2$ prostá, nemůže tato množina obsahovat ani $\mathbb{R}$, ani množinu $\{ix;\, x \in \mathbb{R}\}$. Je-li $[\,x, y\,] \in \mathbb{C}$, pak

$$x + \mathrm{i}y = [\,x, 0\,] + \mathrm{i}[\,y, 0\,] = [\,x, 0\,] + [\,0, 1\,] \cdot [\,y, 0\,] = [\,x, 0\,] + [\,0, y\,] = [\,x, y\,]\,,$$

takže lze komplexní čísla zapisovat i ve tvaru, který znáte ze střední školy. Pozor, z rovnosti $z = x + \mathrm{i}y$ obecně neplyne, že $x, y \in \mathbb{R}$, tj. $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Kdykoli však dále použijeme zápis čísla ve tvaru $x + \mathrm{i}y$, pak *předpokládáme*, že již platí $x, y \in \mathbb{R}$ [1]); je to další konvence, kterou používáme.

Definice 8.1.3. Je-li $z = x + \mathrm{i}y$, nazýváme číslo

$$\overline{z} := x - \mathrm{i}y$$

číslem *komplexně sdruženým* k číslu z.
Snadno nahlédneme, že pro $z = x + \mathrm{i}y$ je $z\overline{z} \geq 0$, neboť platí

$$z\overline{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2\,;$$

[1]) Na výjimku z této úmluvy bychom výslovně upozornili.

proto lze definovat pro všechna $z \in \mathbb{C}$

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Pokud znázorňujeme komplexní čísla jako body roviny, je $|z|$ vzdálenost bodu $z = [\,x, y\,]$ od počátku. Analogicky jako v reálném oboru můžeme definovat $\operatorname{sgn} z \;\; = z/|z|$ pro $z \neq [\,0, 0\,] = 0$, přičemž klademe $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Tato definice je opět rozšířením definice sgn z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$. Pro $z \neq 0$ jsme výše ukázali, že platí $z^{-1} = \overline{z}/z\overline{z}$.

Velmi důležitý je fakt, že pro absolutní hodnotu platí i v $\mathbb{C}$ *trojúhelníková nerovnost.* To lze dokázat různě, např. přímo z definice.

Lemma 8.1.4. *Pro každá dvě čísla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí*

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,.$$

Důkaz. Nechť $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$. Dokažme nejprve, že platí nerovnost $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, neboli

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\,.$$

Po umocnění a úpravě dostaneme

$$x_1x_2 + y_1y_2 \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}\,.$$

Nyní stačí dokázat nerovnost

$$|x_1x_2 + y_1y_2| \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}\,, \tag{8.1}$$

ze které snadno plyne nerovnost předcházející. Z ní plyne nerovnost, kterou dostaneme z (8.1) umocněním výrazů na obou jejích stranách, tj. nerovnost

$$(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)\,.$$

Odtud dostaneme jednoduchými úpravami nerovnost

$$2x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2\,,$$

resp. nerovnost

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \geq 0\,.$$

Nyní lze celý postup provést s nezbytnou opatrností při zdůvodňování jednotlivých kroků (při odmocňování) v obráceném pořadí. Tím je první část dokazovaného vztahu odůvodněna. Dále budeme postupovat stejně jako v reálném případě: srovnejte s postupem při důkazu (1.5) v Kapitole 1. Z dokázané nerovnosti snadno dostaneme

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|\,.$$

Dále platí

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|\,, \text{ tj.}$$
$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|\,.$$

Ze symetrie v z_1 a z_2 plyne

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|\,, \text{ takže platí } ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|\,.$$

Protože je $|z_2| = |-z_2|$, dostáváme též

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|\,,$$

čímž je důkaz dokončen. □

Poznámka 8.1.5 (důležitá). Je vhodné si uvědomit, že na $\mathbb{C}$ *nezavádíme* relaci $<$ či $\leq$ jako na $\mathbb{R}$. Komplexní čísla lze uspořádat např. lexikograficky apod., ale ne tak, aby takové uspořádání mělo stejné vlastnosti jako uspořádání relací „<" na $\mathbb{R}$, tj. aby byly splněny vlastnosti (10) – (12) z popisu $\mathbb{R}$. K tomu stačí zvážit, že $\mathrm{i} \neq 0$ a že z obou nerovností $\mathrm{i} > 0$ a $\mathrm{i} < 0$ by z těchto vlastností plynulo

$$\mathrm{i}^2 = -1 > 0\,,$$

což vede ke sporu. V $\mathbb{C}$ lze tedy porovnávat pomocí relací $<$, $\leq$, $>$ a $\geq$ pouze *absolutní hodnoty komplexních čísel.*

Všimněme si blíže ještě otázky, jaké vlastnosti $\mathbb{C}$ vyplývají z těch vlastností $\mathbb{R}$, které plynou z důležitého axiomu (13) o supremu. Ten souvisí úzce s posloupnostmi. Nejprve dokážeme jednoduché tvrzení o odhadech.

Lemma 8.1.6. *Pro $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ platí nerovnosti*

$$0 \leq |x| \leq |z|\,, \quad 0 \leq |y| \leq |z| \quad \textit{a také} \quad 0 \leq |z| \leq |x| + |y|\,. \tag{8.2}$$

Důkaz. Obtížnější je snad pouze si uvědomit, že platí

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|\,. \tag{8.3}$$

Nerovnost však stačí umocnit a upravit na tvar

$$|x| \cdot |y| \geq 0\,.$$

Odtud dostaneme násobením obou stran nerovnosti číslem 2 a přičtením nezáporného čísla $x^2 + y^2$ k oběma jejím stranám další nerovnost, jejíž snadnou úpravou a odmocněním dostaneme (8.3) [2]). □

Definice 8.1.7. Nechť $\{z_n\}$ je posloupnost komplexních čísel, $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$, a nechť $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. Řekneme, že

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z\,, \quad \text{resp.} \quad z_n \to z \quad \text{pro} \quad n \to +\infty\,,$$

pokud je

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0\,.$$

Poznámka 8.1.8. Snadno nahlédnete, že tuto definici lze přepsat i pomocí okolí (srovnejte s (4.2.1)): je-li $\mathcal{U}_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C}\,;\, |z - w| < \varepsilon\}$, pak $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ znamená

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \geq k)(z_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(z))\,.$$

Tak jako v reálném oboru říkáme, že posloupnost $\{z_n\}$ *konverguje* k z. Pojmy typu nevlastních limit v $\mathbb{C}$ zavádět nebudeme. Z Lemmatu 8.1.6 dostaneme okamžitě následující *důležitý* poznatek.

Věta 8.1.9. *Nechť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n \in \mathbb{C}$, a nechť $z = x + \mathrm{i}y$. Potom $z_n \to z$, právě když $x_n \to x$ a současně $y_n \to y$.*

Důkaz. Stačí zvážit, že podle Lemmatu 8.1.6 platí

$$\left.\begin{array}{l} |x_n - x| \\ |y_n - y| \end{array}\right\} \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|\,. \tag{8.4}$$

Platí-li $z_n \to z$ dostaneme z první nerovnosti v (8.4) $x_n \to x$ a zároveň $y_n \to y$. Z druhé nerovnosti plyne zbytek tvrzení. □

Z předchozí věty lehce vyplývá, že v $\mathbb{C}$ platí např. věty o posloupnostech a aritmetických operacích (srovnejte s Větami 2.1.22 a 2.1.30). Nebudeme je však uvádět a dokazovat znovu, neboť by to bylo nudné opakování něčeho, co jsme již dělali. Posuďte to sami na základě (důležitého) příkladu, dříve však uveďme jednu „zřejmou“ definici.

Definice 8.1.10. Budeme říkat, že posloupnost $\{z_n\}$ *komplexních čísel* splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku (kratčeji: je *cauchyovská*), platí-li

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{N})(\forall m, n \geq k)(|z_m - z_n| < \varepsilon)\,.$$

[2]) Tento krok se velmi často vynechává s odvoláním na „ekvivalentní úpravy“, nic takového jsme však nezavedli a tak nám nezbývá, než se alespoň přesvědčit, že nic nebrání „cestě zpět“ k žádanému výsledku.

Velmi jednoduše dokážeme, že $\mathbb{C}$ má s $\mathbb{R}$ společnou důležitou vlastnost, popsanou v následující větě.

Věta 8.1.11. *Posloupnost komplexních čísel* $\{z_n\}$ *je konvergentní v* $\mathbb{C}$*, právě když je cauchyovská.*

Důkaz. Jedna část ekvivalence byla triviální i v $\mathbb{R}$. Je-li $z_n \to z$, pak odhad

$$|z_m - z_n| \le |z_n - z| + |z_m - z|$$

naznačuje, jak se její důkaz provádí. Druhá část však také není obtížná, neboť to obtížné jsme již „odpracovali" v $\mathbb{R}$. Je-li $\{z_n\}$ cauchyovská posloupnost, pak pro reálné a imaginární části platí

$$|x_m - x_n| \le |z_m - z_n|\,, \quad |y_m - y_n| \le |z_m - z_n|$$

a tedy $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ jsou cauchyovské posloupnosti v $\mathbb{R}$. To znamená, že jsou konvergentní; označme

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n\,, \quad y := \lim_{n\to\infty} y_n\,;$$

pak je zřejmé, že platí $z_n \to z \;= x + \mathrm{i}y$. □

Definice 8.1.12. Součet s řady $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ komplexních čísel z_k definujeme analogicky jako v $\mathbb{R}$. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ klademe $s_n := \sum_{k=0}^{n} z_k$ a pokud existuje v $\mathbb{C}$ limita posloupnosti $\{s_n\}$, definujeme

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} z_k\,.$$

Příklad 8.1.13 (důležitý). Snadno vidíme, že platí např.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\, z_k \,| < \infty \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} z_k \;\text{ konverguje}\,.$$

To vyplývá z Věty 8.1.11 a z odhadu, který je obdobný jako v „reálném" případě:

$$|\, z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_m \,| \le |\, z_{n+1} \,| + |\, z_{n+2} \,| + \cdots + |\, z_m \,|\,;$$

Z absolutní konvergence řady vyplývá, že výraz vpravo lze volbou $n, m \in \mathbb{N}$, $n < m$, udělat libovolně malý.

V mnoha případech užíváme zápis, který je stručný, ale vyžaduje určitou pozornost. Napíšeme-li nerovnost mezi komplexními čísly, automaticky tím rozumíme, že tato čísla jsou reálná. V $\mathbb{C}$ jsme nezavedli žádné nevlastní body, takže

$\sum k^{-1} = \infty$ je zápis v $\mathbb{R}$, který v $\mathbb{C}$ postrádá smysl. V těchto případech se musíme orientovat podle kontextu. Ani pro řady v $\mathbb{C}$ nebudeme formulovat a dokazovat všechna tvrzení analogická tvrzením pro řady v $\mathbb{R}$.

Již teď ale prozradíme, že důkaz tzv. Dirichlet-Abelova kritéria (Věta 8.5.3) pro *neabsolutní konvergenci*, které jsme zatím nevyložili, bude poměrně složitý. Proto ho provedeme podrobně.

8.2 Funkce komplexní proměnné

Poznámka 8.2.1. Budeme potřebovat několik základních definic a také některé jednoduché vlastnosti komplexních funkcí. Připomeňme, že zobrazení f s $D_f \subset \mathbb{R}$ a $R_f \subset \mathbb{C}$ nazýváme *komplexní funkce reálné proměnné*, přičemž reálné funkce reálné proměnné

$$f_1(x) : x \mapsto \operatorname{Re} f(x)\,,\ x \in D_f\,, \quad \text{a} \quad f_2(x) : x \mapsto \operatorname{Im} f(x)\,,\ x \in D_f\,,$$

se nazývají velmi přirozeně *reálná část* a *imaginární část* f. Mnoho vlastností f vyplývá z vlastností f_1 a f_2; ty budeme považovat za známé. Analogicky zavádíme f_1 a f_2 i pro $D_f \subset \mathbb{C}$, pak však jsou f, f_1 a f_2 *funkcemi komplexní proměnné*, kterými se v tomto textu budeme zabývat podstatně méně nežli funkcemi reálné proměnné. Důvod je zřejmý: S komplexními funkcemi *reálné* proměnné se zachází totiž poměrně jednoduše, vždy je můžeme rozložit „bodově“ na reálnou a imaginární část, což již jsou reálné funkce reálné proměnné, na jejichž vyšetřování jsme si již zvyklí.

Pro funkce komplexní proměnné je to trochu složitější a vyžaduje to několik zdánlivě „zcela stejných“ definic. Přesněji: jsou sice analogické, ale ve svých důsledcích se přece jen někdy liší. Shrneme je do jediné definice, která následuje.

Definice 8.2.2. Označme pro $\varepsilon > 0$ opět

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_\varepsilon(z) &= \{w \in \mathbb{C};\ |z-w| < \varepsilon\}\,,\\ \mathcal{P}_\varepsilon(z) &= \{w \in \mathbb{C};\ 0 < |z-w| < \varepsilon\} = \mathcal{U}_\varepsilon(z) \setminus \{z\}\,.\end{aligned}$$

Je-li nyní f komplexní funkce komplexní proměnné, pak definujeme

$$\lim_{w \to z} f(w) = A\,,$$

jestliže $A \in \mathbb{C}$ a je splněna podmínka

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall w, 0 < |\,w - z\,| < \delta)(|\,f(w) - f(z)\,| < \varepsilon)\,,$$

neboli po přepsání pomocí $\mathcal{U}$ a $\mathcal{P}$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall w \in \mathcal{P}_\delta(z))(f(w) \in \mathcal{U}_\varepsilon(A))\,.$$

Opět říkáme, že *funkce* f *má v bodě* z *limitu* A, píšeme $f(w) \to A$ pro $w \to z$, atp. Všimněte si, že pracujeme pouze s nerovnostmi mezi reálnými čísly, které popisují vzdálenost bodů. Vše je tedy stejné jako v reálném oboru, avšak s jedinou změnou, že (pouze ze zvykových důvodů) označujeme proměnné zpravidla z, w apod.

Říkáme, že funkce f *je spojitá v bodě* $z \in \mathbb{C}$, jestliže platí $\lim_{w\to z} f(w) = f(z)$. Konečně definujeme *derivaci* $f'(z)$ *funkce* f *v bodě* z jako limitu (pokud existuje)

$$f'(z) := \lim_{w\to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\,, \quad \text{resp.} \quad f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}\,,$$

kde w i h jsou z $\mathbb{C}$. Ekvivalence obou vyjádření platí stejně jako v $\mathbb{R}$; ztotožnění komplexního čísla $[\,0,0\,]$ s číslem 0, na němž jsme se domluvili, nesmí nikoho mást; smysl je vždy jasný ze souvislosti.

Poznámka 8.2.3. Protože je čtenář již zkušenější, odpustili jsme si výčet různých možných přepisů definice limity apod. Poznamenejme pouze, že Carathéodoryho ekvivalentní podmínka existence derivace je opět analogická jako ve Větě 5.2.6; důkaz probíhá obdobně, přičemž v podmínce

$$f(w) - f(z) = \varphi(w)(w - z)$$

stojí vpravo součin *komplexních* činitelů. Čtenář si jistě dokáže samostatně rozmyslet, která tvrzení o limitě, spojitosti, derivaci a aritmetických operacích zůstávají v platnosti i pro právě popsanou situaci v $\mathbb{C}$. Poznamenejme ještě, že Carathéodoryho podmínka je klíčem k větě o derivování složené funkce a že důkaz probíhá stejně jako v reálném případě, i když skládáme *komplexní* funkce *komplexní* proměnné.

Jako jednoduchou ukázku tvrzení o derivování dokažme, že např. z existence derivace $f'(z)$ (z definice vyplývá, že je automaticky $f'(z) \in \mathbb{C}$, tedy derivace je „vlastní“) plyne spojitost:

Lemma 8.2.4. *Nechť komplexní funkce komplexní proměnné* f *má v bodě* z_0 *derivaci* $f'(z_0)$*. Potom je funkce* f *spojitá v bodě* z_0*.*

Důkaz. Snadno nahlédneme, že platí

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} f(z) - f(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,(z - z_0) = \\ &= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z\to z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0\,,\end{aligned}$$

což již dává dokazované tvrzení. $\square$

Pokud však čtenář nabyl dojmu, že je stejné *všechno*, je to ukvapený a mylný závěr. Tak např. tvrzení analogické Lagrangeově větě o přírůstku *neplatí*; jeho charakter přitom připouští „přirozené“ zobecnění pro komplexní funkce reálné proměnné. Přesto však *nebudeme opakovat* ani důkazy základních vět o derivování z reálného oboru, které platí analogicky i v komplexním oboru; budeme je považovat za dokázané. Prozradíme však jeden *velmi podstatný* rozdíl: existuje-li derivace funkce f pro každé $z \in \mathbb{C}$, má f derivace *všech řádů*, tj. existují $f^{(n)}(z)$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$ (vyšší derivace se definují opět rekurentně jako v $\mathbb{R}$).

