Matematická analýza II
Osnova cvičení

1 Cvičení 21. 2. 2017 a 22. 2. 2017

1.1 Rovinná křivka a její průběh

- Křivka (parametrizovaná, hladká, regulární, sama sebe protínající v nejvýše konečně mnoha bodech).
- Průběh křivky: první a druhá derivace vektorové funkce. Monotonie, extrémy, konvexnost a konkávnost.
- Tečný vektor a tečna ke křivce.

1.2 Konkrétní křivky

- Kružnice: $x(t) = r \cdot \cos t, \quad y(t) = r \cdot \sin t$
- Elipsa: $x(t) = a \cdot \cos t, \quad y(t) = b \cdot \sin t$
- Cykloida: $x(t) = r \cdot (t - \sin t), \quad y(t) = r \cdot (1 - \cos t)$
- Epicykloidy, např. kardioida ($r_1 = r_2$):
  $x(t) = r \cdot (2\cos t - \cos 2t), \quad y(t) = r \cdot (2\sin t - \sin 2t)$
- Hypocykloidy, např. asteroida ($r_1 = 4\,r_2$):
  $x(t) = \frac{1}{4} r \cdot (3\cos\frac{t}{4} + \cos\frac{3t}{4}), \quad y(t) = \frac{1}{4} r \cdot (3\sin\frac{t}{4} - \sin\frac{3t}{4})$

1.3 Domácí cvičení

1. Odvoďte parametrizaci elipsy, cykloidy, kardioidy.
2. Ověřte, že asteroida má také parametrizaci $x(t) = r \cdot \cos^3\frac{t}{4}, \quad y(t) = r \cdot \sin^3\frac{t}{4}$
3. Odvoďte z parametrického vyjádření implicitní rovnici: elipsy, asteroidy.
   (U kružnice je to snadné, vychází $x^2 + y^2 = r^2$.)
4. Vyšetřete průběh těchto křivek: a) cykloida b) asteroida.
5. Rozmyslete si následující definice a tvrzení.

Poznámka. Je třeba rozlišovat mezi křivkou $\mathcal{K} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x = x(t), y = y(t), t \in J\}$ a její parametrizací $x = x(t), y = y(t), t \in J$ (stručně psáno $\vec{x}(t)$, $t \in J$).

Věta. Nechť $t_0 \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{t \to t_0+} x(t) = +\infty$, resp. $-\infty$. Potom přímka $y = kx + q$ je *asymptotou křivky* $\mathcal{K}$ pro $x \to +\infty$, resp. $x \to -\infty$, nebo pro $t \to t_0+$, jestliže platí

$$k = \lim_{t \to t_0+} \frac{y(t)}{x(t)} \in \mathbb{R}, \quad q = \lim_{t \to t_0+} \big(y(t) - kx(t)\big) \in \mathbb{R}.$$

Podobně pro $t \to t_0-$ a pro t nevlastní.

Definice. Nechť $t_0 \in \mathbb{R}$ je bodem nespojitosti 2. druhu funkce $y(t)$ takovým, že alespoň jedna jednostranná limita $\lim\limits_{t \to t_0+} y(t)$, $\lim\limits_{t \to t_0-} y(t)$ je nevlastní a $\lim\limits_{t \to t_0+} x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$. Potom přímka $x = x_0$ se nazývá *vertikální asymptota* křivky $\mathcal{K} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x = x(t), y = y(t), t \in J\}$.

2 Cvičení 28. 2. 2017 a 1. 3. 2017

2.1 Křivky v polárních souřadnicích

- Zavedení polárních souřadnic, převod mezi souřadnicemi polárními a kartézskými.
- Převod mezi rovnicí křivky v polárních souřadnicích, parametrickými rovnicemi, implicitní rovnicí.
- Návod na vyšetřování křivek v polárních souřadnicích.
- Průběh křivky zadané parametrickými rovnicemi.
- Křivky v programu Geogebra: `https://www.geogebra.org/download`
  Příklad zadání: `(sin(t), 2 cos(t))`

2.2 Konkrétní křivky

- Archimédova spirála: $\varrho = a \cdot \varphi$, $a > 0$
- Kardioida: $\varrho = 2r \cdot (1 - \cos\varphi)$

2.3 Osnova vyšetřování průběhu křivky

- Přípustné hodnoty parametru t, periodičnost, průsečíky se souřadnicovými osami.
- První derivace: body vratu (extrémy funkce $x(t)$) a body, v nichž 1. derivace neexistuje; monotonie, extrémy.
- Druhá derivace: inflexní body, konvexnost, konkávnost.
- Asymptoty: limita pro $t \to t_0$, přičemž t_0 hledáme taková, aby pro $t \to t_0$ nastalo:
  a) $y(t) \to \pm\infty$ (vertikální asymptoty) b) $x(t) \to \pm\infty$ (asymptoty se směrnicí).
- Načrtnutí grafu.

2.4 Domácí cvičení

Vyšetřete průběh následujících křivek.

