MATEMATICKÁ ANALÝZA NEJEN PRO FYZIKY (I)

JIŘÍ KOPÁČEK

matfyzpress

PRAHA 2004

ISBN 80-86732-25-8
ISBN 80-85863-20-0 (1. vydání)
ISBN 80-85863-74-X (2. vydání)
ISBN 80-85863-89-8 (3. vydání)

Předmluva

Tato skripta obsahují látku, přednášenou posluchačům oboru fyzika MFF UK v prvním semestru v přednášce Matematická analýza I. Vycházejí z několik let používaných skript [K1]. Proti nim jsou poněkud stručnější a možná v něčem i vylepšená. Odpovídají současné časové dotaci této přednášky: 4 hodiny týdně.

Pod názvem Matematická analýza pro fyziky I. vyšla třikrát v nakladatelství Matfyzpress. Protože se ukázalo, že se hodí nejen pro budoucí fyziky, přidali jsme do názvu slovíčko „nejen". Jinak se od předchozích vydání liší jen opravou zjištěných chyb.

V úvodní kapitole jsou stručně vyloženy logické principy, používané v matematice, základní fakta o množinách, zobrazeních a číslech. Další kapitoly obsahují výklad diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné reálné proměnné.

Do textu jsou zařazovány příklady a cvičení. Příklady jsou z technického hlediska jednoduché, aby byla jasná hlavní myšlenka. Co se týká početní praxe, odkazuji například na sbírky [P1] a [D], uvedené v seznamu literatury.

Číslování vět, definic apod. je průběžné v každé kapitole a obsahuje i číslo kapitoly, například věta 5.2. značí druhou větu páté kapitoly.

Děkuji všem (a nebylo jich málo), kteří se nějak podíleli na tom, že tato skripta mohla vyjít. Byli to zejména (podle abecedy) kolegové: A. Karger, J. Kolář, J. Kottas, M. Kubeček, J. Malý, M. Rokyta a Z. Vlášek.

Čtenáře prosím, aby mě upozornili na zjištěné chyby, kterých se lze i při opakovaném čtení jen velmi obtížně vyvarovat.

Jiří Kopáček

V Praze v lednu 2004.

Obsah

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Některá označení

$\mathbb{N}$ – množina přirozených čísel

$\mathbb{Z}$ – množina celých čísel

$\mathbb{R}$ – množina reálných čísel

$\mathbb{C}$ – množina komplexních čísel

$\mathbb{R}_n$ – množina n-tic reálných čísel

ÚVOD

A) Již dávno minuly doby, kdy každý velký matematik byl též velkým fyzikem a naopak. Velký rozvoj obou věd to nyní vylučuje. Je třeba, aby fyzik znal natolik matematiku a matematik natolik fyziku, aby se mohli domluvit a efektivně spolupracovat. Letmý pohled na vývoj těchto věd ukazuje, jak se tyto vědy navzájem ovlivňovaly, a přitom různým způsobem. Diferenciální a integrální počet vznikl ze snahy „zachytit" pohyb, rozvoj teorie diferenciálních rovnic vedl k systematizaci poznatků fyzikálních. Fyzikové pro své potřeby zavedli distribuce (zobecněné funkce), i když z matematického hlediska bez potřebného odůvodnění. Když matematikové vypracovali příslušnou teorii, měla z toho zase prospěch fyzika. Když vznikla teorie grup, mnozí pochybovali o její užitečnosti. Dnes o její užitečnosti pro fyziku není pochyb.

Moderní výklad fyziky si dnes bez matematického aparátu nelze představit. V některých fyzikálních specializacích se vystačí s menšími znalostmi matematiky, v jiných (například v teoretické fyzice) je potřeba matematických znalostí taková, že v čase, který je ve studijních programech pro fyziky vymezen matematice, je všechny nelze vyložit a budoucí fyzik musí být schopen si potřebné partie nastudovat sám.