Budeme potřebovat jedno zdánlivě triviální tvrzení o konstantních funkcích:

Lemma 8.2.5. *Nechť f je komplexní funkce definovaná na $\mathbb{C}$ a nechť $f'(z) = 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Potom je funkce f konstantní na $\mathbb{C}$.*

Důkaz. Rozložme funkci f na reálnou a imaginární část $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$ a uvažujme ji na úsečce o krajních bodech $0 = [\,0,0\,]$ a $1 = [\,1,0\,]$. Je $f'(z) = 0$ ve všech bodech z a zřejmě

$$\lim_{h\to 0,\, h\in\mathbb{C}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0,\, h\in\mathbb{R}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = 0\,.$$

Pro restrikci g funkce f na tuto úsečku tedy platí $g'(x,0) = g_1'(x,0) + \mathrm{i} g_2'(x,0) = 0$; složky g_1 a g_2 jsou však již spojité *reálné funkce na intervalu* $[\,0,1\,]$ a jsou podle Lagrangeovy věty konstantní. Funkce g je tedy konstantní na intervalu $[\,0,1\,]$ a proto i funkce f je na uvažované úsečce konstantní a $f(0) = f(1)$.

Zvolme nyní $z \in \mathbb{C}$ libovolně a uvažujme f na úsečce o krajních bodech 0, z. Pak ale body $w = tz$, $t \in [\,0,1\,]$ jsou všechny body uvažované úsečky a pro funkci $g(t) := f(tz)$, $t \in [\,0,1\,]$ podle věty o derivování složené funkce platí rovnost $g'(t) = f'(tz)z = 0$, $t \in [\,0,1\,]$. Na funkci g aplikujeme úvahu provedenou v první části důkazu, čímž dostaneme $f(0) = g(0) = g(1) = f(z)$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$, takže funkce f je konstantní v $\mathbb{C}$. $\square$

8.3 Mocninné řady

Nyní již obrátíme pozornost k mocninným řadám a funkcím, které dostaneme jako jejich součty. Poznamenejme, že například Leonhard Euler (1707 – 1783) a jeho vrstevníci je považovali za „polynomy nekonečného stupně“ a jako s polynomy s nimi i zacházeli.

Již dříve jsme v Kapitole 7 dokázali rovnost (7.4.14)

$$\exp x = \sum \frac{x^k}{k!}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

To nás motivuje k tomu, abychom analogicky definovali exponenciálu i v komplexním oboru: dosadíme nyní $z \in \mathbb{C}$ za x a určíme ta $z \in \mathbb{C}$, pro která řada konverguje. K vyšetření absolutní konvergence užijeme podílové kritérium:

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right| : \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1}\,.$$

Odtud plyne s ohledem na
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0\,,$$
že řada všude v $\mathbb{C}$ *absolutně konverguje*.

Definice 8.3.1. Pro všechna $z \in \mathbb{C}$ definujeme
$$\exp z \;= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,. \tag{8.5}$$

Takto definovaná funkce je rozšířením „reálné exponenciály“, přičemž, jak se ukáže, toto rozšíření je jednoduchými vlastnostmi určeno jednoznačně.

Definice 8.3.2. Nechť z, z_0 a a_k jsou pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ vesměs z $\mathbb{C}$. Řada tvaru
$$\sum a_k (z - z_0)^k\,, \tag{8.6}$$
se nazývá *mocninná řada*. Čísla a_k, $k \in \mathbb{N}_0$, jsou *koeficienty* řady (8.6) a číslo z_0 je její *střed*.

Úmluva 8.3.3. Nyní bude výhodné *změnit úmluvu* a vynechávat (dokud nebude výslovně řečeno něco jiného) u řad sčítací meze v případě, že sčítáme *od indexu* 0. To znamená, že píšeme
$$\sum a_k := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,,$$
pokud například z důvodů lepší čitelnosti textu při náhledu na definice či tvrzení není vhodné tuto konvenci nepoužít.

Smysl zavedené „geometrické“ terminologie bude patrný z dalšího lemmatu. Všimneme si nejprve, jak vypadá *obor konvergence* řady (8.6), tj. množina všech takových $z \in \mathbb{C}$, pro něž (8.6) konverguje.

Lemma 8.3.4. *Nechť mocninná řada* (8.6) *konverguje v bodě* $\zeta \in \mathbb{C}$*. Potom* (8.6) *konverguje* absolutně *pro každé* $z \in \mathbb{C}$*, pro něž platí*
$$|\, z - z_0 \,| < |\, \zeta - z_0 \,|\,. \tag{8.7}$$

Důkaz. Pro $\zeta = z_0$ se řada redukuje na konečný součet, tedy absolutně konverguje; tento samozřejmý fakt není obsahem tvrzení. Nechť je tedy $\zeta \neq z_0$ a $z \in \mathbb{C}$ vyhovuje odhadu (8.7). Pak existuje $0 \le M < \infty$ tak, že pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ platí
$$|a_k(z - z_0)^k| \le |a_k(\zeta - z_0)^k| \cdot \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|^k \le M \left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|^k\,.$$

Existence M plyne z konvergence (8.6) v bodě ζ, odhadujeme jím velikost členů *konvergentní* řady. Pro vyšetřovanou řadu jsme tak našli konvergentní majorantu, kterou je geometrická řada s kvocientem menším než 1. $\square$

Poznámky 8.3.5. 1. Každá mocninná řada (absolutně) konverguje v bodě z_0. V tomto bodě se řada redukuje na konečný součet, který má jediný člen.

2. Absolutní konvergence mocninné řady v bodě z závisí pouze na vzdálenosti bodu z od jejího středu z_0. Při zkoumání mocninných řad proto stačí zabývat se pouze řadami tvaru $\sum a_k z^k$.

3. Z Lemmatu 8.3.4 plyne, že existuje jediné takové $0 \le R \le +\infty$, pro něž platí

$$R := \sup\{|z - z_0|;\ \sum a_k (z - z_0)^k \text{ konverguje}\}\,. \tag{8.8}$$

Definice 8.3.6. Číslo R, definované vztahem (8.8), se nazývá *poloměr konvergence* řady (8.6). Množina

$$\mathcal{K}(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z - z_0| < R\}$$

se nazývá *kruh konvergence* řady (8.6).

Tato terminologie je přirozená (až snad na „degenerované případy“ $R = 0$ a $R = +\infty$; pro $R = 0$ je kruh konvergence prázdná množina, řada (8.6) *vždy* konverguje v bodě z_0).

Zřejmě totiž řada (8.6) konverguje (a to dokonce absolutně) pro všechna $z \in \mathcal{K}(z_0, R)$ a diverguje pro všechna z, $|z - z_0| > R$. Touto vlastností se často poloměr konvergence *definuje*.

Poznámka 8.3.7. Z Lemmatu 8.3.4 vyplývá, že pro poloměr konvergence mocninné řady (8.6) platí též

$$R = \sup\{|z - z_0|;\ \sum a_k (z - z_0)^k \text{ konverguje absolutně}\}\,.$$

Poznamenejme, že pro $R \in (0, \infty)$ se někdy nazývá množina $\{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| = R\}$ *konvergenční kružnice* řady (8.6); Toto označení budeme používat jen ojediněle. Velmi brzy zjistíme, že o konvergenci řady (8.6) na této kružnici nelze obecně nic dokázat.

Příklad 8.3.8. Pro řadu (8.5) platí $R = +\infty$. Případ $R = 0$ nastává pro řadu $\sum (k!) z^k$. Je-li konečně $0 < a < \infty$, pak řada $\sum (z/a)^k$ má poloměr konvergence $R = a$. Ve všech případech to plyne snadno z podílového kritéria.

Jestliže derivujeme *konečný* součet funkcí, které mají derivaci, nevznikají problémy. Naproti tomu, jak ukážeme ve druhém dílu, obecně *neplatí* rovnost

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\Big)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'\,,$$

což souvisí se záměnou limit: jednou v definici součtu řady a druhou v definici derivace. Je proto zajímavé, že mocninnou řadu lze v kruhu konvergence derivovat „člen po členu“ a derivace součtu řady je součtem derivací jednotlivých členů řady.

K řadě (8.6), tj. řadě $\sum a_k(z-z_0)^k$ o poloměru konvergence R přiřaďme člen po členu derivovanou řadu

$$\sum ka_k(z-z_0)^{k-1}, \tag{8.9}$$

jejíž poloměr konvergence označíme R'.

Lemma 8.3.9. *Platí $R = R'$, tj. obě řady* (8.6) *a* (8.9) *mají stejný poloměr konvergence.*

Důkaz. Zřejmě R' je i poloměrem konvergence řady

$$\sum ka_k(z-z_0)^k. \tag{8.10}$$

Budeme dokazovat nejprve nerovnost $R' \le R$, která zřejmě platí při $R' = 0$. Předpokládejme tedy, že $R' > 0$ a zvolme r, $0 < r < R'$. Potom (8.10) konverguje absolutně na kružnici $\{z \in \mathbb{C}; |\, z - z_0 \,| = r\}$ a s ohledem na zřejmou nerovnost

$$|\, a_k(z-z_0)^k \,| \le |\, ka_k(z-z_0)^k \,|\,,$$

která platí pro všechna $k \in \mathbb{N}$, je $r \le R$, a tedy i $R' \le R$.

Při $R = 0$ nerovnost $R \le R'$ zřejmě platí, dokažme ji tedy pro $R > 0$. Zvolme r, $0 < r < R$. Pak existuje bod z tak, že $r < |\, z - z_0 \,| < R$, ve kterém řada (8.6) konverguje absolutně, takže existuje M, pro něž pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|\, a_k(z-z_0)^k \,| \le M < +\infty\,.$$

Proto pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|ka_k r^k| = |\, a_k(z-z_0)^k \,| \cdot k \cdot \left|\, \frac{r}{z-z_0} \,\right|^k \le Mkq^k\,.$$

Vpravo stojí členy konvergentní majorantní řady, což plyne např. z D'Alembertova podílového kritéria. Odtud vyplývá $r \le R'$, a tedy i $R \le R'$, čímž je důkaz dokončen. $\square$

Věta 8.3.10. *Předpokládejme, že řada* (8.6) *má poloměr konvergence $R > 0$ a označme*

$$f(z) = \sum a_k(z-z_0)^k\,, \quad g(z) = \sum ka_k(z-z_0)^{k-1}\,. \tag{8.11}$$

Potom pro všechna w z kruhu konvergence $\mathcal{K}(z_0, R)$ platí

$$f'(w) = g(w)\,.$$

Důkaz. Důkaz zřejmě stačí provést pro případ $z_0 = 0$. Zavedeme pomocné označení pro částečné součty a zbytky

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k\,, \quad R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k\,.$$

Zvolme $w \in \mathcal{K}(0,R)$ a pak $r > 0$ tak, aby platilo $0 < |w| < r < R$; potom $f(z) = s_n(z) + R_n(z)$ v $\mathcal{K}(0,R)$ a pro $z \neq w$, $z, w \in \mathcal{K}(0,r)$, platí

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w) &= \Big[\,\frac{s_n(z)-s_n(w)}{z-w} - s_n'(w)\Big] + \\ &= \big[\,s_n'(w) - g(w)\,\big] + \Big[\,\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\,\Big]\,.\end{aligned}$$

Nyní ukážeme, že výraz vpravo lze odhadnout číslem $\varepsilon > 0$ volbou dostatečně malé hodnoty $|z-w|$. Absolutní hodnotu každého z výrazů vpravo odhadneme číslem $\varepsilon/3$ takto: je

$$\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w} = \frac{1}{z-w}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(z^k - w^k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\Big(\frac{z^k-w^k}{z-w}\Big)\,,$$

a protože platí

$$\Big|\,\frac{z^k-w^k}{z-w}\,\Big| = |\,z^{k-1} + z^{k-2}w + \cdots + w^{k-1}\,| \le kr^{k-1}\,,$$

můžeme odhadnout

$$\Big|\,\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\,\Big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |\,a_k\,|\,k\,r^{k-1}\,.$$

Výraz vpravo je zbytkem konvergentní řady, takže existuje m_1 tak, že pro $n \ge m_1$ je odhadnut shora číslem $\varepsilon/3$.

Protože dále platí $|\,s_n'(w) - g(w)\,| < \varepsilon/3$ pro všechna $n \ge m_2$ s dostatečně velkým m_2, zvolíme $m \ge \max\{m_1, m_2\}$ a pak $0 < \delta < r - |\,w\,|$ tak, aby pro všechna $z \in B(w,\delta)$ platilo

$$\Big|\,\frac{s_n(z)-s_n(w)}{z-w} - s_n'(w)\Big| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Z nalezených odhadů vyplývá, že na $B(w,\delta)$ pro dostatečně malé $\delta > 0$ je

$$\Big|\,\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(w)\Big| < \varepsilon\,,$$

čímž je důkaz dokončen. □

Z dokázané věty vyplývá spojitost funkce, která je součtem mocninné řady, v jejím kruhu konvergence. Protože však postupným derivováním člen po členu dostáváme opět mocninné řady se stále stejným poloměrem konvergence, vyplývá odtud jednoduchý důsledek.

Důsledek 8.3.11. *Je-li $f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n$ a řada v rovnosti vpravo má poloměr konvergence $R > 0$, pak má f v $\mathcal{K}(z_0, R)$ derivace všech řádů, lze je všechny vyjádřit mocninnými řadami a platí*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}\,, \quad z \in \mathcal{K}(z_0, R)\,.$$

Důsledek 8.3.12. *Za stejných předpokladů jako v Důsledku 8.3.11 platí*

$$k!\, a_k = f^{(k)}(z_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

a koeficienty a_n jsou tedy ve vyjádření $f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k$ jednoznačně určeny.

Poznámka 8.3.13 (důležitá). Nejen derivováním, ale i integrací „člen po členu“ se poloměr konvergence mocninné řady nemění. Jedinou částí roviny, kde dochází při těchto operacích eventuálně ke změnám v konvergenci, je konvergenční kružnice. Je-li proto

$$f(z) = \sum a_k z^k$$

a řada v této rovnosti má poloměr konvergence $R > 0$, má tentýž poloměr konvergence i řada v rovnosti

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

a platí $G'(z) = f(z)$, $z \in \mathcal{K}(0, R)$.

Ukážeme si, jak lze poznatky o mocninných řadách poměrně široce využít nejen pro hledání rozvojů některých funkcí, ale i pro sčítání číselných řad.

Příklad 8.3.14 (Gregory 1671*). Ukažme si jednoduchý, avšak důležitý příklad: určíme rozvoj funkce arctg v mocninou řadu o středu 0. Je

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}\,,$$

a tedy („integrační konstanta c“ je rovna 0)

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,.$$

Poznamenejme, že exp i arctg jsou z $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{R})$, ale jejich rozvoje o středu 0 mají *různé* poloměry konvergence. Při vyšetřování na $\mathbb{R}$ bychom důvod stěží nalezli, avšak v $\mathbb{C}$ si snadno povšimneme, že kořeny rovnice $x^2+1=0$ leží na konvergenční kružnici $\mathcal{C}(0,1)$ Maclaurinových rozvojů funkce $1/(x^2+1)$ a funkce arctg.

Příklad 8.3.15. Tento příklad je převzat z knihy [6], str. 485. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme n-tý částečný součet $s(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2$. Potom platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(n)}{n!} = \frac{17e}{6}\,.$$

Na první pohled se zdá tento výsledek téměř magický. Uvědomíme–li si však, že platí

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,$$

stačí dokázat, že je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n!} = 17e\,. \tag{8.12}$$

Řada v rovnosti (8.12) vlevo zřejmě konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$ podle podílového kritéria. Hledejme nyní vhodné vyjádření funkce f, které nám umožní řadu sečíst. Platí

$$xe^x = \sum \frac{x^{n+1}}{n!}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

a tedy po dvojím zderivování

$$(2+x)e^x = \sum \frac{n(n+1)x^{n-1}}{n!}\,.$$

Dosadíme nyní x^2 za x, čímž dostaneme

$$(2+x^2)e^{x^2} = \sum \frac{n(n+1)x^{2n-2}}{n!}\,.$$

Nyní násobíme obě strany rovnosti x^3 a pak ještě jednou derivujeme. Obdržíme

$$(2x^6+9x^4+6x^2)e^{x^2} = \sum \frac{n(n+1)(2n+1)}{n!}x^{2n}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Protože je vlevo v rovnosti spojitá funkce proměnné x, stačí při výpočtu limity pouze dosadit $x=1$, z čehož již plyne žádaný výsledek.

Poznamenejme již na tomto místě, že pomocí mocninných řad budeme „sčítat“ i některé divergentní řady pomocí tzv. Abelovy metody. Další řešené příklady nalezne čtenář ve skriptech [4].