1. $x(t) = \dfrac{\ln t}{t^2}$, $y(t) = t^2 \ln t$ 2. $x(t) = t + e^{-t}$, $y(t) = 2t + e^{-2t}$

3. $x(t) = \dfrac{t}{3 - t^2}$, $y(t) = \dfrac{t(2 - t^2)}{3 - t^2}$ 4. $x(t) = \dfrac{t^3}{t^3 + 1}$, $y(t) = \dfrac{t^2}{t^3 + 1}$

5. $x(t) = \sqrt{1 - t^2}$, $y(t) = \sqrt{1 - t^2}$

Průběh křivky z bodu **3 vypracujte na samostatný papír** (řešení se bude odevzdávat na příštím cvičení).

Vyšetřete průběh následujících křivek zadaných v polárních souřadnicích.

1. $\varrho(\varphi) = 2\varphi$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ 2. $\varrho(\varphi) = 2 \cdot (1 - \cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$

3 Cvičení 7. 3. 2017 a 8. 3. 2017

3.1 Křivky v polárních souřadnicích

- Odvození rovnice elipsy v polárních souřadnicích pomocí kosinové věty.
- Je dána křivka:

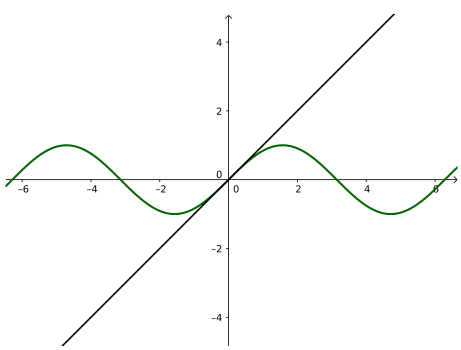
$$\varrho(\varphi) = \sqrt{2\cos 2\varphi}$$

  1. Vyšetřete její průběh.
  2. Její parametrické rovnice jsou: $x(t) = \sqrt{2\cos 2t} \cdot \cos t$, $y(t) = \sqrt{2\cos 2t} \cdot \sin t$.
     Ukažte, že parametrizace této křivky je také:
     $x(t) = t \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{1+t^2}{1+t^4}$, $y(t) = t \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{1-t^2}{1+t^4}$.
     Vidíme, že se v jedné parametrizaci vyskytují goniometrické funkce, v druhé však ne. Jak je to možné?

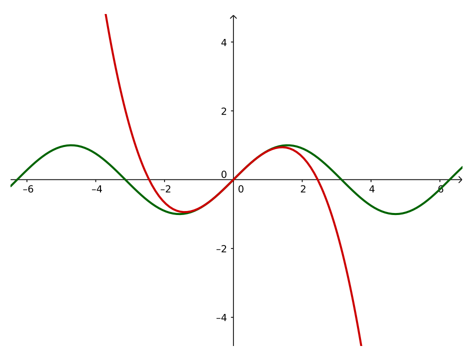
- Ve sbírce Bartsch: *Matematické vzorce* si prolistujte kapitolu o křivkách. Jak se nazývá křivka vyšetřovaná v předchozím bodě?

3.2 Taylorův polynom – aproximace funkce sinus

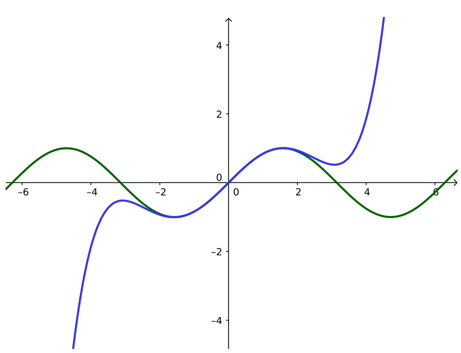
Aproximace funkce $y = \sin x$ Taylorovými polynomy stupně 1, 3, 5, 7.