Základní přednáška z matematiky pro fyziky musí tedy být dostatečně obsažná, na druhé straně toto množství faktů musí být podáno jako souvislá teorie, na níž se student fyziky naučí matematickému myšlení, což mu usnadní další studium.

Přednostmi matematiky jsou její logická přesnost a schopnost zachytit v jistém smyslu jednotným způsobem různé jevy. Z předpokladů matematik odvodí různá tvrzení, jejichž pravdivost je zaručena, je-li zaručena pravdivost výchozích předpokladů (tyto předpoklady při aplikacích musíme ověřovat jinými metodami, než matematickými). Společné zákoni-

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TeX

tosti, které matematik najde u různých jevů umožňují přenášet poznatky z jedné oblasti do druhé. Přesný způsob uvažování, který si při studiu matematiky osvojíme je užitečný i při studiu fyziky samotné.

Je bohužel pravda, že současný stav matematiky neumožňuje dát uspokojivou odpověď na všechny otázky, které vznikají v různých aplikacích (například fyzikálních). Ve stejné situaci je však jistě i inženýr ve vztahu k poznatkům fyzikálním. Tato situace je proto pobídkou jak matematikům tak fyzikům k další intenzivní účelné práci.

B) Nakonec několik rad pro čtenáře. Nemá smysl se učit definice, věty a jejich důkazy nazpaměť. Je třeba si na příkladech ujasnit jejich smysl a pochopit, co je na nich společné a co rozdílné. Často si stačí správně uvědomit definici, abychom odvodili tvrzení, které z ní plyne. Často si stačí uvědomit vhodný příklad (vhodné příklady), abychom pochopili rozumnost předpokladů a tvrzení dané věty. Studium důkazů matematických vět také není samoúčelné. Umožňuje pochopit podstatu věty, význam předpokladů, učí logickému myšlení a seznamuje nás s obraty, které můžeme použít v podobných situacích při samostatném studiu.

Důležité je též umět si vytvořit správnou názornou představu. Pomocí názoru sice nic nedokážeme, ale může nám pomoci při provedení korektního formálního důkazu.

Při výpočtu příkladů je třeba se snažit každý krok odůvodnit teorií. Na druhé straně znalost teorie nemůže beze zbytku nahradit „početní praxi", která z mnoha možných postupů umožní rychleji najít ten nejefektivnější.

KAPITOLA 1

ZÁKLADNÍ LOGICKÉ SYMBOLY, MNOŽINY, ZOBRAZENÍ, ČÍSLA

1.1. Logická symbolika Logická struktura matematických důkazů

V tomto oddílu jsou stručně shrnuty základní pojmy a postupy matematické logiky a základní logická symbolika, jako například *výroky* A, B, *implikace* $A \Rightarrow B$ (A implikuje B, z A plyne B), *ekvivalence* $A \Leftrightarrow B$ (A je ekvivalentní B), *negace* non A (A neplatí) a další, která budeme v dalším textu používat. Je možná lepší si toto shrnutí přečíst až po prostudování celé knihy, neboť pak je čtenář lépe pochopí a ocení.

Základem každé vědy (tedy i matematiky a fyziky) je soubor jistých znalostí. To, co z těchto izolovaných poznatků dělá skutečnou vědu je, že tyto poznatky logicky uspořádáme, vytvoříme z nich systém. A k tomu slouží logika. Pomocí logického myšlení, logickým odvozováním získáváme z daných faktů nová fakta nebo hypotézy (poslední opět konfrontujeme s experimentem, neboť by se mohlo stát, že výchozí poznatky nezobrazují skutečnost správně).

Pravidla logického odvozování se musí řídit jistými zákony: nesmí se například stát, abychom dospěli k logickému sporu, pokud tento již není v předpokladech. Je-li něco logicky sporné, pak to nemůže být pravdivé. Není-li to v logickém sporu, nemusí to ještě být pravda. Je třeba se opět obrátit ke skutečnosti, zda byla zobrazena správně. Logika tedy umožňuje vyloučit některé určitě nesprávné hypotézy.