8.4 Zlepšení kritérií konvergence

Víme, že každá mocninná řada má poloměr konvergence R, $0 \le R \le +\infty$. Jeho výpočet pro jednoduché mocninné řady není složitý, existuje však nějaký vzorec, kterým určíme toto R pro *jakoukoli* mocninnou řadu? Abychom ho ho odvodili, vrátíme se ještě jednou k posloupnostem reálných čísel. Dokázali jsme již řadu důležitých vět: připomeňme větu o existenci konvergentní vybrané posloupnosti z libovolné omezené posloupnosti (Věta 2.4.4) a Bolzano-Cauchyho podmínku pro konvergenci posloupnosti (Věta 2.4.8).

K těmto tvrzením se úzce váže pojem z následující definice. Pomocí něj doplníme naše dosavadní poznatky o limitě posloupností v $\mathbb{R}$.

Definice 8.4.1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a nechť $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$, pro kterou v $\mathbb{R}^*$ existuje $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. Potom tuto limitu nazýváme *hromadný bod* posloupnosti $\{a_n\}$. Množinu všech hromadných bodů posloupnosti $\{a_n\}$ budeme značit $H(\{a_n\})$.

Věta 8.4.2 (Weierstrass 1874). *Každá posloupnost $\{a_n\}$ má alespoň jeden hromadný bod.*

Důkaz. Skutečně, je-li $\{a_n\}$ navíc omezená, existuje podle Věty 2.4.4 její konvergentní podposloupnost. Není-li omezená, pak není omezená shora nebo zdola a snadno sestrojíme její podposloupnost, která má limitu $+\infty$ nebo $-\infty$: tak např. v prvém případě vybíráme $a_{n_k} \ge k$ a současně $n_k > n_{k-1}$. □

Poznámka 8.4.3. Předcházející větě se obvykle také říká *Bolzano-Weierstrassova věta*, i když je nyní vyjádřena poněkud jinak a jde o hromadný bod v $\mathbb{R}^*$; Weierstrass analogickou větu uváděl v r. 1874 na přednáškách, ale pouze pro *omezenou* posloupnost. Pro omezené posloupnosti platí tato věta i v $\mathbb{C}$.

Tvrzení 8.4.4. *Nechť $H := H(\{a_n\})$ je množina všech hromadných bodů posloupnosti $\{a_n\}$. Potom $\sup H$ a $\inf H$ jsou prvky H.*

Důkaz. Podle Věty 8.4.2 je $H \ne \emptyset$. Nechť $\alpha := \inf H$, $\beta := \sup H$, takže $\alpha \le \beta$. Je-li $+\infty \in H$, pak $\sup H = +\infty \in H$. Analogicky pro $-\infty \in H$ je zřejmě $\inf H = -\infty \in H$. Nechť je $\beta \in \mathbb{R}$. Popíšeme konstrukci a_{n_m}, pro kterou je $\lim_{m\to\infty} a_{n_m} = \beta$. Volme $\varepsilon > 0$. Pro všechna $b \in H$ je $b < \beta + \varepsilon$ a z definice suprema vyplývá, že existuje $b \in H$, pro něž platí $b > \beta - \varepsilon/2$. Protože existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}$, pro kterou $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = b$, platí $a_n > b - \varepsilon/2 > \beta - \varepsilon$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$. Pro tato a_n platí $a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(\beta)$. Nyní volme postupně $\varepsilon = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, a sestrojme popsaným postupem vybranou posloupnost $\{a_{n_m}\}$ tak, že $\{n_m\}$ je rostoucí a

$$|\beta - a_{n_m}| < 1/m\,.$$

Tato vybraná posloupnost konverguje k β, takže je $\beta \in H(\{a_n\})$. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ postupujeme analogicky. $\square$

Jako jednoduchý důsledek předcházejících úvah dostaneme toto tvrzení:

Lemma 8.4.5. *Posloupnost $\{a_n\}$ reálných čísel má limitu, právě když má jediný hromadný bod.*

Důkaz. Je-li $\lim a_n = a$, má každá vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$ podle Tvrzení 2.4.13 rovněž limitu a a $H(\{a_n\}) = \{a\}$. Jestliže $H(\{a_n\}) = \{a\}$ a přitom neexistuje $\lim a_n$, pak z negace definice limity posloupnosti vyplývá existence takového $\varepsilon > 0$, že nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$ neleží v okolí $U_\varepsilon(a)$. Lze tedy vybrat z $\{a_n\}$ posloupnost s hromadným bodem různým od a. Pak ale $H(\{a_n\})$ obsahuje alespoň dva body a nalezený spor dokazuje druhou část dokazované ekvivalence. $\square$

Definice 8.4.6. Čísla $\max H$ a $\min H$ v $\mathbb{R}^*$ z Tvrzení 8.4.4 se nazývají *limes superior* a *limes inferior* posloupnosti $\{a_n\}$. K jejich označení používáme symbolů

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \min H\,, \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n := \max H\,.$$

Poznámka 8.4.7. Zřejmě tedy při označení z předchozí definice je $\lim a_n = a$, právě když $\liminf a_n = \limsup a_n = a$.

Lemma 8.4.8. *Pokud jsou čísla $\beta := \limsup a_n$ a $\alpha := \liminf a_n$ z Definice 8.4.6 konečná, jsou* charakterizována *následujícími vlastnostmi: pro každé $\varepsilon > 0$ platí*

$$\begin{aligned}
a_n &< \beta + \varepsilon && \text{pro skoro všechna } n \in \mathbb{N}\,,\\
a_n &> \beta - \varepsilon && \text{pro nekonečně mnoho } n \in \mathbb{N}\,,\\
a_n &> \alpha - \varepsilon && \text{pro skoro všechna } n \in \mathbb{N}\,,\\
a_n &< \alpha + \varepsilon && \text{pro nekonečně mnoho } n \in \mathbb{N}\,.
\end{aligned}$$

Důkaz. Pokud by množina $\{n;\, a_n > \beta + \varepsilon\}$ nebyla konečná, mohli bychom z posloupnosti $\{a_n\}$ vybrat podposloupnost s limitou $+\infty$ nebo konvergentní podposloupnost s limitou $a \geq \beta + \varepsilon$. To však vede ke sporu s definicí $\limsup a_n$ jako maxima množiny hromadných hodnot posloupnosti a_n. Kdyby naopak byla konečná množina $\{n; a_n > \beta - \varepsilon\}$, neexistoval by žádný hromadný bod $\{a_n\}$, který by byl větší než $\beta - \varepsilon$, což je opět spor. Zcela obdobně se dokáže další část tvrzení o α. $\square$

Poznámka 8.4.9. Hromadné body $\limsup a_n$ a $\liminf a_n$ *existují* pro každou posloupnost $\{a_n\}$. Nám umožní dát „limitním kritériím" pro konvergenci řad, která jsme poznali již v Kapitole 3, efektivnější podobu. Limitní formy kritérií, které jsme odvodili, trpí totiž jednou nevýhodou: limita, která v nich vystupuje, nemusí v některých případech existovat. Stačí však malá modifikace a tato vada na kráse zmizí: kritéria přestanou být na existenci limit závislá. Ukažme si to na příkladu odmocninového kritéria.

Věta 8.4.10 (odmocninové kritérium). *Nechť pro řadu $\sum a_n$ s nezápornými členy a_n platí*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1\,. \tag{8.13}$$

Potom řada $\sum a_n$ konverguje. Platí-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.

Důkaz. Platí-li (8.13), zvolíme q tak, aby platilo $\limsup \sqrt[n]{a_n} < q < 1$. Podle Lemmatu 8.4.8 platí $\sqrt[n]{a_n} < q < 1$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Nyní již stačí použít Lemma 3.2.13, podle něhož řada $\sum a_n$ konverguje. Podobně v případě platnosti obrácené nerovnosti zvolíme q tak, aby platilo $1 < q < \limsup \sqrt[n]{a_n}$. Pak platí, opět podle Lemmatu 8.4.8, pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ nerovnost $\sqrt[n]{a_n} > 1$, z níž plyne pro tato n nerovnost $a_n > 1$. Proto není splněna nutná podmínka pro konvergenci řady $\sum a_n$. □

Poznámka 8.4.11. Po provedené modifikaci odmocninové kritérium ve znění z Lemmatu 8.4.10 *nedává řešení* otázky konvergence řady $\sum a_n$ pouze v jediném případě, totiž pro $\limsup(a_n)^{1/n} = 1$. Podobně jako odmocninové kritérium lze modifikovat i kritérium podílové, resp. kritérium Raabeho. U podílového kritéria je třeba jistá opatrnost, proto následující Větu 8.4.12 dokážeme.

Věta 8.4.12 (podílové kritérium). *Nechť pro řadu $\sum a_n$ s nezápornými členy a_n platí*

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1\,. \tag{8.14}$$

Potom řada $\sum a_n$ konverguje. Platí-li $\liminf(a_{n+1}/a_n) > 1$, pak řada $\sum a_n$ diverguje.

Důkaz. Je-li $\limsup(a_{n+1}/a_n) < 1$, pak existuje q tak, že platí $\limsup(a_{n+1}/a_n) < q < 1$. Podle Lemmatu 8.4.8 platí $(a_{n+1}/a_n) < q < 1$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Nyní již stačí použít Lemma 3.2.16, podle něhož řada $\sum a_n$ konverguje.

Platí-li $\liminf(a_{n+1}/a_n) > 1$, pak zvolíme q tak, aby $\liminf(a_{n+1}/a_n) > q > 1$. Podle Lemmatu 8.4.8 platí $(a_{n+1}/a_n) > q > 1$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$. Nyní již stačí opět použít Lemma 3.2.18. Vidíme, že dostáváme „méně" než u odmocninového kritéria. □

Poznámka 8.4.13. Všimneme si efektivity kritérií ještě trochu podrobněji. Poměrně jednoduše lze dokázat nerovnosti, které platí mezi lim inf a lim sup výrazů, vyskytujících se v odmocninovém a v podílovém kritériu.

Lemma 8.4.14. *Pro posloupnost kladných čísel $\{a_k\}$ platí nerovnost*

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \le \liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \le \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \le \limsup_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Důkaz. Prostřední nerovnost je zřejmá. Stačí tedy dokázat první z nerovností, třetí se dokáže podobně jako první; tu nyní dokážeme. V případě, že má výraz vlevo hodnotu 0 nerovnost zřejmě platí. Vyšetřeme případ

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = a > 0\,.$$

Pro každé $0 < \alpha < a$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $k \geq m$ platí

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > \alpha\,.$$

Jestliže těchto $(k-m)$ nerovností ve zřejmém smyslu „vynásobíme“, dostaneme

$$\frac{a_k}{a_m} = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_{m+1}}{a_m} > \alpha^{k-m}\,.$$

Odtud obdržíme jednoduchou úpravou

$$a_k > a_m \alpha^{k-m} = \alpha^k \bigl(a_m \alpha^{-m}\bigr)\,, \quad \text{neboli} \quad \sqrt[k]{a_k} > \alpha \bigl(a_m \alpha^{-m}\bigr)^{1/k}\,,$$

z čehož již plyne přechodem k lim inf pro $k \to \infty$

$$\liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \geq \liminf_{k\to\infty} \alpha \bigl(a_m \alpha^{-m}\bigr)^{1/k} = \alpha\,.$$

Vzhledem k tomu, že nerovnost platí pro všechna kladná $\alpha < a$, dostáváme

$$\liminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \geq a = \liminf_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}\,,$$

čímž je důkaz nerovnosti dokončen. □

Odtud vyplývá i výsledek, který jsme dokázali v Lemmatu 6.5.9. Nyní si již snadno a za obecnější situace můžeme ukázat, že odmocninové kritérium je opravdu „silnější“: odmocninovým kritériem lze rozhodnout o konvergenci řady, pro kterou nám odmocninové kritérium rozhodnutí neposkytne. Vyšetříme řady

$$\text{(a)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(-1)^k - k} = \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \cdots\,,$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k-(-1)^k} = 2^1 + 2^2 + 2^1 + 2^4 + 2^3 + 2^6 + 2^5 + \cdots\,.$$

V případě (a) je

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\,, \qquad \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8}\,,$$

v případě (b) je

$$\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 8\,, \qquad \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\,.$$

I když je evidentně řada (a) konvergentní a řada (b) divergentní, nelze to zjistit podle Věty 8.4.12. Protože však platí

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim 2^{((-1)^n - n)/n} = 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1 \quad \text{v případě (a)}\,,$$

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim 2^{(n-(-1)^n)/n} = 2^1 = 2 > 1 \quad \text{v případě (b)}\,,$$

odpověď dává v obou případech dokonce „obyčejné limitní odmocninové kritérium“ z Věty 3.2.26.

Důsledkem zlepšeného odmocninového kritéria z Věty 8.4.10 je vzorec pro výpočet poloměru konvergence mocninné řady v následujícím tvrzení:

Věta 8.4.15 (Cauchy 1821, Hadamard 1888*). *Pro výpočet poloměru konvergence R mocninné řady* (8.6) *platí vzorec*

$$R = (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} \tag{8.15}$$

s konvencí $1/0 = +\infty$ *a* $1/(+\infty) = 0$.

Důkaz. Věta je důsledkem odmocninového kritéria z Věty 8.4.10, resp. definice limes superior a základních poznatků o konvergenci řad. Je-li

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z|^n} = |z| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1\,,$$

řada konverguje v bodě z. Platí-li obrácená nerovnost, řada diverguje. Jestliže je např. hodnota lim sup ve vzorci (8.15) rovna 0, konverguje řada pro každé $z \in \mathbb{C}$, a tedy $R = +\infty$. Podobnou úvahu provedeme i pro případ $R = 0$. □

8.5 Neabsolutní konvergence

Kritéria konvergence, která jsme dosud poznali, byla s výjimkou Leibnizova kritéria pro alternující řady aplikovatelná jen na řady absolutně konvergentní (my jsme je formulovali jako kritéria pro řady s nezápornými či kladnými členy). Nyní již pracujeme i s řadami s komplexními členy a potřeba kritérií pro jejich neabsolutní konvergenci vzrostla. Víme, že mocninná řada konverguje v kruhu konvergence *absolutně*, ale naprosto nic nevíme o jejím chování na konvergenční kružnici. Že jsme nemohli dokázat pro tento případ žádnou obecnou větu ukazuje třetí z následujících příkladů.

Příklady 8.5.1. 1. Řady $\sum (n!)z^n$ a $\sum z^n/n!$ ukazují, že pro poloměr konvergence nastávají i extrémní případy $R = 0$ a $R = +\infty$. V obou případech je konvergenční kružnice „degenerovaná“.

2. Řada $\sum z^n/a^n$ pro $a \in (0, \infty)$ má poloměr konvergence $R = a$. Z Cauchyho odmocninového kritéria plyne s ohledem na

$$\sqrt[n]{|z^n/a^n|} = |z|/a$$

konvergence pro všechna $z \in \mathcal{K}(0, a)$ a divergence pro všechna z, pro něž je $|z| > a$.

3. Uvažte, že řady

$$\sum z^n\,, \qquad \sum \frac{z^{n+1}}{n+1}\,, \qquad \sum \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

se chovají na konvergenční kružnici $\mathcal{C}(0,1)$ rozdílně; prvá na ní všude diverguje, druhá konverguje v bodě -1 a diverguje v bodě 1, třetí konverguje absolutně ve všech bodech $\mathcal{C}(0,1)$.

K vyšetřování konvergence mocninných řad na konvergenční kružnici potřebujeme proto jemnější kritéria (neabsolutní) konvergence. Konverguje-li totiž mocninná řada v jednom bodě konvergenční kružnice absolutně, konverguje absolutně ve *všech* bodech této kružnice. V ostatních případech (viz předcházející jednoduchý příklad) je již situace složitá.

Lemma 8.5.2 (Abel 1826). *Nechť jsou dány posloupnosti komplexních čísel* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ *a čísla* $p, q \in \mathbb{N}$, $-1 \le p < q$. *Označme*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,, \quad n \in \mathbb{N}\,, \quad s_0 = 0\,.$$

Potom platí

$$\sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k = \sum_{k=p+1}^{q} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_q b_{q+1} - s_p b_{p+1}\,. \tag{8.16}$$

Důkaz. Identitu dokážeme výpočtem:

$$\sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k = \sum_{k=p+1}^{q} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=p+1}^{q} s_k b_k - \sum_{k=p}^{q-1} s_k b_{k+1} =$$
$$= \sum_{k=p+1}^{q-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_q b_{q+1} - s_p b_{p+1}\,;$$

tím je důkaz rovnosti (8.16) dokončen. □

Pokud se na Lemma 8.5.2 budeme odvolávat, budeme užívat vžitého označení *Abelova parciální sumace.*

Věta 8.5.3 (Abel, Dirichlet 1863). *Nechť* $\sum a_k$ *je řada s komplexními členy,* $\{b_k\}_1^{\infty}$ *nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Potom řada*

$$\sum a_k b_k \quad \textit{konverguje}\,,$$

je-li splněna některá z následujících podmínek:

(1) (*Abel*) *řada* $\sum a_k$ *konverguje, nebo*

(2) (*Dirichlet*) *řada* $\sum a_k$ *má omezené částečné součty a* $b_k \to 0$ *pro* $k \to \infty$.