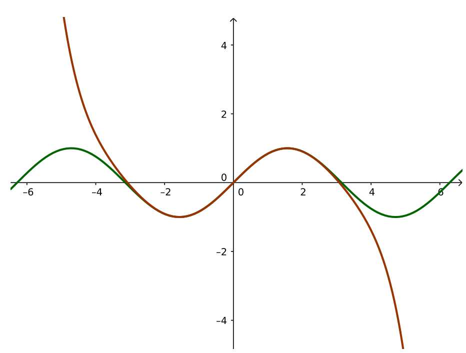
$y = x$



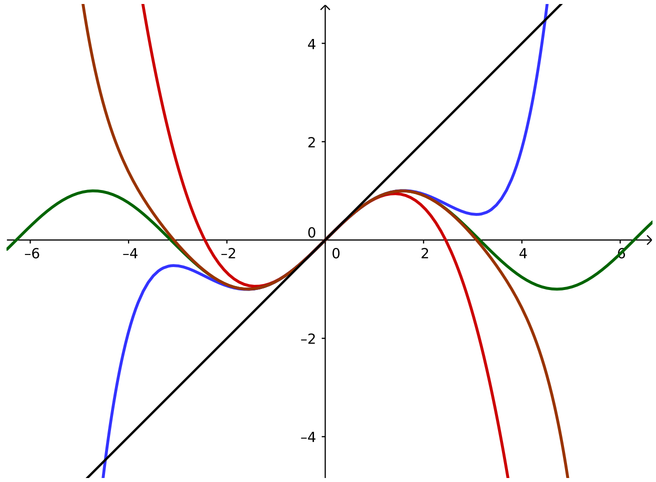
$y = x - \dfrac{x^3}{3!}$



$y = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$



$y = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}$



3.3 Aplikace Taylorova polynomu

Rozviňte následující funkce do Taylorovy řady (v bodě $x_0 = 0$, není-li uvedeno jinak):

1. $y = \mathrm{e}^x$ 2. $y = \sin x$ 3. $y = \cos x$ 4. $y = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ 5. $y = \ln(1+x)$

6. $y = \dfrac{1}{1-x}$ 7. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 8. $y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ 9. $y = \mathrm{e}^{-x^2}$

10. $y = \cos x^2$ 11. $y = \cos\sqrt{x}$ 12. $y = \sqrt{1+x}$ 13. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

14. $y = \dfrac{1}{3-2x}$ 15. $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0,\ f(0) = 0$ 16. $y = \sin x$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{6}$

Vypočtěte se zadanou přesností:

1. e, 10^{-5} 2. $\sqrt{1+\dfrac{1}{10}}\,,\ 10^{-5}$ 3. $\ln 2\,,\ 10^{-3}$ (2 způsoby) 4. $\sin 1^\circ\,,\ 10^{-4}$

5. $\sin 1^\circ\,,\ 10^{-8}$ 6. $\cos 18^\circ\,,\ 10^{-3}$ střed 30°: 7. $\sin 33^\circ\,,\ 10^{-6}$ 8. $\sin 28^\circ\,,\ 10^{-8}$

9. $1{,}1^{1{,}2}\,,\ 10^{-1}$ 10. $1{,}1^{0{,}8}\,,\ 10^{-1}$

Pomocí Taylorova polynomu vypočtěte limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$ 7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\frac{x}{2}-\sqrt{1+x}}{x^2}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh x - \cos x}{x^2}$ 10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \cosh x - \sin x}{x^3}$ 11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{(1+x)\cdot\ln(1+x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right)$ 13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\ln^2(1+x^2)}$ 14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{\ln(1+2x^3)}$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[4]{1+4x}}{\cos 3x - \cos 4x}$ 16. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x\right)$ 17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{cotg} x - 1}{\sinh^2 x}$

[8. 1/8, 9. 1, 10. 1/3, 11. 1/2, 12. 1/2, 13. −1/12, 14. 1/8, 15. 1/7, 16. 2/3, 17. −1/3]

3.4 Python 3 – návod k použití

- Programovací jazyk Python 3 je možno zdarma stáhnout z oficiálních stránek projektu `https://www.python.org/` (verze 3.6.0 nebo vyšší).
- Programy mají příponu `.py`, otevírají se v editoru IDLE (je součástí instalace Pythonu): jeden klik pravým tlačítkem myši na soubor s příponou `.py` a zvolit *Edit with IDLE*).
- Spuštění programu: F5.
- Stručný přehled základů Pythonu: zde v pdf
- Podrobnější přehled základů Pythonu: zde v pdf.
- Oficiální tutoriál pro zájemce: `https://docs.python.org/3/tutorial/`.

3.5 Program v jazyce Python 3: exponenciála

```
# Taylorův polynom funkce y = e^x

def Tayl_exp(x, n):
    clen = 1
    Tayl_polyn = 1

    for k in range(1, n+1):
        clen = clen * x / k
        Tayl_polyn = Tayl_polyn + clen

    return Tayl_polyn

print(Tayl_exp(1/2, 15))
```

Výstup z programu:
`1.648721270418251`

3.6 Domácí cvičení

1. Vyšetřete průběh křivky $\varrho(\varphi) = \sqrt{2\cos 2\varphi}$ a splňte i další úkoly, které jsou u ní zadány.
2. Prolistujte si kapitolu o křivkách ve sbírce Bartsch (viz výše).
3. Z kapitoly „Aplikace Taylorova polynomu“:
   - Rozviňte: 1–6, 13.
   - Vypočtěte se zadanou přesností: 1, 4, 5.
   - Limity: 1–3, 5.
4. Nemáte-li oblíbený jiný jednoduchý programovací jazyk, tak se seznamte s jazykem Python 3. Co dělá prográmek uvedený v předchozí kapitole?