Je možné bez přeceňování tvrdit, že matematika díky své přesnosti je kromě jiného velmi užitečným materiálem, na němž je možné si vypěstovat dobré logické myšlení.

Základními pojmy, s nimiž logika pracuje, jsou: *výroky, predikáty, logické spojky, kvantifikátory* a *základní zákony.*

Výrok je věta, o níž má smysl říci, že je pravdivá. Například : „Číslo 2 je menší než 3" je pravdivý výrok. „Číslo 5 je záporné" je nepravdivý výrok.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Predikát neboli **výroková funkce** je předpis $\mathcal{P}$ (zobrazení – viz oddíl 3.), který každému prvku x z daného pole objektů (množiny) přiřazuje výrok, tj. pro každé x z daného pole je $\mathcal{P}(x)$ výrok. Je-li například pole objektů množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$, pak výrokovou funkcí je například následující: je-li x z $\mathbb{Q}$, pak je $\mathcal{P}(x)$ věta: „x je menší než 3". $\mathcal{P}(x)$ je pravdivý výrok pro racionální čísla menší než 3 a nepravdivý pro racionální čísla větší nebo rovná 3.

Logické spojky a **kvantifikátory** slouží k vytváření nových, složitějších výroků z daných výroků a predikátů. Jejich význam je dán, řekneme-li, kdy pomocí nich vytvořený výrok je pravdivý.

Základními logickými spojkami jsou následující (A, B jsou dané výroky):

1) $\vee$ (vel = nebo) – **disjunkce**:
Výrok $A \vee B$ je pravdivý právě když je pravdivý aspoň jeden z výroků A, B (mohou být pravdivé i oba). Je nepravdivý právě když jsou nepravdivé oba výroky A, B.

2) $\wedge$ (et = i) – **konjunkce**:
Výrok $A \wedge B$ je pravdivý právě když jsou pravdivé oba výroky A, B. Je nepravdivý právě když alespoň jeden z výroků A, B je nepravdivý.

3) non (= ne) – **negace**:
Výrok non A znamená, že není pravda, že platí A. non A je tedy pravdivý právě když A je nepravdivý.

4) $\Rightarrow$ – **implikace**:
Výrok $A \Rightarrow B$ je pravdivý právě když nastává jedna z následujících možností

a) A je pravdivý, B je pravdivý
b) A je nepravdivý, B je pravdivý
c) A je nepravdivý, B je nepravdivý

a není pravdivý v případě, že je A pravdivý a B nepravdivý. Implikace se čte některým z následujících způsobů: platí-li A, pak platí B, z A plyne B, A implikuje B, A je postačující podmínkou pro B, B je nutnou podmínkou pro A.

5) $\Leftrightarrow$ – **ekvivalence**:
Výrok $A \Leftrightarrow B$ je pravdivý právě když jsou pravdivé oba výroky $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$. Ekvivalence se čte některým z následujících způsobů: A je ekvivalentní B, A platí právě když platí B, A je nutnou a postačující podmínkou pro B, B je nutnou a postačující podmínkou pro A.

Základní kvantifikátory jsou tyto (M je pole objektů, $\mathcal{P}(x)$ je predikát):

1) $\exists$ – **existenční kvantifikátor**:
Výrok $\underset{x\in M}{\exists} \mathcal{P}(x)$ (čteme existuje $x \in M$, že platí $\mathcal{P}(x)$) je pravdivý výrok právě když existuje nějaké $x_0 \in M$, že výrok $\mathcal{P}(x_0)$ je pravdivý.

2) $\forall$ – **obecný kvantifikátor**:
Výrok $\underset{x\in M}{\forall} \mathcal{P}(x)$ (čteme pro každé $x \in M$ platí $\mathcal{P}(x)$) je pravdivý výrok právě když pro každý objekt $y \in M$ je výrok $\mathcal{P}(y)$ pravdivý.

Základní zákony jmenujme dva:

1) **Zákon sporu**:
Pro žádný výrok A není pravda současně A i non A (tj. $A \wedge$ non A je nepravdivý pro každý výrok A.