Důkaz. Základem důkazu je ověření Bolzano-Cauchyho podmínky pro limitu částečných součtů $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ zkoumané řady. Dokážeme tvrzení pro předpoklad (2). Protože $b_k \to 0$ při $k \to \infty$ a $\{b_k\}$ je nerostoucí posloupnost, existuje pro libovolné $\varepsilon > 0$ číslo $m \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $p \geq m$ je $b_p \leq \varepsilon$. Je-li $|s_k| \leq M < \infty$ pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$, můžeme odhadnout pro $p, q \geq m$, $p < q$,

$$\Big|\sum_{1}^{q} a_k b_k - \sum_{1}^{p} a_k b_k\Big| = \Big|\Big(\sum_{k=p+1}^{q} s_k(b_k - b_{k+1})\Big) + s_q b_{q+1} - s_p b_{p+1}\Big| \leq$$

$$\leq M\Big(\sum_{k=p+1}^{q} (b_k - b_{k+1}) + b_{q+1} + b_{p+1}\Big) = 2M b_{p+1} \leq 2M\varepsilon\,.$$

Tím je ověřena Bolzano-Cauchyho podmínka z Věty 8.1.11 pro zkoumanou řadu.

Nyní dokážeme konvergenci pro podmínku (1): snadno lze ověřit, že je-li s součet řady $\sum a_k$, platí opět pro $p, q \geq m$, $p < q$,

$$0 = \sum_{k=p+1}^{q} s(b_k - b_{k+1}) + s b_{q+1} - s b_{p+1}\,. \tag{8.17}$$

Odečtením (8.17) od (8.16) dostaneme vztah

$$\sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k = \sum_{k=p+1}^{q} (s_k - s)(b_k - b_{k+1}) + (s_q - s) b_{q+1} - (s_p - s) b_{p+1}\,.$$

Odhadněme nyní zbytek zkoumané řady. K $\varepsilon > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}_0$ tak, že pro všechna $p \geq m$ je $|s_p - s| < \varepsilon$. Posloupnost $\{b_k\}$ je omezená, existuje tedy M, pro něž platí $0 \leq b_k < M < \infty$ pro všechna k. Proto pro všechna $p, q \geq m$, $q > p$, platí

$$\Big|\sum_{k=p+1}^{q} a_k b_k\Big| \leq \sum_{k=p+1}^{q} |s_k - s|(b_k - b_{k+1}) + |s_q - s| b_{q+1} + |s_p - s| b_{p+1} \leq$$

$$\leq \varepsilon\Big(\sum_{k=p+1}^{q} (b_k - b_{k+1}) + b_{p+1} + b_{q+1}\Big) \leq 2\varepsilon M\,.$$

Tím je dokončen i důkaz pro podmínku (1) tvrzení. □

Příklad 8.5.4. Z věty snadno dostáváme tento užitečný důsledek: jestliže

$$\sum a_k \quad \text{konverguje} \qquad \text{a} \qquad \{b_k\} \ \text{je omezená a monotónní}\,,$$

pak řada $\sum a_k b_k$ rovněž konverguje. Např. pro neklesající posloupnost $\{b_k\}$, pro kterou je $b_k \to B < \infty$, platí

$$\sum a_k b_k = B \sum a_k - \sum a_k (B - b_k) .$$

Odtud již plyne tvrzení.

Příklad 8.5.5. Leibnizovo kritérium pro alternující řady plyne velmi snadno z Dirichlet-Abelova kritéria: platí totiž $|\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}| \leq 1$. Podobně dostaneme konvergenci řad typu

$$\sum (-1)^{[k/3]} a_n ,$$

kde hranaté závorky značí opět funkci „celá část". V některých případech musíme postupovat opatrněji: dokažme, že když

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \sin(x/k) ,$$

pak pro definiční obor D_f funkce f platí rovnost $D_f = \mathbb{R}$. Je-li $x \in \mathbb{R}$, nesplňuje obecně řada předpoklady Věty 8.5.3, avšak existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že je $|x/k| \leq \pi/2$ pro všechna $k \geq n$ a Větu 8.5.3 lze aplikovat na řadu $\sum_{k=n}^{\infty} (-1)^{k-1} \sin(x/k)$. Poznamenejme, že volba n závisí na $x \in \mathbb{R}$.

V poslední části se vrátíme k elementárním funkcím a dokážeme, že základní „zaváděcí" tvrzení zůstanou v platnosti i v $\mathbb{C}$. Speciálně dostaneme pro tyto funkce tvrzení o existenci a jednoznačnosti.

8.6 Elementární funkce v $\mathbb{C}$

Připomeňme, že jsme zavedli exponenciálu pomocí funkcionálních rovnic (Definice 6.3.3). Ukázali jsme si také, jak lze dokázat „eulerovsky" existenci a jednoznačnost exponenciály definované na $\mathbb{R}$ (Definice 6.3.8). Prozradíme (ale nedokážeme!), že bychom mohli definovat exponenciálu v komplexním oboru i modifikací vzorce (6.3.8): stačilo by nahradit reálnou proměnnou x komplexní proměnnou z. Z definice jsme postupně odvodili vyjádření v $\mathbb{R}$ mocninnou řadou a pomocí ní jsme v Definici 8.3.1 rozšířili definiční obor exponenciály na $\mathbb{C}$. Nyní se k této problematice s naším minimem znalostí o komplexních funkcích komplexní proměnné vrátíme.

Vnucuje se přirozená otázka: platí také pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$ klíčový adiční vzorec? Odpověď na tuto otázku je kladná a i s našimi omezenými prostředky to můžeme již dokázat.

Věta 8.6.1. *Exponenciála vyhovuje v $\mathbb{C}$ funkcionální rovnici*

$$\exp(z + w) = (\exp z) \cdot (\exp w), \quad z, w \in \mathbb{C} . \tag{8.18}$$

Speciálně: Pro každé $z \in \mathbb{C}$ je $\exp z \neq 0$ a $(\exp z)^{-1} = \exp(-z)$.

Důkaz. Zvolme libovolně $w \in \mathbb{C}$ a definujme funkci $g(z) := \exp(z)\exp(w-z)$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Pak $g'(z) = 0$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a g je tedy podle Lemmatu 8.2.5 konstantní v $\mathbb{C}$. Protože $\exp(0) = 1$ a $g(0) = \exp(w)$, platí rovnost

$$\exp(z)\exp(w-z) = \exp(w)\ ; \tag{8.19}$$

dosazením $w = 0$ dostaneme $\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1$; z toho ihned plyne, že $\exp z \neq 0$. Zvolme dále libovolně $z \in \mathbb{C}$ a dosaďme do (8.19) $z + w$ za w, čímž dostaneme dokazovanou rovnost (8.18), která tak platí pro všechna $z, w \in \mathbb{C}$. □

Poznámka 8.6.2. Předcházející důkaz tvrzení (8.18) bez použitého „triku“ může být poměrně pracný, avšak pomocí poměrně malé části teorie funkcí komplexní proměnné lze podat i jiné velmi jednoduché důkazy již známých poznatků, případně dospět poměrně snadno k dalším poznatkům. Často se cituje výrok, jehož autorem je Jacques Hadamard (1865 – 1963) a který říká, že *Nejkratší cesta mezi dvěma tvrzeními z reálné analýzy vede přes* $\mathbb{C}$.

Některé definice se na případ funkcí komplexní proměnné téměř doslova jednoduše přenesou:

Definice 8.6.3. Je-li $D_f \subset \mathbb{C}$ definiční obor funkce f, říkáme, že číslo $c \in \mathbb{C}$ je *periodou* funkce f, platí-li $z + nc \in D_f$ a $f(z) = f(z + nc)$ pro všechna $z \in D_f$ a všechna $n \in \mathbb{Z}$. Funkce f je *periodická*, existuje-li nenulová perioda f.

Funkce f je *sudá*, jestliže pro každé $z \in D_f \subset \mathbb{C}$ je $-z \in D_f$ a zároveň $f(z) = f(-z)$. Podobně je funkce f *lichá*, jestliže pro každé $z \in D_f \subset \mathbb{C}$ je $-z \in D_f$ a $f(z) = -f(-z)$.

Nyní vyjádříme exponenciálu jako součet sudé a liché funkce:

$$\exp z = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} + \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{8.20}$$

S těmito funkcemi jsme se již informativně v *reálném případě* setkali; nyní k nim dospíváme podobným způsobem.

Definice 8.6.4. Základní *hyperbolické funkce* definujeme rovnostmi

$$\cosh z := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}\,, \quad \sinh z := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{8.21}$$

Funkci cosh nazýváme (komplexní) *hyperbolický kosinus* a funkci sinh (komplexní) *hyperbolický sinus.*

Z rovnosti (8.20) vyplývá vzorec

$$\exp z = \cosh z + \sinh z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,; \tag{8.22}$$

zřejmě je funkce cosh sudá a funkce sinh lichá. Platí tedy

$$\cosh(-z) = \cosh(z)\,, \quad \sinh(-z) = -\sinh(z)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{8.23}$$

Snadno též nahlédneme, že jejich Maclaurinovy rozvoje mají známý tvar (pouze přecházíme od reálné proměnné x ke komplexní proměnné z)

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,, \quad \sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{8.24}$$

Řady konvergují absolutně v $\mathbb{C}$ a obě funkce leží v $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{C})$. Snadno se ověří i rovnosti

$$\sinh' z = \cosh z\,, \quad \cosh' z = \sinh z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Lemma 8.6.5 (součtové vzorce). *Pro funkce* cosh, sinh *platí součtové vzorce*

$$\cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w\,, \quad z, w \in \mathbb{C}\,, \tag{8.25}$$
$$\sinh(z+w) = \sinh z \cosh w + \cosh z \sinh w\,, \quad z, w \in \mathbb{C}\,, \tag{8.26}$$

a analogické rozdílové vzorce

$$\cosh(z-w) = \cosh z \cosh w - \sinh z \sinh w\,, \tag{8.27}$$
$$\sinh(z-w) = \sinh z \cosh w - \cosh z \sinh w\,. \tag{8.28}$$

Důkaz. Dokažme vzorec (8.25). Dosadíme do obou sčítanců na pravé straně (8.25) podle (8.21) a upravíme; dostaneme tak dvě rovnice (jednu s „horními“ a druhou s „dolními“ znaménky)

$$(\exp z \pm \exp(-z))(\exp w \pm \exp(-w)) =$$
$$= \exp z \exp w \pm \exp z \exp(-w) \pm \exp(-z) \exp w + \exp(-z)\exp(-w)\,,$$

které sečteme, násobíme (1/4) a upravíme pomocí (8.18). Tak dostaneme (8.25). Analogicky odvodíme (8.26). Zbývající vzorce (8.27) a (8.28) dostaneme z těchto vzorců dosazením $-w$ za w a užitím (8.18). □

Z rovnice (8.25) dosazením $w = -z$ a úpravou dostaneme rovnost

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1\ ; \tag{8.29}$$

Tím jsme odvodili *základní vzorce* pro hyperbolické funkce v $\mathbb{C}$. Hyperbolické funkce jsou nepatrně jednoduší než funkce goniometrické. Při zavádění goniometrických funkcí vyjdeme z rovnice (8.20), do které dosadíme iz za z. Dostaneme tak po rozšíření druhého zlomku [3]) na pravé straně rovnice číslem i

$$\exp(\mathrm{i}z) = \frac{\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)}{2\mathrm{i}}\,. \tag{8.30}$$

To nás vede k následující definici, analogické k vzorcům (8.21):

[3]) Bez tohoto rozšíření by zaváděný sinus nebyl na $\mathbb{R}$ reálnou funkcí.

Definice 8.6.6 (Eulerovy vzorce). Základní *goniometrické funkce* definujeme v $\mathbb{C}$ vzorci

$$\cos z := \frac{\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)}{2}\,, \quad \sin z := \frac{\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)}{2\mathrm{i}}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{8.31}$$

Funkci cos nazýváme (komplexní) *kosinus* a funkci sin (komplexní) *sinus*.

Z rovnosti (8.22) nebo z Eulerových vzorců (8.31) dostaneme snadno rovnost

$$\exp(\mathrm{i}z) = \cos z + \mathrm{i}\sin z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{8.32}$$

Poznámka 8.6.7. Porovnáním definic goniometrických a hyperbolických funkcí, které jsme zatím zavedli, dostáváme rovnosti

$$\cos z = \cosh(\mathrm{i}z)\,, \quad \sin z = -\mathrm{i}\sinh(\mathrm{i}z)\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{8.33}$$

Z nich vidíme, že funkce cos je sudá a funkce sin lichá, tj.

$$\cos(-z) = \cos z\,, \quad \sin(-z) = -\sin z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,; \tag{8.34}$$

snadno z nich odvodíme s přihlédnutím k chování celočíselných mocnin čísla i Maclaurinovy rozvoje sinu a kosinu:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{8.35}$$

Řady konvergují absolutně v $\mathbb{C}$ a tak jsou obě funkce cos a sin z $\mathcal{C}^{(\infty)}(\mathbb{C})$, přičemž platí rovnosti

$$\sin' z = \cos z\,, \quad \cos' z = -\sin z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{8.36}$$

Porovnáním z Maclaurinovými rozvoji „reálných“ goniometrických funkcí vidíme, že jsme opravdu dostali *rozšíření* těchto funkcí na $\mathbb{C}$. Dosadíme-li do rozdílových vzorců (8.27) a (8.28) pro hyperbolické funkce iz za z a iw za w, dostaneme např. z (8.27)

$$\cosh(\mathrm{i}(z-w)) = \cosh(\mathrm{i}z)\cosh(\mathrm{i}w) - \sinh(\mathrm{i}z)\sinh(\mathrm{i}w)\,,$$

což s pomocí vztahů (8.33) dává rozdílový vzorec

$$\cos(z-w) = \cos z \cos w + \sin z \sin w\,, \quad z, w \in \mathbb{C}\,. \tag{8.37}$$

Podobným způsobem dostaneme i druhý rozdílový vzorec

$$\sin(z-w) = \sin z \cos w - \cos z \sin w\,, \quad z, w \in \mathbb{C}\,. \tag{8.38}$$

Z rovnice (8.29) dostaneme dosazením iz za z a jednoduchým výpočtem opět známou rovnost

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1\,, \quad z \in \mathbb{C}\;; \tag{8.39}$$

čtenář zná analogický vzorec pro $z \in \mathbb{R}$ ze střední školy. Zde je na místě varování: ze vzorce (8.39) *neplyne* $|\sin z| \le 1$, $|\cos z| \le 1$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$, neboť čtverec komplexního čísla *nemusí být* nezáporné reálné číslo. Ze vzorce (8.18) speciálně dostaneme

$$\exp z = \exp(x + \mathrm{i}y) = \exp x\,(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\,. \tag{8.40}$$

Tím jsme mj. vyjádřili *komplexní* exponenciálu pomocí *reálných* funkcí reálné proměnné exp, cos a sin. Poznamenejme, že tak bychom mohli komplexní exponenciálu eventuálně i definovat.

Ze vzorce (8.18) plyne indukcí rovnost $\exp nz = (\exp z)^n$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a všechna $n \in \mathbb{N}$; protože pro $n = 0$ je tato rovnost triviální a protože $z^n = 1/z^{-n}$, $\exp(-z) = 1/\exp z$, je patrné, že rovnost $\exp nz = (\exp z)^n$ platí pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ a všechna $z \in \mathbb{C}$. Odtud plyne pro všechna $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ identita

$$(\exp(x + \mathrm{i}y))^n = (\exp x)^n(\cos ny + \mathrm{i}\sin ny)\,.$$

Tento vztah bývá na střední škole uváděn ve zjednodušené formě (pro $x = 0$) pod jménem *Moivrova věta* či *Moivrova formule*:

$$(\cos y + \mathrm{i}\sin y)^n = \cos ny + \mathrm{i}\sin ny\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{8.41}$$

Všimněme si ještě další vlastnosti goniometrických funkcí. Tak např. z rovnosti $\cos it = \cosh t$, $t \in \mathbb{R}$, ihned plyne, že

$$\lim_{t\to\pm\infty} \cos \mathrm{i}t = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{\exp t + \exp(-t)}{2} = \infty\,;$$

funkce cos *není* tedy na $\mathbb{C}$ omezená. To je jedna z vlastností, které se *podstatně liší* pro reálný a komplexní případ. Čtenář by si rovněž měl povšimnout, že pro žádné $x \in \mathbb{R}$ není $\cosh x = 0$.

Věta 8.6.8. *Exponenciála a goniometrické funkce jsou určeny funkcionálními rovnicemi z Věty 6.3.3 a Věty 6.6.3 jednoznačně v* $\mathbb{R}$ *i v* $\mathbb{C}$.