4 Cvičení 14. 3. 2017 a 15. 3. 2017

4.1 Základní Taylorovy rozvoje

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad \forall x \in (-1, 1\rangle$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \binom{\alpha}{4}x^4 + \cdots \qquad \forall x \in (-1,1), \alpha \in \mathbb{R}$$

4.2 Program v jazyce Python 3: výpočet ln 2

```
# Výpočet ln 2 pomocí Taylorova polynomu
soucet = 0
for k in range(1, 1000):
    soucet = soucet + (-1)**(k-1) / k
print(soucet)
```

Výstup z programu: `0.6936474305598223`

4.3 Taylorovy rozvoje dalších funkcí

Rozviňte následující funkce do Taylorovy řady se středem v bodě $x_0 = 0$.

1. $y = \sinh x$ 2. $y = \cosh x$ 3. $y = \operatorname{arctg} x$

pouze po člen obsahující x^3: 4. $y = \arcsin x$ 5. $y = \operatorname{tg} x$

Rozvoj funkce arcsin odvoďte dvěma způsoby:

1. Newtonovou metodou inverze řady invertujte Taylorovu řadu funkce sinus.
2. Jelikož je $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, rozviňte funkci $(1-x^2)^{-1/2}$ a tuto řadu zintegrujte.

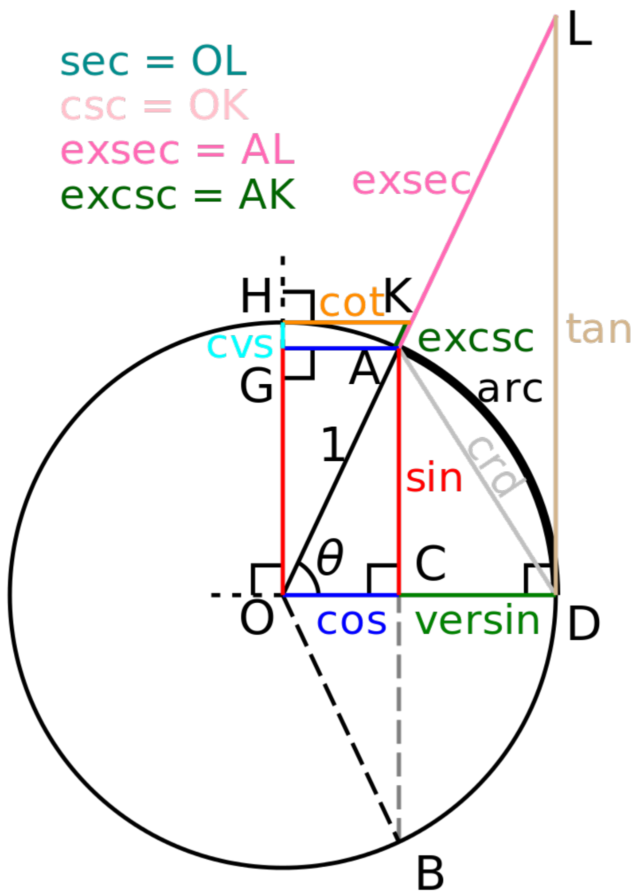
4.4 Výpočet π pomocí Taylorova rozvoje

Navrhněte výpočet aproximací π pomocí rozvoje $\operatorname{arctg} 1$ do mocninné řady.

1. Kolik členů bychom museli sečíst, abychom získali hodnotu s chybou menší než 10^{-3}?
2. Napište program (Python 3, Pascal, C, C#), který sečte příslušné množství členů.
3. Dokažte, že $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg} 1$. Využijte této identity k odvození rozvoje, pomocí něhož lze počítat aproximace čísla π efektivněji.
4. Pro zajímavost: $\operatorname{arctg} 1 = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$ $\qquad \operatorname{arctg} 1 = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$.
5. Napište program, který vypočte aproximaci π s chybou menší než 10^{-16} na základě uvedeného rozkladu $\operatorname{arctg} 1 = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$.

4.5 Domácí cvičení

1. Připravit se na **písemnou práci – vyšetření průběhu křivky** (zadaná parametricky nebo v polárních souřadnicích).
2. Z kapitoly 3.3 „Aplikace Taylorova polynomu“:
   - Rozviňte: vše.
   - Vypočtěte se zadanou přesností: vše.
   - Limity: 1–13.
3. Z kapitoly 4.1: je třeba znát všechny tyto rozvoje.
4. Z kapitoly 4.2: zkoušet si psát samostatně takovéto jednoduché prográmky.
5. Z kapitoly 4.3: 1–3.
6. Z kapitoly 4.4: vše.



5 Cvičení 21. 3. 2017 a 22. 3. 2017

Písemná práce:

vyšetření průběhu křivky (zadaná parametricky nebo v polárních souřadnicích).

Písemná práce: Taylorův polynom a jeho aplikace plánována na cvičení 11. 4. / 12. 4. 2017.

