Matematická analýza II

1 Křivky

- Definice křivky a její parametrizace, příklady technických křivek.
- Odvození parametrizace: elipsa, cykloida, kardioida.
- Vyšetřování průběhu křivky zadané parametricky: body vratu, monotonie, extrémy; konvexnost a konkávnost, inflexní body; asymtoty (vertikální a se směrnicí).
- Křivky v polárních souřadnicích: zavedení polárních souřadnic, převod mezi parametrickým vyjádřením křivky a rovnicí v polárních souřadnicích, vyšetřování průběhu křivky zadané rovnicí v polárních souřadnicích, odvození rovnice regulárních kuželoseček v polárních souřadnicích.

2 Taylorův polynom

- Derivace vyšších řádů, diferenciál prvního řádu, souvislost existence f' a existence $\mathrm{d}f(x_0, h)$, tvar diferenciálu prvního řádu; rovnice tečny.
- Taylorův polynom: odvození jeho tvaru, Taylorova věta, Lagrangeův tvar zbytku.
- Taylorovy polynomy vybraných elementárních funkcí.
- Symbol malé o.
- Nutná a postačující podmínka bodové konvergence Taylorovy řady $T(f; x_0)$ k funkci f, obor konvergence vybraných Taylorových rozvojů, obor konvergence mocninné řady. Substituce v Taylorových rozvojích.
- Aplikace Taylorových polynomů: aproximace funkčních hodnot, výpočet limit.
- Odvození Taylorových polynomů pomocí integrace mocninných řad ($\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$).
- Aproximace π pomocí rozvoje funkce arctg, rozklady $\operatorname{arctg} 1$.
- Metoda inverze řady.

3 Elementární funkce a jejich zavedení

- Obecná mocnina, odmocniny, výpočet.
- Exponenciální funkce: zavedení SŠ i pomocí funkcionálních rovnic.
- Logaritmická funkce: zavedení (SŠ), přirozený logaritmus (proč je přirozený), výpočty logaritmů pomocí n-tých odmocnin. Odvození základních vztahů.
- Goniometrické funkce: zavedení ZŠ, SŠ, pomocí funkcionálních rovnic, pomocí mocninné řady. Cyklometrické funkce. Odvození základních vztahů mezi goniometrickými funkcemi a mezi cyklometrickými funkcemi.
- Hyperbolické funkce: vlastnosti těchto funkcí a odvození jejich vzájemných vztahů.

4 Primitivní funkce

- Motivace: obsah (obsah kruhu), souvislost obsahu a derivace; popis „proměnlivých jevů“, volný pád.
- Definice obsahu, odvození vztahů pro obsah základních geometrických útvarů.
- Definice primitivní funkce, otázka jednoznačnosti.
- Hledání primitivních funkcí: linearita, per-partes, první a druhá věta o substituci, základní příklady.
- Integrace racionálních funkcí, rozklad na parciální zlomky, integrace parciálních zlomků prvního a druhého druhu.
- Základní typy substitucí: goniometrické substituce (sin, cos, tg, univerzální), vyjádření sinu a kosinu pomocí funkce tangens a tg $\frac{x}{2}$; integrace funkcí obsahujících exponenciálu, odmocninu lineární lomené funkce, ln, Eulerovy substituce, aplikace hyperbolických funkcí.
- Elementárnost primitivní funkce, vyšší transcendenty, příklady, integrace pomocí mocninných řad.
- Zobecněná primitivní funkce: definice, zobecněná primitivní funkce k Heavisideově funkci a funkci signum.

5 Riemannův integrál

- Darbouxova definice Riemannova integrálu (dělení, norma dělení, horní a dolní součty), geometrická interpretace. Vlastnosti horních a dolních součtů – nerovnosti mezi nimi. Kritérium riemannovské integrovatelnosti ($S(f;D) - s(f;D) < \varepsilon$).
- Riemannova definice Riemannova integrálu (dělení, výběr). Ekvivalence Riemannovy a Darbouxovy definice integrálu.
- Aplikace Riemannova integrálu: délka křivky, objem rotačního tělesa, obsah pláště rotačního tělesa, těžiště (hmotný střed) tenké homogenní desky. Důkaz Cavalieriho principu pro rovinné útvary, aplikace Cavalieriho principu.
- Vlastnosti Riemannova integrálu: nezápornost integrálu nezáporné funkce, linearita (je aditivní a homogenní), monotonie, integrovatelnost absolutní hodnoty, $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$, integrovatelnost na podintervalu a linearita vzhledem k mezím integrace. Doplnění definice Riemannova integrálu pro případ degenerovaného intervalu a zaměněných mezí integrace.
- Postačující podmínky riemannovské integrovatelnosti: spojitost a monotonie.
- Newtonův–Leibnizův vzorec. Definice Newtonova integrálu.
- Věta o střední hodnotě integrálního počtu.
- Integrál jako funkce horní meze. Důkaz existence primitivní funkce ke spojité funkci.
- Zobecněný Riemannův integrál: integrál nevlastní vlivem meze a funkce, definice, existence, konvergence; výpočet.