Důkaz. 1. Existenci exponenciály jsme již jednou dokázali postupem, který užíval Euler (funkce exp byla definována na $\mathbb{R}$ jako limita speciálních polynomů). Odvodili jsme však nezávisle vyjádření exp *jednoznačně určenou* mocninnou řadou a dokázali jsme, že její součet splňuje adiční vzorec dokonce i v $\mathbb{C}$.

2. Funkce popsané Větou 6.6.3 mají *jednoznačně určené rozvoje* v mocninnou řadu. Pomocí jejich souvislosti v $\mathbb{C}$ s exponenciálou jsme ukázali, že součty těchto mocninných řad splňují v $\mathbb{C}$ rovnice (8.37) a (8.38), tedy analogické funkcionální rovnice jako na $\mathbb{R}$.

Poznamenejme, že odtud mj. vyplývá možnost zavést pomocí „stejných funkcionálních rovnic" tyto funkce i v $\mathbb{C}$ (rovnosti jsou stejné, ale uvažované obory jsou různé, takže funkcionální rovnice jsou jen *analogické*). $\square$

Poznámky 8.6.9. 1. Čtenář by mohl nabýt dojmu, že funkce arctg lze rozšířit z $\mathbb{R}$ v $\mathbb{C}$ jen na kruh se středem v počátku nebo že funkci log rozšířit na $\mathbb{C}$ neumíme. Doporučuji si rozmyslet např. to, že log umíme rozvinout v mocninnou řadu v kruhu $\mathcal{K}(1,1)$ nebo obecněji v kruhu $\mathcal{K}(a,a)$ s každým $a > 0$. K tomu stačí uvážit, že

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(1+a)+(z-a)} = \sum \frac{(z-a)^k}{(1+a)^{k+1}}\,.$$

2. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že exponenciála také v $\mathbb{C}$ vyhovuje rovnici $f'(z) - f(z) = 0$ a že goniometrické funkce v $\mathbb{C}$ řeší rovnice $f''(z) + f(z) = 0$. Analogický poznatek získáme snadno i pro hyperbolické funkce.

Druhá část předcházející poznámky nás vede k tomu, abychom se podobnými rovnicemi zabývali podrobněji alespoň v $\mathbb{R}$. Průpravou k tomu pro nás bude následující (poslední) kapitola tohoto dílu.

Historické poznámky 8.6.10. Pojem *komplexního čísla* prošel velmi dlouhým vývojem, který započal zhruba v polovině 16. století. R. 1545 vydal Gieronimo Cardano (1501 – 1576) knihu *Ars Magna de Regulis Algebraicis.* Ta byla jedním ze série příspěvků italské školy k řešení rovnice třetího stupně[4]). Připomeňme, že po Cardanovi jsou pojmenovány vzorce, pomocí nichž se vyjadřují kořeny rovnice třetího stupně; jejich skutečným objevitelem byl patrně Niccolo Fontana (1499 – 1557).

Cardano v *Ars Magna* řešil úlohu rozložit číslo 10 na součet dvou sčítanců, jejichž součin je roven 40. Pro rovnici $x(10-x) = 40$ nalezl kořeny ve tvaru $x_1 = 5 + \sqrt{-15}$, $x_2 = 5 - \sqrt{-15}$ a pro jejich součin obdržel

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40\,.$$

Výsledek označil jako „elegantní, avšak bez užitku". Cardano spolu s dalšími italskými matematiky rozšířil tehdejší znalosti o řešení algebraických rovnic a přispěl též k objevu komplexních čísel. Jiným významným matematikem, svázaným s touto problematikou byl Scipione dal Ferro (1465 – 1526).

Vývoj však postupoval velmi pomalu. René Descartes (1596 – 1650) odmítal existenci komplexních kořenů polynomu; od něj pochází trochu nešťastný termín „imaginární". Také objevitelé infinitezimálního počtu nepřikládali komplexním číslům větší význam: zatímco Isaac Newton (1642 – 1727) je nepokládal za důležitá, Gottfried

[4]) Obsáhlý výklad nalezne čtenář u Cantora ve druhém dílu [3] v kapitole 64.

Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) s nimi sice pracoval, ale nechápal jejich podstatu. Za zmínku stojí, že jak Leibniz, tak zejména Newton pracovali s mocninnými řadami, avšak jejich konvergenci nevyšetřovali.

Zásadní zlom ve vztahu matematiků ke komplexním číslům přišel až na přelomu století, kdy Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) uveřejnil r. 1799 svůj první důkaz tzv. *základní věty algebry*. Jím byla pozice komplexních čísel v matematice značně posílena.

Eulerovy znalosti o komplexních číslech pozoruhodně postupně rostly a vyvrcholily v odhalení vztahu mezi exponenciálou, a goniometrickými funkcemi v komplexním oboru. U Eulera tedy šlo o završení dlouhodobého vývoje. V dopise z r. 1740 sdělil Euler Johannovi Bernoullimu, že funkce

$$y = 2\cos x \qquad \text{a} \qquad y = \mathrm{e}^{\sqrt{-1}x} + \mathrm{e}^{-\sqrt{-1}x}$$

jsou řešeními téže (diferenciální) rovnice a pro obě platí $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, tedy si musí být rovny. Toto pozorování zveřejnil r. 1743 ve formě vzorců

$$\cos t = (\mathrm{e}^{\sqrt{-1}t} + \mathrm{e}^{-\sqrt{-1}t})/2\,, \qquad \sin t = (\mathrm{e}^{\sqrt{-1}t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{-1}t})/(2\sqrt{-1})\,.$$

Od Eulera mj. také pochází označení imaginární jednotky symbolem i, to však je až z r. 1777.

U Gausse nacházíme geometrickou interpretaci komplexních čísel nejprve v korespondenci (1811); záhy však Gauss disponoval uceleným obrazem o souvislostech. Explicitně je popsal v práci z r. 1831. Při této příležitosti napsal, že *geometrická interpretace komplexních čísel vrhá na jejich metafyzické chápání nové světlo*. Poznamenejme, že objevená „názornost“ byla jedním ze stimulů dalšího vývoje vedoucího k vytvoření teorie *komplexních funkcí komplexní proměnné*.

Základy teorie funkcí komplexní proměnné byly položeny v devatenáctém století. Za největší přínos vděčíme třem velmi významným matematikům; jsou jimi Louis Augustin Cauchy (1789 – 1857), Bernhard Riemann (1826 – 1866) a Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897).

Kruh konvergence byl znám v podstatě již Cauchymu včetně metody výpočtu jeho poloměru, avšak důkaz vzorečku nebyl *zcela* korektní a prodělal další vývoj. Vzorec Cauchy popsal slovy, neboť formální definici lim sup podal teprve Paul David Gustav du Bois-Reymond (1831 – 1889) r. 1882.

R. 1888 objevil vzorec (8.15) znovu, patrně zcela nezávisle na Cauchym, Hadamard; v té době byl studentem známé *École Normale*. Přesnou formulaci pak podal v článku z r. 1888, vlivem kterého se v řadě učebnic uvádí (8.15) jako Hadamardův vzorec. Patrně je nejvhodnější užívat označení *Cauchy-Hadamardův vzorec*, neboť Hadamard dalším využitím vzorec „zpopularizoval“; srv. [10].

Vzorec se často používá v důkazu věty o derivování a integraci mocninné řady člen po členu pro rovnost poloměrů příslušných řad, jak jsme ale viděli, není to nutné. Tato aplikace představuje jeho elegantní využití.

U rozvoje funkce arctg v mocninnou řadu jsme uvedli jediné jméno James Gregory (1638 – 1675) a r. 1671. Rozvoj souvisí s tzv. Leibnizovou řadou pro výpočet π, ke které se ve druhém díle ještě vrátíme (viz také Historické poznámky 3.4.9). Gregory prokazatelně získal řadu rozvojů funkcí v mocninné řady a bývá někdy řazen k tvůrcům infinitezimálního počtu.

Teorii funkcí komplexní proměnné je věnováno mnoho knih a zpravidla se vykládá odděleně od reálné analýzy, i když je toto oddělování zbytečné; jediný důvod spočívá v tom, že se obecně soudí, že tato partie matematiky je pro začátečníky příliš náročná. Jednotný přístup prezentuje na vyšší úrovni kniha [9], historizující výklad je obsažen např. v krásné monografii [8].

Literatura:

[1] Bečvář, J.: *150 let quaterniónů*, Pokroky MFA **38** (1993), str. 305 – 317.

[2] Bečvář, J.: *Je možno z bodů prostoru udělat čísla ?*, str. 81 – 97, obsaženo v: *6. seminář o filozofických otázkách matematiky a fyziky*, JČMF, Brno, 1992.

[3] Cantor, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I – IV*, B. G. Teubner, Leipzig, 1880, 1882, 1898, 1908.

[4] Holický, P., Kalenda F. K.: *Metody řešení vybraných úloh z matematické analýzy (pro 2. až 4. semestr)*, Matfyzpress, Praha, 2002.

[5] Jarník, V.: *Über Umordnung unendlichen Reihen*, Věstník KČSN 1927.

[6] Klambauer, G.: *Aspects of Calculus*, Springer, Berlin, 1986.

[7] Knopp, K.: *Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen*, Springer, Berlin, 1924.

[8] Remmert, R.: *Theory of complex functions*, Springer, New York, 1991, (překlad druhého vydání *Funktionenlehre I.* z r. 1989; první vydání německého originálu je z r. 1984 (Springer), poslední z r. 1995 (Springer)).

[9] Rudin, W.: *Analýza v reálném a komplexním oboru*, Academia, Praha, 1977.

[10] Maz'ya, V., Shaposhnikova, T.: *Jacques Hadamard, a universal mathematician*, Providence, Amer. Math. Society, 1998.

[11] Šalát, T.: *Nekonečné řady*, Academia, Praha, 1974.

Kapitola 9

Primitivní funkce

9.1 Motivační úvaha

Tato kapitola je věnována *metodám určování primitivních funkcí.* Začneme od základní definice.

Definice 9.1.1. Nechť f je funkce definovaná na $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Pak funkci F, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$ pro *všechna* $x \in (a,b)$, nazýváme *primitivní funkcí k* f (na intervalu (a,b)).

Nalezení primitivní funkce je v jistém smyslu inverzní operací k derivování: je-li f' derivace funkce f na intervalu (a,b), pak f je primitivní funkcí k f' na (a,b). Primitivních funkcí k f však může být více. Je např. zřejmé, že primitivní funkcí k funkci cos (na $\mathbb{R}$) je nejen funkce sin, avšak také i funkce $\sin + 3$ a obecněji každá funkce $\sin + c$, kde c je libovolná konstantní funkce na $\mathbb{R}$. Primitivní funkce k téže funkci se však „více" lišit nemohou, což vyplývá z následujícího tvrzení.

Lemma 9.1.2. *Nechť F_1, F_2 jsou primitivními funkcemi k funkci f na intervalu (a,b). Potom jejich rozdíl je konstantní funkce.*

Důkaz. Platí $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$, a tedy rozdíl $F_1 - F_2$ je konstantní funkce na (a,b) podle Věty 5.2.22, resp. podle jejího Důsledku 5.2.23. ☐

Poznámka 9.1.3. Je velmi podstatné, že jsme definovali primitivní funkci *na intervalu.* Rozdíl $2\,\mathrm{sgn} - \mathrm{sgn}$ má na $G := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ derivaci všude rovnou 0, ale není na G konstantní. Lemma 9.1.2 ukazuje, že k f existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se navzájem „liší o konstantu", tj. je-li F primitivní funkce k f, pak množina všech primitivních funkcí k f je množina $\{F + c\,;\ c \in \mathbb{R}\}$.

Nyní budeme zkoumat důvody, které nás k určování primitivních funkcí vedou. V Úvodu jsme se zmínili o tom, že některé poznatky byly pokládány za správné, neboť vyplývaly z názoru. Již před začátkem našeho letopočtu byl obsah rovinných obrazců chápán při kvadraturách jako aditivní a monotónní; v případě obdélníku byl dán známým vzorečkem.

Tyto vlastnosti byly používány intuitivně, o jejich správnosti se příliš nepochybovalo a explicitně se o nich nepsalo. K jejich „zpřesňování" docházelo pozvolna. Budeme se v tomto duchu zabývat intuitivně chápaným obsahem rovinného obrazce, vyhovujícím výše popsaným požadavkům; přesněji:

Nechť pro každou spojitou funkci f definovanou na intervalu $[0, \infty)$, $f \geq 0$, je pro všechna a, b, $0 \leq a < b < \infty$ definována množina $M(f; a, b)$

$$M(f; a, b) := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\right\} .$$

Dále předpokládáme, že každé takové množině lze přiřadit „obsah podgrafu" [1]) $P(f; a, b)$. O tomto poměrně složitém zobrazení (je definováno na systému speciálních podmnožin množiny všech dvojic reálných čísel pomocí nezáporných spojitých funkcí a uzavřených intervalů)

$$M(f; a, b) \mapsto P(f; a, b)$$

předpokládáme, že má velmi jednoduché vlastnosti (O1)–(O3), popsané následujícími vztahy:

(O1) pro $a < c < b$, $f \in \mathcal{C}([\,0, \infty\,])$, platí $P(f; a, c) + P(f; c, b) = P(f; a, b)$, tj. obsah je „aditivní";

(O2) je-li $a \leq \alpha < \beta \leq b$, $f, g \in \mathcal{C}([\,0, \infty\,])$ a $M(g; \alpha, \beta) \subset M(f; a, b)$, pak $P(g; \alpha, \beta) \leq P(f; a, b)$, tj. obsah je „monotónní";

(O3) je-li f konstantní, tj. $f(x) = k \geq 0$ pro všechna $x \in [0, \infty)$, pak platí $P(f; a, b) = k(b - a)$, tj. obsah obdélníku se počítá tak, jak jsme zvyklí.

Ponechme prozatím stranou otázku, zda zobrazení s uvedenými vlastnostmi existuje. Vyřešíme ji později, v kapitole věnované Riemannově integrálu. Nyní se soustředíme na jednu vlastnost popsaného zobrazení a ukážeme si, jak pojem primitivní funkce s obsahem souvisí.

Lemma 9.1.4. *Nechť je dána funkce $f \in \mathcal{C}([0, \infty))$, $f \geq 0$. Předpokládejme, že existuje zobrazení $M(f; a, b) \mapsto P(f; a, b)$ s vlastnostmi* (O1) – (O3). *Potom pro funkci $F(x) := P(f; 0, x)$, $x \in (0, \infty)$, platí*

$$F'(x) = f(x)\,, \quad x \in (0, \infty)\,.$$

Důkaz. Zvolme $x_0 \in (0, \infty)$ a spočtěme $F'_+(x_0)$. Z (O1) plyne pro každé $h > 0$

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = P(f; x_0, x_0 + h)\,.$$

[1]) Někdy se v této souvislosti mluví o ploše.

Ze spojitosti f v bodě x_0 plyne, že k libovolně zvolenému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in [x_0, x_0 + \delta]$ platí

$$f(x_0) - \varepsilon \le f(x) \le f(x_0) + \varepsilon\,.$$

Vynásobíme nyní nerovnost číslem h, $0 < h < \delta$ a pomocí (O2) a (O3) dostaneme

$$(f(x_0) - \varepsilon)h \le P(f; x_0, x_0 + h) \le (f(x_0) + \varepsilon)h\,;$$

pak po přepsání do zavedeného označení dostáváme

$$\left|\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \le \varepsilon\,.$$

Odtud plyne $F'_+(x_0) = f(x_0)$. Analogicky provedeme úvahu i pro $F'_-(x_0)$ a dostaneme $F'_-(x_0) = f(x_0)$. Tím je tvrzení dokázáno. $\square$

Máme-li k dispozici libovolnou primitivní funkci F k f, lze počítat plochu $P(f; a, b)$ pomocí vzorce

$$P(f; a, b) = F(b) - F(a)\,.$$

To plyne z Lemmat 9.1.2 a 9.1.4. Zároveň to ukazuje, že hledání primitivních funkcí je z popsaného hlediska přirozené a užitečné. Uveďme několik ilustrativních příkladů.

Příklady 9.1.5. 1. Zřejmě je funkce $F(x) = x^2$, kde $x \in \mathbb{R}$, primitivní funkcí k funkci $f(x) = 2x$ na $\mathbb{R}$.

2. Obecněji platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{9.1}$$

Odtud vidíme, že k mocninám s přirozeným exponentem se lehce určují primitivní funkce: slouží k tomu vzorce pro derivování, někdy v nepatrně modifikovaném tvaru. Vzorec (9.1) platí dokonce pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ s výjimkou $n = -1$, pro záporná n však pouze na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

3. Příklad 7.1.1 (srovnej též s Příkladem 7.1.5) ukazuje, že funkce definovaná vztahy $F(x) = x^2 \sin(x^{-2})$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a $F(0) = 0$, je primitivní funkcí k funkci $f := F'$, avšak f *není* spojitá a dokonce *není na žádném okolí bodu* 0 *omezená*. To ukazuje, že mohou existovat primitivní funkce i k funkcím dosti komplikovaným.