5.1 Domácí cvičení

1. Z kapitoly 3.3 „Aplikace Taylorova polynomu“ – limity: vše.
2. Z kapitoly 4.3: 4 a 5.
3. Na cvičení přineste své vypočtené příklady k tématu Taylorův polynom a jeho aplikace.
4. Ověřte, že funkce $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definovaná předpisem

$$e(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

vyhovuje podmínkám:

$$e(x+y) = e(x) \cdot e(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}\,,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e(x) - 1}{x} = 1\,.$$

6 Cvičení 28. 3. 2017 a 29. 3. 2017

Najděte Taylorův rozvoj funkce sinus tak, jak to provedl koncem 17. století Isaac Newton: inverzí rozvoje funkce arcsin získaného pomocí binomického rozvoje funkce $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (viz kap. 4.3).

Některé efektivní metovy výpočtu desetinného rozvoje čísla π.

- rozklad $\operatorname{arctg} 1$
- BBP formule (podle autorů: Bayley, Borwein, Plouffe) objevená v říjnu 1995:

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right) \cdot \frac{1}{16^n}$$

```
print("Výpočet pí pomocí BBP-formule.")
pi = 0
for n in range(0, 12):
    pi += ( 4/(8*n+1) - 2/(8*n+4) - 1/(8*n+5) - 1/(8*n+6) ) / 16**n
    print(n, "\t", pi)
```

Dokončení kapitoly Taylorův polynom.

Čtení pro zájemce:
Eulerovo *Introductio in analysin infinitorum* (1748), kapitola 8 o goniometrii (dostupný je také anglický překlad)
- na těchto stránkách je mnoho dalších překladů: `http://www.17centurymaths.com/`

Taylorův polynom – test: 11./12. dubna 2017.

6.1 Domácí cvičení

1. Zopakovat si tabulku primitivních funkcí k elementárním funkcím (Tomiczek, str. 80).
2. Ze souboru primit_fce.pdf počítat: vše ze str. 1, tj. příklady 1, 2, 3, 4.

7 Cvičení 4. 4. 2017 a 5. 4. 2017

Hledání primitivních funkcí: per-partes a jednoduché substituce.

7.1 Domácí cvičení

1. Ze souboru primit_fce.pdf počítat si příklady 5, 6, 7, 8a–g.
2. Opakovat si na test: **Taylorův polynom** 11./12. dubna.

8 Cvičení 11. 4. 2017 a 12. 4. 2017

Písemná práce: Taylorův polynom a jeho aplikace.

Hledání primitivních funkcí: per-partes a jednoduché substituce.

Opravný termín písemné práce *Taylorův polynom*: **úterý 2. května v 13:00.**

8.1 Domácí cvičení

1. Ze souboru primit_fce.pdf si počítat příklady 8h–s, dále na str. 4–5 příklady g–l, s, v, x.

9 Cvičení 18. 4. 2017 a 19. 4. 2017

Integrace racionálních funkcí.

9.1 Domácí cvičení

1. Ze souboru primit_fce.pdf si počítat příklady na str. 4–5: a–f, m–r, t, u, w.
   Návody je třeba si rozmýšlet samostatně – každý z nich by měl být zřejmý na základě probrané teorie.
2. Najděte primitivní funkci k funkci $\frac{1}{1+x^4}$, tj. najděte neurčitý integrál
   $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}\,.$$
   Kořeny polynomu ve jmenovateli najděte standardním postupem řešení binomické rovnice $x^4 = -1$. Využívejte přitom goniometrického tvaru komplexních čísel.
3. Problém: víme, že
   $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\,.$$
   Je však zřejmé, že $x^2 + 1 = (x + \mathrm{i}) \cdot (x - \mathrm{i})$. Kdybychom tedy tuto racionální funkci rozložili na parciální zlomky, které bychom pak integrovali, co bychom dostali? Byla by to opět funkce arctg ?
   $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\mathrm{i})\cdot(x-\mathrm{i})} = \,?$$

10 Cvičení 25. 4. 2017 a 26. 4. 2017

1. Eulerovy substituce a hyperbolické substituce
2. goniometrické substituce

$$\sin(\sin x) = ?$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \sigma(z^5)$$

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + \frac{\sin^5 x}{5!} + \sigma(x^5) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \sigma(x^5) - \frac{1}{3!}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \sigma(x^4)\right]^3 + \frac{1}{5!}\left(x^5 + \sigma(x^5)\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{1}{6}\left[x^3 - 3x^2\cdot\frac{x^3}{3!} + \underbrace{3x\,\frac{x^6}{3!^2} - \left(\frac{x^3}{3!}\right)^3}_{\substack{\text{není třeba}\\ \sigma(x^5)}}\right] + \frac{1}{5!}x^5 + \sigma(x^5)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{x^5}{2\cdot 3!} + \frac{1}{5!}x^5 + \sigma(x^5) =$$

$$= x - x^3\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + x^5\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{120} + \frac{1}{12} + \frac{1}{120}}\right) + \sigma(x^5) =$$

$$\frac{2}{120} + \frac{1}{12} = \frac{2+10}{120} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + x^5\cdot\frac{1}{10} + \sigma(x^5)$$

Opravný termín písemné práce *Taylorův polynom*: **úterý 2. května v 10:30 v učebně M6**. Pro ty, kteří v 10:30 nemohou, platí termín: **13:00 u mne v pracovně** (Křižíkova, 4. patro).