Následující užitečnou větu uvedeme v tomto okamžiku *bez důkazu*, dokážeme ji až v Kapitole 10 (Věta **??**). Ukazuje spolu s předcházejícím příkladem, že spojitost je postačující (nikoli však nutnou) podmínkou pro existenci primitivní funkce.

Věta 9.1.6. *Je-li f spojitá na intervalu (a,b), pak na tomto intervalu existuje alespoň jedna primitivní funkce k funkci f.*

Poznámka 9.1.7. Dříve se někdy užívalo pro primitivní funkci označení „antiderivace“ nebo „neurčitý integrál“. Souvisí to s *tradičním* označením (znamení $\int$ vzniklo modifikací velkého „S“)

$$\int f(x)\,dx\,, \qquad \text{resp.} \qquad \int f\,, \tag{9.2}$$

pro primitivní funkci k funkci f, pocházejícím od Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646 – 1716). Avšak v tom případě vzniká při výpočtech problém, kterou z primitivních funkcí takto označíme, pokud jich existuje více. A to, jak jsme viděli, nastává. Avšak ani úmluva, že (9.2) značí *množinu všech primitivních funkcí*, není vhodná, a tak se s tradičním označením vždy někde dostaneme do obtíží. Daní za zachovávání tradičního označení je pak používání „poněkud nesmyslných vzorečků“. Budeme je chápat spíše jako pomůcky k zapamatování. V každém případě je nutné umět dát výpočtům smysl, tj. přesně zapsat a odůvodnit nalezený výsledek. Pro nás zápis

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x), \quad x \in (a,b)\,,$$

znamená pouze jinou formu zápisu rovnosti $F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$.

Jedno upozornění je na místě. Hlavní problém spočívá v tom, že vzorec sám o sobě neznamená nic, je nutno ho „oživit“ tím, že uvedeme předpoklady a také tvrzení. K tomuto problému se ještě vrátíme v Poznámce 9.3.10.

Z historických důvodů také přežívá poněkud vágní terminologie. Termín *integrace* se užívá ve vyjádřeních typu „integrovat diferenciální rovnici“, „určit integrál“, „integrace substitucí“ apod., která jsou zejména v technických učebnicích stále dosti frekventovaná. Aby si na ně čtenář zvykl, budeme je v omezené míře také používat.

Úmluva 9.1.8. Často budeme říkat, že F je primitivní funkce na (a,b), pokud existuje f tak, že platí $F' = f$ (na (a,b)). Zatímco zobrazení $f \to f'$ má dobře vymezený smysl např. na lineárním prostoru všech funkcí, pro které existuje f' na (a,b), nebo např. na $\mathcal{C}^1(a,b) := \mathcal{C}^1((a,b))$, není možné vybrat z třídy všech primitivních funkcí k f nějakého „preferovaného reprezentanta“. V tom je slabina označení již zmíněného označení $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ či $\int f$ a nelze ji uspokojivě odstranit, neupustíme-li od vžitého „používání fajfek“. Symbol $\mathrm{d}x$ zde vyznačuje, vzhledem ke které proměnné se primitivní funkce hledá, což je např. ve vzorci, platném pro všechna $a \in \mathbb{R} \setminus 0$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^4 + x^2} = \frac{1}{a^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a^2}\,,$$

nutné.

Poznámka 9.1.9. Je-li třeba najít primitivní funkci k funkci $x \mapsto \cos^3 x, x \in \mathbb{R}$, mů žeme postupovat též takto (zápis výpočtu):

$$\begin{aligned}\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1-\sin^2 x)\cos x = \cos x - \sin^2 x \cos x = \\ =(\sin x)' - ((1/3)\sin^3 x)' = (\sin x - (1/3)\sin^3 x)'\,.\end{aligned}$$

Nevýhodou tohoto zápisu však je, že je netradiční, a tak bychom se hůře s ostatními domlouvali (nejen s lidmi, pracujícími v jiných oborech, kde se tradiční zápis používá, ale i s ostatními matematiky). S obvyklým zápisem se seznámíme dále.

Lemma 9.1.10. *Každá primitivní funkce je spojitá.*

Důkaz. Předpokládejme, že F je primitivní funkcí k f na intervalu (a, b). Pak pro všechna $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$, takže F má vlastní derivaci všude v (a, b), a je proto spojitá podle Věty 5.1.10. □

Příklad 9.1.11. Funkce sgn *nemá* na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Z Lemmatu 9.1.2 vyplývá, že pokud by taková primitivní funkce F k funkci sgn existovala, byla by její restrikce na interval $(-\infty, 0)$ prvkem množiny funkcí $\{-x + c_1\,;\, c_1 \in \mathbb{R}\}$.

Podobně její restrikce na interval $(0, +\infty)$ by byla prvkem množiny funkcí $\{x + c_2\,;\, c_2 \in \mathbb{R}\}$. Funkce F musí být spojitá a z její spojitosti v bodě 0 vyplývá, že by pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ muselo platit

$$F(x) = |x| + c\,,$$

což dává spor, neboť tato funkce *nemá* derivaci v bodě 0. Jak později uvidíme (viz Věta 5.2.14), dokázané tvrzení je na první pohled zřejmé, neboť funkce sgn nemá Darbouxovu vlastnost, kterou by podle Věty 5.2.14 musela mít.

9.2 Výpočet primitivní funkce

Lemma 9.2.1. *Je-li F primitivní funkcí k f na (a, b) a G primitivní funkcí ke g na (a, b), je $F + G$ primitivní funkce k $f + g$ na (a, b). Je-li $c \in \mathbb{R}$, je cF primitivní funkcí k funkci cf na (a, b).*

Důkaz. Stačí si uvědomit, že je $(F + G)' = f + g$ a $(cF)' = cf$. □

Tvrzení typu předchozího lemmatu, která platí pro libovolný počet sčítanců, se často neuvádějí, neboť matematikovi „jsou zřejmá". Stejně samozřejmé se může čtenáři zdát tvrzení, že primitivní funkce k polynomu je opět polynom. Někdy je však nutné vysvětlovat i samozřejmosti. Při vyučování musí učitel žádat, aby si žáci tyto samozřejmosti nejen uvědomovali, ale aby je při komunikaci s učitelem výslovně uváděli. Teprve až si je učitel zcela jist, že žáci přesně vědí o čem mluví, lze se dohodnout, že si oba (učitel i žák) samozřejmosti domyslí.

Poznámka 9.2.2. Musíme umět rozlišovat: funkce $f(x) = \exp(-x^2)$ je zřejmě spojitá na $\mathbb{R}$, a proto má podle Věty 9.1.6, resp. **??** na tomto intervalu primitivní funkci. Dá se ale dokázat, že tuto primitivní funkci nelze pomocí funkcí, které jsme v tomto textu popsali, žádným způsobem vyjádřit [2]). Situace se do jisté míry podobá případu funkce $1/x$ nebo funkce $1/(1+x^2)$. Pokud bychom nezavedli v Kapitole 6 funkce log a arctg nebo jiné transcendentní funkce, neuměli bychom nalézt primitivní funkce ani k těmto funkcím. Pro případ funkce $1/x$ není těžké dokázat, že její primitivní funkce není funkce racionální. Předpokládejme, že existuje interval $(a,b) \subset (0,\infty)$ takový, že je $\log x = P(x)/Q(x)$, $x \in (a,b)$, přičemž P, Q jsou *nesoudělné* polynomy. Pak platí

$$\frac{1}{x} = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)}, \qquad \text{resp.}$$
$$Q^2(x) = x(P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x))\,.$$

Odtud plyne, že $Q(x) = x^k Q_1(x)$, $k \geq 1$, přičemž $Q_1(0) \neq 0$. Je tedy

$$x^{2k}Q_1^2(x) = x(P'(x)x^kQ_1(x) - x^kP(x)Q_1'(x) - kx^{k-1}P(x)Q_1(x))\,,$$

neboli po úpravě (dělíme x^k)

$$x^kQ_1^2(x) = xP'(x)Q_1(x) - kP(x)Q_1(x) - xP(x)Q_1'(x)\,.$$

Tak jsme dostali prakticky stejným postupem jako při obvykle používaném důkazu iracionality $\sqrt{2}$ spor: polynom P musí být dělitelný x, a tedy P a Q *nejsou* nesoudělné. Jak jsme se již zmínili, o tom, že primitivní funkci k funkci k $1/x$ nelze vyjádřit pomocí již zavedených elementárních funkcí, lze jednoduchými prostředky dokázat mnohem více; viz [1].

K praktickému hledání primitivních funkcí potřebujeme trochu více než jen výše uvedené samozřejmé tvrzení o linearitě a „obrácené vzorečky pro derivování“. Nejprve však uvedeme opět historickou ukázku; čtenáře upozorňujeme na formální stránku techniky výpočtů, ta se užívá v podobné formě dodnes.

Věta 9.2.3 (metoda per-partes). *Nechť f, g jsou funkce definované na (a,b) a nechť $F' = f$, $G' = g$. Nechť existuje funkce H, která je primitivní k funkci fG na (a,b). Potom existuje i primitivní funkce k Fg na (a,b) a platí*

$$(FG - H)' = Fg\,.$$

Důkaz. Zřejmě platí $(FG-H)' = fG + Fg - fG = Fg$. □

Poznámka 9.2.4. Ve starších učebnicích nebo na technických univerzitách se zapisuje celé tvrzení do „vzorce“

$$\int fG = FG - \int Fg\,, \text{ resp. } \int F'G = FG - \int FG'\,.$$

Abychom zdůraznili jeho obsah, formulovali jsme „větu o metodě per–partes“ a dokázali jsme ji. Obrázek o užívaných zápisech poskytla i předchozí ukázka.

[2]) Toto je jen vágní vyjádření, které je nutno zpřesnit.

Příklad 9.2.5. Pro další výpočty primitivních funkcí k racionálním funkcím je důležité najít primitivní funkci k funkci $(1+x^2)^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. Položme pro $n \in \mathbb{N}$

$$I_n := \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}\,,$$

kde za I_n volíme tu primitivní funkci, která v bodě 0 nabývá hodnoty 0. Počítejme: je např. $f = 1$, $F = x$, $G = (1+x^2)^{-n}$, $g = -2nx/(1+x^2)^{n+1}$, což dosadíme do vzorce. Dostaneme tak postupně

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} = \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n(I_n - I_{n+1})\,. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$I_{n+1} = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\,I_n\,. \tag{9.3}$$

Jelikož

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\,,$$

umíme z rekurentní formule spočítat I_n pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Podobně jako vzoreček pro derivování součinu nás přivedl k metodě per-partes, vede věta o derivování složené funkce k metodě substituční.

Věta 9.2.6 (substituční metoda). *Nechť $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ má všude v (α,β) vlastní derivaci a nechť f je definována na (a,b). Potom*

(a) *Je-li F primitivní funkce k f na (a,b), je $F\circ\varphi$ primitivní funkce k $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ na intervalu (α,β).*

(b) *Je-li navíc φ prostá, zobrazuje interval $(\alpha,\beta) \overset{\text{na}}{\to} (a,b)$ a φ má všude v (a,b) nenulovou derivaci, pak pro $\psi = \varphi^{-1}$ platí: je-li G primitivní funkcí k funkci $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ na (α,β), je $G\circ\psi$ primitivní funkcí k funkci f na (a,b).*

Důkaz. Uvědomíme-li si, že předpoklady věty o derivování složené funkce jsou splněny, lehce podle ní dostaneme

$$[(F\circ\varphi)(t)]' = [F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\,, \quad t \in (\alpha,\beta)\,,$$

a s přihlédnutím k vlastnostem inverzních funkcí také

$$[(G\circ\psi)(x)]' = [G(\psi(x))]' = f(\varphi(\psi(x)))\cdot\varphi'(\psi(x))\cdot\psi'(x) = f(x)\,, \quad x \in (a,b)\,.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Příklady 9.2.7. 1. Protože primitivní funkcí k $f(x) = x^2$ je funkce $F(x) = x^3/3$ a sin má vlastní derivaci všude v $\mathbb{R}$, je

$$\left(\frac{\sin^3 x}{3}\right)' = \sin^2 x \cdot \cos x\,,$$

tj. „dosazením funkce sin do funkce $x \mapsto x^3/3$" jsme získali primitivní funkci k funkci $x \mapsto \sin^2 x \cdot \cos x$. Užili jsme první část věty o substituci.

2. Typickým představitelem použití druhé části věty o substituci je příklad, který nyní pouze popíšeme; detailně se mu věnujeme dále v Příkladech 9.3.19 a **??**. Existence primitivní funkce k $f(x) = (2 + \sin x)^{-1}$ je na první pohled patrná ze spojitosti f na $\mathbb{R}$ (tuto větu však teprve dokážeme). Její nalezení je však složitější a vede na nalezení primitivní funkce ke vhodné funkci racionální. Jak se to obecně dělá, vyložíme v další části této kapitoly.

3. Ukažme si na jednoduchém příkladu techniku, kterou při aplikaci věty o substituci používáme: máme nalézt primitivní funkci k funkci $(x(\log^2 x + 1))^{-1}$, $x \in (0, \infty)$, která má tvar $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$. Zde je $f(u) = 1/(u^2 + 1)$, $F(u) = \operatorname{arctg} u$, a $\varphi = \log$, $\varphi'(x) = 1/x$. Proto je $F \circ \varphi$ hledanou primitivní funkcí; skutečně, je

$$(\operatorname{arctg} \circ \log)'(x) = \frac{1}{1 + \log^2 x} \cdot \frac{1}{x}\,.$$

Jak celý postup formálně provádíme? Jistě se může čtenáři zdát, že mnoho věcí bylo třeba nějak „uhodnout", ale ve skutečnosti to tak není. Obvykle se řešená úloha zapisuje ve formě „integrálu"

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\log^2 x + 1)}\,. \tag{9.4}$$

Později bude i čtenáři jasné, proč se jeví vhodné použít substituční metodu s funkcí $\log = \varphi$, $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Píšeme tady např.

$$u = \log x, \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,. \tag{9.5}$$

První rovnost popisuje substituci, druhou obdržíme tak, že na levé straně derivujeme podle u, tj. $(u)' = 1$ a „doplníme" $\mathrm{d}u$, a na pravé straně rovnosti postupujeme obdobně, derivujeme však podle proměnné x, tj. $(\log x)' = 1/x$ a pak za derivovanou funkci „doplníme" $\mathrm{d}x$. Symboly „ $\mathrm{d}u$ " a „ $\mathrm{d}x$ " nemají samostatný smysl. Vzniklou rovnost použijeme tak, že do (9.4) dosadíme $\mathrm{d}u$ za $\mathrm{d}x/x$ a pak primitivní funkci spočteme. Dostaneme tak

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} = \operatorname{arctg} u\,. \tag{9.6}$$

Konečně dosadíme podle první rovnosti v (9.5) a výsledek můžeme zapsat takto

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\log^2 x + 1)} = \operatorname{arctg}(\log x)\,. \tag{9.7}$$

Je třeba si uvědomit, že pracujeme na intervalu, a tedy každá další hledaná primitivní funkce vznikne přičtením konstantní funkce k funkci na pravé straně (9.7). Poznamenejme, že zásadně nepíšeme rovnítko mezi integrál v (9.4) a integrál v (9.6) vlevo.

Popsali jsme techniku, kterou užíváme, abychom k funkci f nalezli její primitivní funkci, v žádném případě důkaz nějakého tvrzení; máme však kdykoli možnost se přesvědčit, zda je nalezená funkce F opravdu hledanou primitivní funkcí. Stačí porovnat F' a f a pokud platí $F' = f$, *dokázali jsme*, že F je hledanou primitivní funkcí.

9.3 Integrace racionálních funkcí

Příklad 9.3.1. Je-li R racionální funkce, tj. podíl dvou polynomů s reálnými koeficienty

$$R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}\,, \tag{9.8}$$

pak v případě, že $Q \equiv 0$, není R funkce, neboť $D_R = \emptyset$. V případě, že $Q \equiv k \neq 0$ je R polynom. V netriviálních případech je stupeň $\mathrm{st}(Q)$ polynomu Q nejméně 1. Bez újmy na obecnosti můžeme dále předpokládat, že $\mathrm{st}(P) < \mathrm{st}(Q)$, jinak můžeme známým algoritmem pro dělení polynomů upravit R na součet polynomu a racionální funkce, která tuto podmínku splňuje.

Poznámka 9.3.2. Ve Větě 9.3.5 je popsáno vyjádření racionální funkce ve tvaru součtu jednodušších racionálních funkcí, kterým se často říká *parciální zlomky*. Připomeneme některé výsledky známé z algebry. Je-li R dána vzorcem 9.8, pak lze polynom Q ve jmenovateli rozložit na součin polynomů prvního a druhého stupně (opět s koeficienty z $\mathbb{R}$). Přitom tyto polynomy prvního stupně mají každý nulový bod (kořen) v $\mathbb{R}$ a polynomy druhého stupně naopak nulové body v $\mathbb{R}$ nemají. *Parciální zlomky* jsou dvojího typu

$$A/(x-\alpha)^k, \quad \text{resp.} \quad (Bx+C)/(x^2+px+q)^k\,,$$

kde $A, B, C, \alpha, p, q \in \mathbb{R}$, $p^2 - 4q < 0$ a $k \in \mathbb{N}$. K parciálním zlomkům prvního typu existují primitivní funkce na intervalech $(-\infty, \alpha)$ a (α, ∞), k parciálním zlomkům druhého typu existují primitivní funkce na $\mathbb{R}$. Vyplývá to v obou případech z Věty 9.1.6; my však ukážeme, jak lze určit tyto primitivní funkce přímo, nezávisle na zmíněné větě.

Příklad 9.3.3. Pro parciální zlomek prvního typu platí: pro všechna $x \in \mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$, $k \in \mathbb{N}$ a $k = 1$, resp. $k > 1$, je

$$(\log(|x-\alpha|))' = \frac{1}{x-\alpha}\,, \quad \text{resp.} \quad \left(\frac{-1}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}}\right)' = \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,,$$

což je ihned vidět z Věty 5.2.8 a ze vzorců pro derivování.

Poznámka 9.3.4. Na stejné teoretické úrovni je určení primitivní funkce k parciálním zlomkům druhého typu, formálně je však složitější. Je založeno na následujících faktech.

(1) Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $k = 1$, resp. $k > 1$, platí

$$(\log(x^2+px+q))' = \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,, \text{ resp.}$$
$$\left(\frac{-1}{(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}}\right)' = \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,,$$

odkud vidíme tvar primitivní funkce pro speciální případ, kdy je čitatel parciálního zlomku derivací kvadratického trojčlenu, vystupujícího v jeho jmenovateli.

(2) Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} = \frac{B}{2}\,\frac{(2x+p)}{(x^2+px+q)^k} + \left(C - \frac{pB}{2}\right)\frac{1}{(x^2+px+q)^k}\,.$$

Odtud plyne, že můžeme využít speciálního případu z bodu (1) a vyřešit formálně trochu jednodušší případ výpočtu primitivní funkce k parciálnímu zlomku $1/(x^2+px+q)^k$.

(3) Poslední krok popíšeme v obecné rovině a ozřejmíme na příkladech, které jsou uvedeny níže; viz Příklady 9.3.12 a 9.3.15. Jednoduchou lineární substitucí typu $t = \alpha x + \beta$ převedeme úlohu na nalezení primitivní funkce k funkci $1/(x^2+1)^k$, což je pro $k = 1$ podle vzorce pro derivování funkce arctg triviální, pro $k > 1$ je však nutno použít např. vzorce z Příkladu 9.2.5, nebo postupného zmenšování k podle bodu (1).

V dnešní době lze svěřit podstatnou část práce, spojené s výpočtem primitivní funkce k racionální funkci, počítači. Důležité je však vědět, že lze tyto primitivní funkce vyjádřit pomocí funkcí, které jsme již definovali, a znát teorii, na základě níž lze tuto práci algoritmizovat.

Věta 9.3.5. *Nechť $R(x) = P(x)/Q(x)$ je racionální funkce,* $0 \le \mathrm{st}(P) < \mathrm{st}(Q)$, *a oba polynomy mají vesměs reálné koeficienty. Nechť dále existují $k, l \in \mathbb{N}$ a*

$a_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, p_1, \ldots, p_l, q_1, \ldots, q_l \in \mathbb{R}$, *pro něž je* $p_r^2 - 4q_r < 0$, $1 \leq r \leq l$, *tak, že polynom* Q *lze rozložit v součin*

$$Q(x) = a_0(x-\alpha_1)^{r_1} \ldots (x-\alpha_k)^{r_k} (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \ldots (x^2+p_lx+q_l)^{s_l}\,;$$

přitom předpokládáme, že činitelé jsou vzájemně nesoudělní. Potom existují taková reálná čísla $A_{11}, \ldots, A_{1r_1}, \ldots, A_{k1}, \ldots, A_{kr_k}$ *a* $B_{11}, C_{11}, \ldots, B_{1s_1}, C_{1s_1}, \ldots, B_{l1}, C_{l1}, \ldots, B_{ls_l}, C_{ls_l}$, *že pro všechna* $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \neq 0$, *platí*

$$\begin{aligned} R(x) = {}& \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_{1r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}} + \cdots + \frac{A_{k1}}{x-\alpha_k} + \cdots + \frac{A_{kr_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}} + \\ & + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{B_{1s_1}x + C_{1s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \cdots + \\ & + \frac{B_{l1}x + C_{l1}}{x^2+p_lx+q_l} + \cdots + \frac{B_{ls_l}x + C_{ls_l}}{(x^2+p_lx+q_l)^{s_l}}\,. \end{aligned}$$

Poznámka 9.3.6. Předchozí věta se nazývá *věta o rozkladu na parciální zlomky.* Hledání primitivní funkce k R se tak redukuje na hledání primitivních funkcí k parciálním zlomkům. Tuto větu *nebudeme dokazovat*; viz např. [2] apod. Její důkaz je existenční a ujišťuje nás o tom, že v každém konkrétním případě takový rozklad existuje. Avšak praktické nalezení ve větě zmíněných konstant znamená vždy ověření, že nalezený rozklad je opravdu rozkladem pro danou funkci R. V následujících příkladech několik takových rozkladů při výpočtech primitivních funkcí nalezneme.

Poznámka 9.3.7. Nic by nám nebránilo se dohodnout a *definovat primitivní funkci* obecněji na každé množině

$$G := \bigcup \{I_\gamma;\ \gamma \in \varGamma\},$$

kde $\{I_\gamma;\ \gamma \in \varGamma\}$ je množina disjunktních otevřených intervalů I_γ (množina $\varGamma$ je vždy spočetná množina, neboť v každém intervalu I_γ můžeme zvolit racionální číslo r_γ a tak definovat prosté zobrazení $\varGamma$ do $\mathbb{Q}$). Při takové změně definice primitivní funkce by však přestala platit věta, že rozdíl dvou primitivních funkcí k funkci f je funkce konstantní, neboť ta platí pouze pro *interval.* Pokud platí za popsané situace $F'(x) = f(x)$ a $H'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in G$, je rozdíl $F - H$ funkce konstantní *na každém intervalu* $I \subset G$. K této situaci často dochází při výpočtu primitivních funkcí, proto uzavřeme následující úmluvu.

Úmluva 9.3.8. Dohodneme se na konvenci, že zápis

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\,, \quad x \in G$$

vyjadřuje, že funkce F je na každém intervalu $(a, b) \subset G$ primitivní funkcí k f.

Příklad 9.3.9. Pro $R(x) := x/(x^2 - 5x + 6)$ s množinou nulových bodů jmenovatele $\{2, 3\}$ máme najít konstanty A, B tak, aby platilo

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$. Násobením rovnosti výrazem $x^2 - 5x + 6$ dostaneme pro tato x rovnost

$$x = A(x - 2) + B(x - 3)\,, \text{ resp. } x = (A + B)x - (2A + 3B)\,.$$

Polynomy, které porovnáváme, lze však spojitě rozšířit na $\mathbb{R}$ a rovnost platí *pro všechna* $x \in \mathbb{R}$. Porovnáním koeficientů (využíváme znalostí o rovnosti dvou polynomů) dostáváme $A + B = 1$ a $2A + 3B = 0$, z čehož plyne $A = 3$ a $B = -2$. Snáze však dostaneme tyto hodnoty dosazením $x = 3$ a $x = 2$ do rovnosti vlevo.

Na každém otevřeném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ na základě provedeného výpočtu platí

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 5x + 6} = 3 \log |x - 3| - 2 \log |x - 2| = \log \frac{|x - 3|^3}{(x - 2)^2}\,.$$

Pokud bychom měli najít *všechny* primitivní funkce k R, je odpověď s pomocí Věty 9.1.6 zřejmá. Lze ji zformulovat např. takto: *je-li* $G = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$*, pak pro každou primitivní funkci* H *k* R *na otevřeném intervalu* $(a, b) \subset G$ *existuje* $C \in \mathbb{R}$ *tak, že* $H = F + C$.

Poznámka 9.3.10. Někdy se čtenář může setkat se zápisem

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log |x| + C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,. \tag{9.9}$$

My tento zápis používat nebudeme. Připomeňme si některé věci. To, že derivace konstantní funkce je funkce 0, je triviální. Že je rozdíl každých dvou primitivních funkcí k téže funkci *na intervalu* konstantní již není triviální, neboť důkaz Lemmatu 9.1.2 je založen na dalších poznatcích a v pozadí je skryta Věta 4.3.31. A nyní k možným výkladům vzorce (9.9):

1. Pokud interpretujeme symbol v (9.9) vpravo tak, jak jsme se dohodli, není důvod přičítat na pravé straně C.

2. Pokud bychom se dohodli, že symbol v (9.9) vpravo znamená množinu primitivních funkcí, není jasné *kterých*.

3. Pokud by tento symbol označoval množinu *všech* primitivních funkcí k $1/x$ na $\mathbb{R} \setminus 0$, pak vzorec (9.9) nepopisuje např. funkci, která je rovna $\log(|x|) + 3$ pro všechna $x \in (-\infty, 0)$ a $\log(|x|) - 1$ pro všechna $x \in (0, +\infty)$. Někdy se proto píše C v (9.9) nad znamení $=$, tj. „$\overset{C}{=}$“ a chápe se ve smyslu rčení „až na aditivní konstantu na každém intervalu $I \subset D_f$“. Podstatně důležitější než hledání lepšího záznamu je tomuto problému *dobře*

rozumět [3]). Toto vystihuje povahu problémů (ne všechny!), které přináší zachovávání tradičního označení „s fajfkami“. Tím je snad i obsah dříve uvedené Poznámky 9.1.7 jasnější.

Poznámka 9.3.11. Při rozsáhlejší úloze může být nalezení příslušných koeficientů i při znalosti všech reálných kořenů Q, dokonce i v případě, že Q má pouze reálné kořeny, dosti pracné. Stačí např., když jsou z těchto kořenů některé vícenásobné, a trik s dosazením nám umožní jen *částečné* zjednodušení. Metoda porovnání koeficientů sice nikdy neselže, vede však na eventuálně pracné řešení soustavy lineárních rovnic. Právě to však dnes zvládneme rychleji s pomocí počítače. Dále si ukažme řešení obtížnějších příkladů.

Příklad 9.3.12. Rozklad racionální funkce $R(x) = x^4/(x^4+1)$ započne dělením polynomu polynomem. Je

$$R(x) = \frac{x^4}{x^4+1} = 1 - \frac{1}{x^4+1}\,.$$

Vidíme, že jmenovatel *nemá* reálné kořeny; musíme proto nalézt rozklad jmenovatele na součin dvou kvadratických trojčlenů. Užijeme jednoduché úpravy: platí

$$x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)\,.$$

Oba kvadratické trojčleny nemají reálné kořeny, proto

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,.$$

Odtud bez obtíží spočteme

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right).$$

Jest pak (znamení $\pm$ si odpovídají)

$$\int \frac{x \pm \sqrt{2}}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x \pm \sqrt{2}}{x^2 \pm \sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1}\,.$$

Zde je

$$\int \frac{2x \pm \sqrt{2}}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1}\,\mathrm{d}x = \log|x^2 \pm \sqrt{2}x + 1|\,.$$

Dále platí $x^2 \pm \sqrt{2}x + 1 = (x \pm \frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t^2+1)$. Použijeme substituce a položíme $x \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} = (1/\sqrt{2})t$, takže je $\mathrm{d}x = (1/\sqrt{2})\,\mathrm{d}t$, $t = \sqrt{2}x \pm 1$. Tak

[3]) Profesor Jan Mařík (1920 – 1994), který dlouhá léta působil na MFF UK, často kladl studentům otázku, týkající se (9.9): „Můžete mi vysvětlit tento obrázek?“

převedeme výpočet

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1} \quad \text{na výpočet} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1}\,,$$

a je proto

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1} = \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}x \pm 1)\,.$$

Zbytek je již zřejmý, nesmíme však zapomenout na dělení, se kterým jsme výpočet započali. Je tedy

$$\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{x^4 + 1} = x + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\mathrm{arctg}(\sqrt{2}x + 1) + \\ + \mathrm{arctg}(\sqrt{2}x - 1)\big)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Při výpočtu jsme opět použili postupu, který jsme podrobně popsali v Příkladu 9.2.7. Poznamenejme, že v tomto případě primitivní funkce zřejmě existuje na každém intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Příklad 9.3.13. Existuje řada programů, které usnadňují rutinní výpočty. Jestliže chceme pomocí programu *Mathematica* určit primitivní funkci k funkci $f(x) = 1/(x^4 + 1)$, napíšeme

```
Integrate[1/(x^4+1),x]
```

Výsledek na obrazovce obdržíme jednak v „čitelné podobě“ (s tradičním způsobem psaní mocnin a zlomků) a pak také v „linearizovaném tvaru“, v němž píšeme exponenty do téže úrovně [4])

```
ArcTan[(-2^(1/2) + 2*x)/2^(1/2)]/(2*2^(1/2)) +
ArcTan[(2^(1/2) + 2*x)/2^(1/2)]/(2*2^(1/2)) -
Log[1 - 2^(1/2)*x + x^2]/(4*2^(1/2)) +
Log[1 + 2^(1/2)*x + x^2]/(4*2^(1/2)) .
```

Program umožňuje i snazší přechod k tištěné podobě, neboť má také výstup do sázecího programu TEX. Pokud však použijeme příslušné instrukce TeXForm, musíme stejně TEXový výstup ještě graficky upravit; výsledek srovnejte s částí výpočtu v Příkladu 9.3.12.

Příklad 9.3.14. Přes nedostatky, které program *Mathematica* má, je významným pomocníkem. Následující ukázka ilustruje, že počítač nám opravdu ušetří mnoho zdlouhavé a nudné práce. Prohlédne-li si čtenář zadání úlohy, může se mu zdát, že výpočet by neměl být složitý. Avšak po zadání

[4]) Zkratka ArcTan je užita pro arkustangens.

```
Integrate[(2x+3)/(x*(x-1)*(x-2)^2*(x^2+2*x+3)^3),x]
```

dostaneme za cca 50 sekund na středně výkonném PC (80486, 60 MHz) výsledek (opět jsme ho přepsali do čitelnější podoby)

$$\int \frac{2x+3}{x(x-1)(x-2)^2(x^2+2*x+3)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{-7}{2662(x-2)} - \frac{20x+3}{2904(x^2+2x+3)^2} -$$
$$-\frac{1054x+1587}{95832(x^2+2x+3)} - \frac{1909\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}((1+x)/\sqrt{2})}{395307} + \frac{5\log|x-1|}{216} -$$
$$-\frac{439\log|x-2|}{58564} - \frac{\log|x|}{36} + \frac{38347\log(x^2+2x+3)}{6324912}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1,2\}\,.$$

Doplnili jsme jen popis množiny, označené v Poznámce 9.3.7 symbolem G, a absolutní hodnoty ve sčítancích s logaritmy.

Příklad 9.3.15. Uvedeme ještě jednodušší příklad s parciálním zlomkem, který má ve jmenovateli kvadratický trojčlen ve vyšší mocnině. Program *Mathematica* nám dá

$$\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x-2}{2(x^2+2x+3)} + \frac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right).$$

Jednoduchou „ruční“ úpravou dostaneme

$$\frac{3x+5}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{3}{2}\,\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{2}{((x+1)^2+2)^2}\,.$$

Primitivní funkce k prvnímu sčítanci na pravé straně je racionální funkce:

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\,\frac{1}{(x^2+2x+3)}\,.$$

Integrál druhého sčítance převedeme substitucí $t = (x+1)/\sqrt{2}$ na

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\Big(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\Big)\right).$$

Pro výpočet jsme použili vzorec (9.3) z Příkladu 9.2.5. Po dosazení dostáváme

$$\int \frac{2}{((x+1)^2+2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right).$$

Sloučením a úpravou dostáváme žádaný výsledek.

Poznámka 9.3.16. V předcházejících příkladech jsme se seznámili s integrováním racionálních lomených funkcí, tj. s hledáním jejich primitivních funkcí. Příklady obsahovaly ukázky integrace parciálních zlomků a pochopí-li čtenář *princip výpočtu*, měl by bez obtíží zvládnout další příklady tohoto typu.

Existuje řada typů funkcí, jejichž integraci lze na integraci racionální funkce převést vhodnou substitucí. Je-li např. f racionální v e^x, stačí substituovat $t = \mathrm{e}^x$. Podobně se převede na integraci racionální funkce

$$\int R(\log x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x}\,,$$

kde R je libovolná racionální funkce. Stačí použít substituci $t = \log x$.