10.1 Domácí cvičení

V souboru sbirka.pdf si na str. 4–6 počítat příklady:
10 c, d, e, f, g;   11 a, b, c, d, g;   12 i, k, l;   13 i, j, k, l.

11 Cvičení 2. 5. 2017 a 3. 5. 2017

1. Opakování: hledání primitivních funkcí
2. Obsahy rovinných útvarů a další aplikace Riemannova integrálu

Místo večerníčku: základní myšlenky diferenciálního a integrálního počtu

11.1 Numerická integrace

11.1.1 Výpočet $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$ obdélníkovou metodou

Výpočet obsahu plochy pod obloukem sinusovky: $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$.

```
print("Integrál sinu od a do b obdélníkovou metodou.")

import math
a = 0
b = math.pi
N = 10**6    # interval <a, b> dělíme na N dílů
```

```
delta = (b - a) / N
integ = 0

# sčítáme obsahy obdélníků
# základna = delta,   výška = funkční hodnota ve středu dělicího intervalu
for k in range(0, N):
    integ  +=   delta * math.sin(delta/2 + k*delta)

print("integrál od", a, "do", b, "je přibližně roven: ", integ)
```

Výstup z programu:

```
Integrál sinu od a do b obdélníkovou metodou.
integrál od 0 do 3.141592653589793 je přibližně roven: 2.0000000000008424
```

11.1.2 Výpočet $\int_a^b f$ obdélníkovou metodou

Výpočet obsahu jednotkového kruhu: $\pi = 4 \cdot \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. Následující program je snadno modifikovatelný, stačí předefinovat funkci f a při volání funkce integral zvolit požadované meze integrace. Počet elementů dělení N je nepovinný parametr.

```
# Numerická integrace: výpočet ∫_a^b f obdélníkovou metodou

def f(x):
    return (1 - x*x)**(1/2)

def integral(f, a, b, N=10**6):
    delta = (b - a) / N
    integ = 0
    for k in range(N):
        integ += delta * f(delta/2 + k*delta)
    return integ

print( "obsah kruhu o poloměru 1:",   4 * integral(f, 0, 1) )
```

Výstup z programu:

```
obsah kruhu o poloměru 1:  3.1415926539343633
```

11.2 Domácí cvičení

V souboru sbirka.pdf si na str. 6 počítat příklady: 13 m–z.

Ověřte integrací:

$$\int \frac{3x-1}{(x^2-2x+2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\mathrm{arctg}\,(x-1) + \frac{1}{4}\cdot\frac{3\,x^3-9\,x^2+14\,x-11}{(x^2-2x+2)^2}\,.$$

Riemannův integrál jsme na cvičení počítali pomocí Riemannových součtů (ručně nebo pomocí počítače). Často je pohodlnou cestou je využít souvislosti s primitivními funkcemi:

$$(\mathcal{R})\int_a^b f = F(b) - F(a)\,.$$

1. Odvoďte vzorec pro obsah kruhu ($y = \sqrt{r^2-x^2}$).

2. Odvoďte vzorec pro obsah elipsy.

3. Odvoďte vzorec pro objem koule (rotuje $y = \sqrt{r^2 - x^2}$).

4. Odvoďte vzorec pro objem kuželu.

5. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného osou x a jedním obloukem cykloidy ($x(t) = r \cdot (t - \sin t), \quad y(t) = r \cdot (1 - \cos t)$). [$3\pi r^2$]

6. Vypočtěte délku asteroidy ($x(t) = r \cdot \cos^3 t, \quad y(t) = r \cdot \sin^3 t$). [$6r$]

7. Archimédés dokázal, že objem úseče rotačního paraboloidu je polovinou objemu jemu opsaného válce (má s úsečí společnou podstavu i osu). Podaří se Vám tento výsledek odvodit pomocí Riemannova integrálu?

12 Cvičení 9. 5. 2017 a 10. 5. 2017

- Pokuste se dokázat rovnost
$$\operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
přímo z definice funkce $\sinh x$, tj. ne vypočtením integrálu $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$ dvěma způsoby (jedna z Eulerových substitucí; hyperbolická substituce – 2. věta o substituci).

- Na základě analýzy horních a dolních (Darbouxových) integrálních součtů rozhodněte, zda existuje Riemannův integrál $(\mathcal{R})\displaystyle\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}}$. Funkce $\chi_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{pro } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ je tzv. *charakteristická funkce množiny* $\mathbb{Q}$.

- **Obsah kruhu:** definice π, ZŠ (krájení koláče), SŠ (obsahy opsaných a vepsaných mnohoúhelníků), VŠ (pomocí integrálu).

12.1 Cavalieriho princip

- Cavalieriho princip (varianta pro útvary v rovině):
Jsou dány dva útvary v rovině. Existuje-li v této rovině přímka p taková, že si jsou vždy délky řezu[1] jedním a druhým útvarem rovny pro každou přímku rovnoběžnou s p, mají útvary stejný obsah.

- Cavalieriho princip (varianta pro útvary v prostoru):
Jsou dány dva útvary v prostoru. Existuje-li v tomto prostoru rovina ϱ taková, že si jsou vždy obsahy řezu[2] jedním a druhým útvarem rovny pro každou rovinu rovnoběžnou s ϱ, mají útvary stejný objem.

- Zobecnění Cavalieriho principu (varianta pro útvary v rovině):
Jsou dány dva útvary v rovině. Existuje-li v této rovině přímka p taková, že pro každou přímku p' rovnoběžnou s p nastává právě jedna z následujících možností:
- je-li průnik p' s jedním útvarem prázdný, je také prázdný průnik p' s druhým útvarem,
- je-li průnik p' s jedním útvarem neprázdný, je také neprázdný průnik p' s druhým útvarem a poměr délky řezu jedním útvarem a délky řezu druhým útvarem je v takovém případě vždy roven jediné generální konstantě $k > 0$.
Potom mají tyto dva útvary stejný obsah.

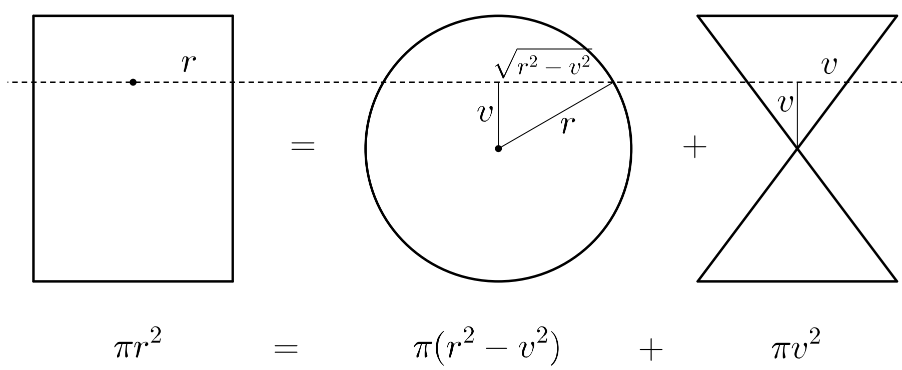
[1] Je-li řezem prázdná množina, považujeme jeho délku za nulovou.
[2] Je-li řezem prázdná množina, považujeme jeho obsah za nulový.

- Formulace Cavalieriho principu pro útvary v rovině upravená tak, aby ji bylo možno snadno dokázat pomocí Riemannova integrálu:
  Jsou dány dva útvary v rovině:
  $$U_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}; a \le x \le b, f_1(x) \le y \le f_2(x)\},$$
  $$U_2 = \{[x,y] \in \mathbb{R}; a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\},$$
  kde $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{C}(\langle a,b\rangle)$. Jsou-li si délky vertikálních řezů rovny pro každé $x \in \langle a,b\rangle$, tj.
  $$f_2(x) - f_1(x) = g_2(x) - g_1(x) \qquad \forall x \in \langle a,b\rangle,$$
  mají tyto útvary stejný obsah, tj. $S(U_1) = S(U_2)$.
  Důkaz: $S(U_1) = \int_a^b f_2 - \int_a^b f_1$ a $S(U_2) = \int_a^b g_2 - \int_a^b g_1$. Díky linearitě Riemannova integrálu $\left(\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(u(x) - v(x)\big)\,\mathrm{d}x\right)$ a rovnosti délek řezů, tzn. $f_2(x) - f_1(x) = g_2(x) - g_1(x)$ pro každé $x \in \langle a,b\rangle$, lze psát:
  $$S(U_1) = \int_a^b f_2 - \int_a^b f_1 = \int_a^b (f_2 - f_1) = \int_a^b (g_2 - g_1) = \int_a^b g_2 - \int_a^b g_1 = S(U_2).$$

- Obsah elipsy pomocí Cavalieriho principu (s využitím analytické geometrie).

- Objem jehlanu (zmínka o 3. Hilbertově problému). Objem kuželu – odvození pomocí Cavalieriho principu: porovnání s pravidelným čtyřbokým jehlanem, jehož podstavu tvoří čtverec o straně délky $\sqrt{\pi}r$.