Definice 9.3.17. Součet konečně mnoha výrazů tvaru $ax^m y^n$, kde $m, n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$, je polynom ve dvou proměnných. Podíl takových polynomů (ve jmenovateli nesmí být polynom identicky rovný 0) je racionální funkce ve dvou proměnných; dále ji značíme obecně opět R.

Příklad 9.3.18. Hledáme-li např. primitivní funkci k funkci

$$R\Big(x, \Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)^{1/n}\Big)\,, \qquad (ad-bc) \neq 0,\ n \in \mathbb{N}\,,$$

použijeme substituci $t = ((ax+b)/(cx+d))^{1/n}$, která převede úlohu na integraci racionální funkce (pozor na interval(-y), na nichž dostaneme výsledný vzorec). Tak např. použitím programu *Mathematica* dostaneme

$$\int \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,\mathrm{d}x = -x - 4\sqrt{2x+3} +$$
$$+9\,\mathrm{arctgh}\Big(\frac{\sqrt{2x+3}}{3}\Big) + \mathrm{arctgh}(\sqrt{2x+3}) - \frac{9\log(3-x)}{2} + \frac{\log(1+x)}{2}\,.$$

Je ovšem nutné si doplnit podmínku $x \in (-3/2, +\infty)$. Pokud program použijete ke kontrole vlastního výpočtu, může se vám stát, že vynaložíte značnou námahu na důkaz, že oba výsledky, váš i ten, který poskytl počítač, jsou ekvivalentní. Použijeme-li substituci $t = \sqrt{2x+3}$ a spočteme $x = (t^2-3)/2$, $\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$, převedeme úlohu na určení

$$\int \frac{t^2+2t+3}{-t^2+2t+3}\,t\,\mathrm{d}t = -t^2/2 - 4t - 9\int\frac{\mathrm{d}t}{t-3} + \int\frac{\mathrm{d}t}{t+1}\,,$$

což následně dá po dosazení výsledek ve tvaru

$$\int \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,\mathrm{d}x = \frac{3-2x}{2} - 4\sqrt{2x+3} - 9\log|\sqrt{2x+3}-3| +$$
$$+\log|\sqrt{2x+3}+1|\,, \quad x \in (-3/2, \infty)\,.$$

Čtenář si může pro zajímavost zkusit dokázat, že oba výsledky jsou ekvivalentní.

Příklady 9.3.19. Obdobně postupujeme, jestliže integrujeme racionální funkce „v sinu a kosinu“ $R(\sin x, \cos x)$. Nejprve několik obecných zásad:

1. Platí-li $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, vede k převodu na integraci racionální funkce substituce $t = \cos x$ (integrand je funkce „lichá v sinu“).

2. Analogicky, platí-li $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, vede k převodu na integraci racionální funkce substituce $t = \sin x$ (integrand je funkce „lichá v kosinu“).

3. Platí-li $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, vede k převodu na integraci racionální funkce substituce $t = \operatorname{tg} x$.

4. V ostatních případech vede k cíli substituce $t = \operatorname{tg}(x/2)$.

Snadno nahlédnete, že takovým případem je např. nalezení primitivní funkce k funkci $f(x) = 1/(\sin x + 2)$. Pokud svěříte úkol programu *Mathematica*, dostanete (funkce sec (sekans) a cosec (kosekans), o kterých jsme se v partii o goniometrických funkcích nezmiňovali, neboť se bez nich snadno obejdeme, jsou definovány vztahy $\sec = 1/\cos$ a $\operatorname{cosec} = 1/\sin$)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + 2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\Big(\frac{\sec(x/2)\ (\cos(x/2) + 2\ \sin(x/2))}{\sqrt{3}}\Big).$$

Na jakém intervalu by měl vzorec platit se uživatel programu *Mathematica* nedozví [5]). Protože chceme poodhalit, jak věci běží, budeme postupovat ještě „ručně“: k řešení použijeme standardní substituci $\operatorname{tg}(x/2) = t$, $x \in (-\pi, \pi)$; na tomto intervalu je funkce $\operatorname{tg}(x/2)$ rostoucí, spojitá a má tam všude vlastní (spojitou) derivaci. Dosazením do

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + 2}$$

dostaneme pomocí transformačních vztahů

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \iff x = 2 \operatorname{arctg} t\,, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\,,$$

a vyjádření pro $\sin x$ a $\cos x$

$$\begin{aligned}
\sin x =& \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}\,,\\
\cos x =& \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,
\end{aligned}$$

vyšetřovaný integrál v transformovaném tvaru

$$\begin{aligned}
\int \Big(\frac{2t}{1+t^2} + 2\Big)^{-1} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} &= \int \frac{2}{2t^2 + 2t + 2} = \\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1/2)^2 + (3/4)} = \frac{4}{3} \int \frac{\mathrm{d}t}{(2t + 1/\sqrt{3})^2 + 1}\,.
\end{aligned}$$

[5]) Některé programy, např. *Derive*, jsou při řešení této úlohy „chytřejší“.

Nyní provedeme další (lineární) substituci

$$\frac{2t+1}{\sqrt{3}} = u \Longleftrightarrow t = \frac{u\sqrt{3}-1}{2}, \quad \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u\,,$$

pomocí které přejde vyšetřovaný integrál do tvaru

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\,.$$

Dosazením za u do příslušné primitivní funkce $(2/\sqrt{3})\operatorname{arctg} u$ dostáváme primitivní funkci k vyšetřované funkci (**??**)

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg}(x/2)+1}{\sqrt{3}} =: F(x) \tag{9.10}$$

pro $x \in (-\pi, \pi)$. Dospěli jsme ke stejnému výsledku jako počítač s tím rozdílem, že víme, že F je definována nalezeným vztahem pouze na intervalu $(-\pi, \pi)$ nebo, přihlédneme-li ke zřejmé periodicitě f i F, rovněž ještě na každém z intervalů $((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. To však není konec. Snadno nahlédneme, že f je spojitá a kladná na $\mathbb{R}$, tedy hledaná primitivní funkce bude definována a bude rostoucí na $\mathbb{R}$. V tomto stadiu úlohu opustíme a vrátíme se k ní v Kapitole 10.

Příklad 9.3.20. Problém nalezení primitivní funkce k racionální funkci obsahující na místě jedné proměnné odmocninu z kvadratického trojčlenu, tj.

$$R\Big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\Big), \quad a \neq 0\,,$$

lze také převést pomocí substituce na integraci racionální funkce. Metoda je opět velmi stará a možností je několik; zpravidla se pro ně užívá označení *Eulerovy substituce*. Někdy se vzájemně rozlišují označením *druhu*, my však tuto terminologii užívat nebudeme. Při řešení postupujeme takto:

1. Má-li kvadratický trojčlen reálné kořeny α, β, $\alpha < \beta$, tj. platí $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, je

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = |x-\alpha| \sqrt{\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}}\,,$$

takže převádíme úlohu na případ, řešený v Příkladu 9.3.20. Je-li $a < 0$, můžeme absolutní hodnotu vynechat, neboť pouze na intervalu (α, β) je odmocnina definována. Je-li $a > 0$, pak na intervalu $(-\infty, \alpha)$ absolutní hodnotu vynechat nesmíme.

Pro případ $a > 0$ se též užívá substituce

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x\,,$$

která může být někdy méně pracná.

2. V případě, že platí $c > 0$, klademe

$$tx + \sqrt{c} = \sqrt{ax^2 + bx + c}\,.$$

Poznamenejme, že pokud kvadratický trojčlen nemá reálné kořeny, je stále kladný (v případě, že je záporný, není $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ definována pro žádné $x \in \mathbb{R}$), tedy i pro případ $x = 0$. Odtud plyne $c > 0$.

Příklad 9.3.21. Příklady tohoto typu mohou být i dosti pracné, jeden jednodušší si však ukážeme. Určíme např. primitivní funkci k funkci $(x\sqrt{x^2 + x + 1})^{-1}$. S ohledem na $c = 1 > 0$ použijeme substituci

$$tx + 1 = \sqrt{x^2 + x + 1}, \quad \text{resp.} \quad x = \frac{-2t + 1}{t^2 - 1}$$

a převedeme tak vyšetření

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 + x + 1}} \quad \text{na výpočet} \quad \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{2t - 1}\,.$$

Nyní do primitivní funkce $\log|2t - 1|$ dosadíme za t výraz

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x}\,,$$

čímž obdržíme jednu z hledaných primitivních funkcí

$$\log\left|\frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2}{x}\right|$$

na intervalu $(-\infty, 0)$, nebo na $(0, +\infty)$.

Poznámka 9.3.22. Po rozkladu racionální funkce na parciální zlomky vidíme, že integrace některých vyžaduje transcendentní funkce (log, arctg), a že některé mají za primitivní funkci opět funkci racionální. Existuje metoda, kterou objevili Michal Vasil'evič Ostrogradskij (1801 – 1862) a Charles Hermite (1822 – 1901) a která často zjednoduší dlouhý výpočet, spočívající na integraci parciálních zlomků. Zhruba řečeno, rozdělí se racionální funkce na dvě části, z nichž jedna má racionální a druhá transcendentní primitivní funkci. Praktické zvládnutí těchto metod však ztrácí spolu se zdokonalováním programů pro symbolickou manipulaci s výrazy na významu. Těchto programů je více a často jsou levnější a přitom stejně účinné jako *Mathematica*.

Zkuste ověřit následující výsledek:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4 - 1)^3} = \frac{-x}{8(x^4 - 1)^2} + \frac{7x}{32(x^4 - 1)} - \frac{21 \operatorname{arctg} x}{64} + \frac{21 \log(x - 1)}{128} - \frac{21 \log(x + 1)}{128} =$$
$$= \frac{7x^5 - 11x}{32(x^4 - 1)^2} + \frac{21}{128} \log\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| - \frac{21}{64} \operatorname{arctg} x$$

Snadno lze nahlédnout, že i když je postup vcelku zřejmý, je značně pracný. Použití popsané metody by výpočet poněkud zjednodušilo. Metoda je hezky vyložena např. v [3].

Historické poznámky 9.3.23. V této kapitole jsme se pokusili poodhalit kořeny zájmu matematiků o primitivní funkce. Přiblížili jsme si jejich souvislost s „obsahem podgrafu“ spojité funkce, což nás vede při zkoumání „kořenů integrace“ až do starověku. Již Archimedes (287 – 212 před n. l.) obdržel pomocí vztahů

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{9.11}$$

výsledky o kvadraturách rovinných obrazců ekvivalentní vztahům

$$\int_0^a x \, \mathrm{d}x = a^2/2, \quad \int_0^a x^2 \, \mathrm{d}x = a^3/3.$$

Z dnešního hlediska stačí znalost vzorečků (9.11) a zacházení s limitami (znalost limitního přechodu) k tomu, abychom předcházející vzorce vcelku jednoduše odvodili. Úvahy, které prováděl Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647) ho dovedly (ne zcela korektními postupy) k výsledku, který lze interpretovat jako vzorec

$$\int_0^a x^n \, \mathrm{d}x = a^{n+1}/n+1.$$

Kvadratury „podgrafů“ mocnin se složitějším exponentem (nikoliv již z $\mathbb{N}$) byly poprvé studovány Johnem Wallisem (1616 – 1703). Jeho výsledky měly rozhodující vliv na práce Isaaca Newtona (1643 – 1727) z oblasti infinitezimálního počtu. K podobným výsledkům dospěli též Pierre de Fermat (1601 – 1665) a Evangelista Torricelli (1608 – 1647). Výsledky však měly geometrický charakter, pojem integrálu nebyl konstituován.

Poznamenejme již na tomto místě, že infinitezimální technikou dospěl William Neil (1637 – 1670) r. 1657 k výpočtu délky křivky (problém rektifikace křivky). Další jeho matematické výsledky nejsou známy. Teprve později dostávají u Newtona úvahy tohoto typu *obecný* charakter: bez nároků na přesnost poznamenejme jeho vyjádření základní věty kalkulu ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = y,$$

kde A je plocha pod grafem křivky o rovnici $y = f(x)$. Poslední Newtonovou prací o kalkulu byla práce *De Quadratura Currarum.* Napsal ji patrně v letech 1691–1693, byla však první, která vyšla *tiskem* (Newtonovy práce však kolovaly zejména v Anglii v opisech). Byla otištěna jako Appendix k jeho práci z oblasti fyziky *Optics* v r. 1704. Vyhneme se technickému popisu jejího obsahu a odvoláme se na názor jiného významného matematika. Jacques Hadamard (1865 – 1963) při příležitosti newtonovských oslav (písemně vyšla jeho práce v Cambridgi v r. 1947) vyjádřil přesvědčení, že v oblasti integrace racionálních funkcí dospěl Newton prakticky k výsledkům, které znamenaly soudobé znalosti o tomto předmětu ještě o tři sta let později.

Přibližme si ještě různý úhel pohledu na tuto problematiku u Newtona a Leibnize. Newton operoval s částí plochy pod grafem a při přírůstku x o Δx dospěl ke vztahu $\Delta A \doteq f(x)\Delta x$, což po přechodu $\Delta x \to 0$ dává

$$\mathrm{d}A = f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = f(x).$$

Leibniz si plochu pod grafem představoval jako součet malých obdélníčků

$$z_n = f(x_1)\Delta x_1 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n\,,$$

resp. $z_n - z_{n-1} = f(x_n)\Delta x_n$. Pak dospívá pro $\Delta x_i \to 0$ k vyjádření (označení „integřítkem“ tj. symbolem $\int$ pochází od Leibnize)

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Nyní, ve shodě s Fourierovým označením z r. 1822, vyjadřujeme plochu „mezi a a b“ symbolem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

a pro „neurčitý integrál“ užíváme označení primitivní funkce.

Metoda per-partes má své kořeny už v geometrických úvahách Torriceliho z r. 1644 a Fermata z r. 1657; substituční metoda sahá rovněž k Fermatovým úvahám (1657) geometrické povahy. Později u Newtona nacházíme použití substituční metody v ryze analytické podobě, v primitivní formě ji však znal již Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675) (1645).

Letmo jsme se zmínili o tom, že některé primitivní funkce neumíme pomocí zavedených funkcí vyjádřit. Tento případ není ojedinělý, takových funkcí je hodně. Pafnutij L'vovič Čebyšev (1821 – 1894) dokázal například toto tvrzení (ponechme stranou fakt, že nedefinujeme přesně, co to jsou elementární funkce, a že se spokojíme s intuitivním chápáním tohoto pojmu): *Primitivní funkci k funkci $x^p(1-x)^q$ lze vyjádřit elementárními funkcemi, právě když alespoň jedno z trojce čísel $p, q, p+q$ je celé.* Další informace tohoto typu lze nalézt např. v [6].

K pojmu integrálu se ještě podrobně vrátíme. Zatím jsme popsali techniku hledání primitivních funkcí a alespoň částečně přiblížili cestu poznání toho, že cesta k určování obsahu složitějších rovinných obrazců vede přes integrál. V dnešní době ztrácí důraz na perfektní zvládnutí početní techniky pro hledání primitivních funkcí poněkud smysl. Možnosti programů, jakým je např. *Mathematica* a jí podobné „balíky“ algoritmů pro náročné výpočty, realizovaných na počítačích, neustále rostou. Zdaleka však neposkytují informace, jakými metodami byl výsledek nalezen a v jaké míře je „úplný“ nebo, přesněji řečeno, správný. Ve starších učebnicích byla otázkám početní techniky primitivních funkcí, resp. integrálů, věnována hlubší pozornost; viz např. [2].

Hlubší pohled na historický vývoj integrálu přesahuje rozsah tohoto textu, čtenáře odkazujeme na velmi pěknou publikaci [5]. Poměrně snadno je též u nás dostupná starší publikace [4].

Literatura:

[1] Hamming R. W.: *An elementary discussion of the transcendental nature of the elementary transcendental functions*, Amer. Math. Monthly **77** (1970), 294 – 297.

[2] Jarník, V.: *Integrální počet I*, Academia, Nakladatelství ČSAV, 1963.

[3] Klambauer, G.: *Aspects of Calculus*, Springer, Berlin, 1986.

[4] Pěsin, I. N.: *Razvitije ponjatija intěgrala*, Nauka, Moskva, 1966.

[5] Schwabik, Š., Šarmanová P.: *Malý průvodce historií integrálu*, Prometheus, Praha, 1996, (Dějiny matematiky, Svazek 6).

[6] Stein, S. K.: *Formal integration: danger and suggestions*, str. 290 – 299, obsaženo v: *Apostol, T. M. and al.*, *A century of calculus II*, The Mathematical Association of America, 1992, (sborník článků z *American Mathematical Monthly* a *Mathematical Magazine*).

[7] Studnička, F. J.: *Základové vyšší mathematiky. O počtu integrálním*, Nákladem spisovatelovým, Praha, 1871.