- Objem koule pomocí Cavalieriho principu:
  válec o poloměru podstavy r a výšce $2r$ = koule o poloměru r + dva kužely o poloměru podstavy r a výšce r. Obsahy řezů ve vzdálenosti v od hladiny ve výšce r:
  $$\pi r^2 = \pi(r^2 - v^2) + \pi v^2.$$



Obsahy řezů jsou si rovny, tudíž dle Cavalieriho principu jsou si rovny i objemy těles:
$$V_{\text{válec}} = V_{\text{koule}} + 2\,V_{\text{kužel}},$$
$$\pi r^2 \cdot 2r = V_{\text{koule}} + 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r,$$
$$V_{\text{koule}} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

12.2 Aplikace Riemannova integrálu

- Obsah plochy pod grafem nezáporné funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ (tj. plochy ohraničené zdola osou x, shora grafem funkce f, zleva přímkou $x = a$ a zprava přímkou $x = b$) je:

$$S(f; a, b) = \int_a^b f\,.$$

Odvoďte vztah pro obsah plochy $S(f; a, b)$, je-li spojitá nezáporná funkce $y = f(x)$ zadána parametricky: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, kde funkce $x(t)$ a $y(t)$ jsou spojité na $\langle a, b\rangle$, $x(t)$ ryze monotónní, $x'(t)$ spojitá, $y(t)$ nezáporná, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$:

$$S(f; a, b) = \int_\alpha^\beta y(t)\, \left|x'(t)\right| \mathrm{d}t\,.$$

Odvoďte vztah pro obsah plochy ohraničené křivkou zadanou v polárních souřadnicích $r = r(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha, \beta\rangle$ a přímkami procházejícími počátkem, které s polární poloosou svírají úhel α a β:

$$S(\varrho; a, b) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varrho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

- Vypočtěte obsah oblasti ohraničené kardioidou ($\varrho = 2r \cdot (1 - \cos\varphi)$). [$6\pi r^2$]
- Vypočtěte délku kardioidy. [$16r$]
- Vypočtěte délku jednoho oblouku cykloidy. [$8r$]
- Odvoďte vzorec pro povrch koule.
- Odvoďte vzorec pro objem kulové úseče.
- Odvoďte vzorec pro obsah kulového vrchlíku.
- Odvoďte vzorec pro obsah pláště kuželu.
- Sestavte Riemannův integrál, pomocí něhož by bylo možno vypočítat délku elipsy. Leží primitivní funkce k integrandu v oboru elementárních funkcí?
- Vypočtěte souřadnice těžiště následujících útvarů:
  1. trojúhelník ABC, kde bez újmy na obecnosti: $A = [0, 0]$, $B = [b, 0]$, $C = [c_1, c_2]$,
  2. půlkruh,
  3. útvar ohraničený jedním obloukem cykloidy a osou x,
  4. útvar ohraničený jedním obloukem asteroidy a oběma souřadnicovými osami.

13 Cvičení 16. 5. 2017 a 17. 5. 2017

- 17. 5. rektorský den, **středeční cvičení odpadá (a přednáška bohužel také)**
- úterní cvičení se normálně koná (nudit se rozhodně nebudeme…)
- Poměrně obsáhlý přehled vzorců – aplikace Riemannova integrálu: pdf

13.1 Domácí cvičení (pro obě skupiny)

Propočítat si všechny příklady z kapitol 11 a 12.

14 Cvičení 23. 5. 2017 a 24. 5. 2017

14.1 Nevlastní Riemannův integrál (zobecněný Riemannův integrál)

Základním předpokladem konstrukce Riemannova integrálu $\int_a^b f$ je omezenost f na uzavřeném (tj. omezeném) intervalu $\langle a, b\rangle$. Není-li některý z těchto dvou předpokladů splněn, je za jistých předpokladů možno definici Riemannova integrálu rozšířit.

- **Integrál nevlastní vlivem meze**
  Je-li $f : \langle a, +\infty) \to \mathbb{R}$ riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $\langle a, \beta\rangle$ pro každé $\beta \in (a, +\infty)$ a existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, pak tuto limitu nazveme *nevlastním (Riemannovým) integrálem* funkce f na intervalu $\langle a, +\infty)$ a zapisujeme ji $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

  $$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\,.}$$

- **Integrál nevlastní vlivem funkce**
  Nechť pro funkci $f : \langle a, b) \to \mathbb{R}$ platí:
  - není na žádném levém prstencovém okolí bodu b omezená,
  - je riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $\langle a, \beta\rangle$ pro každé $\beta \in (a, b)$,
  - existuje vlastní limita $\lim\limits_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

  Potom tuto limitu nazveme *nevlastním (Riemannovým) integrálem* funkce f na intervalu $\langle a, b)$ a zapisujeme ji $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

  $$\boxed{\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\,.}$$

Vypočtěte následující nevlastní integrály.

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ existují a pro která konvergují následující nevlastní integrály?

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$

Zápočtové písemné práce

Je třeba splnit 3 dílčí písemné práce (křivky, Taylor, integrály). Každou z těchto písemných prací je možno splnit zvlášť.

V zápočtovém týdnu je vypsán speciální termín, v němž je možno si splnit kteroukoli ze tří částí. Další možností je psát kteroukoli z těchto částí v rámci zkouškového termínu.

Vzhledem k tomu, že látka je z velké části zaměřena na počítání, mohou být součástí zkoušky konkrétní příklady, na nichž je teorie demonstrována. Neúspěšně řešené příklady z kterékoli ze tří dílčích zápočtových prací bude třeba u zkoušky doplnit.