2) **Zákon vyloučeného třetího**:
Pro každý výrok A je buď A pravdivé nebo non A pravdivé (tj. $A \vee \text{non}\, A$ je pravdivý výrok pro každý výrok A).

Z těchto zákonů plyne, že pro každý výrok A nastane právě jedna z možností:

$$\begin{aligned}&\text{a)}\ \ A \text{ je pravdivé, non}\, A \text{ je nepravdivé}\\&\text{b)}\ \ A \text{ je nepravdivé, non}\, A \text{ je pravdivé}\end{aligned}$$

Tj. právě jeden z výroků A a non A je pravdivý.

Vlastnosti implikace a ekvivalence.

Platí

1) $A \Rightarrow A$ (reflexivnost implikace).
2) Platí-li $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow C$, pak platí také $A \Rightarrow C$ (tranzitivnost implikace). Můžeme proto psát $A \Rightarrow B \Rightarrow C$.
3) $A \Leftrightarrow A$ (reflexivnost ekvivalence).
4) Platí-li $A \Leftrightarrow B$, pak platí $B \Leftrightarrow A$ (symetričnost ekvivalence).
5) Platí-li $A \Leftrightarrow B$, $B \Leftrightarrow C$, pak platí také $A \Leftrightarrow C$ (tranzitivnost ekvivalence).

Poznamenejme, že implikace není symetrická, tj. může platit $A \Rightarrow B$ a přitom neplatit $B \Rightarrow A$.

Některé důležité ekvivalence.

$$\begin{aligned}
&1)\ \ \text{non}(\text{non}\, A) \Leftrightarrow A\\
&2)\ (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{non}\, B) \Rightarrow (\text{non}\, A))\\
&3)\ (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{non}\, B) \Leftrightarrow (\text{non}\, A))\\
&4)\ (A \vee B) \Leftrightarrow \text{non}((\text{non}\, A) \wedge (\text{non}\, B))\\
&5)\ \ \text{non}(A \vee B) \Leftrightarrow ((\text{non}\, A) \wedge (\text{non}\, B))\\
&6)\ (A \wedge B) \Leftrightarrow \text{non}((\text{non}\, A) \vee (\text{non}\, B))\\
&7)\ \ \text{non}(A \wedge B) \Leftrightarrow ((\text{non}\, A) \vee (\text{non}\, B))\\
&8)\ (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\text{non}\, A) \vee B)\\
&9)\ \ \text{non}(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge (\text{non}\, B))\\
&10)\ (A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)\\
&11)\ (A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)\\
&12)\ \ \text{non}(\underset{x \in M}{\exists}\ \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow \underset{x \in M}{\forall}\ \text{non}\ \mathcal{P}(x)\\
&13)\ \ \text{non}(\underset{x \in M}{\forall}\ \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow \underset{x \in M}{\exists}\ \text{non}\, \mathcal{P}(x)
\end{aligned}$$

Způsoby důkazů.

1) Přímý důkaz.
2) Důkaz rozborem možností.
3) Nepřímý důkaz.
4) Důkaz sporem.

Nepřímý důkaz je založen na ekvivalenci 2.: místo $A \Rightarrow B$ se dokazuje $\operatorname{non} B \Rightarrow \operatorname{non} A$. Při důkazu sporem postupujeme takto: chceme-li dokázat $A \Rightarrow B$, předpokládáme, že platí $A \wedge \operatorname{non} B$ a z toho odvodíme spor. $A \wedge nonB$ tedy neplatí. Platí-li však A, nemůže platit $\operatorname{non} B$, a tedy musí platit B.

1.2. Množiny

Z množinové symboliky nám pro začátek postačí následující:

1) $x \in M$ – x je prvkem množiny M,
2) $x \notin M$ – x není prvkem množiny M,
3) $P \subset M$ – P je podmnožinou (částí) množiny M, což podrobněji znamená, že každý prvek z P je také prvkem M. Rovnost dvou množin $M = P$ značí, že platí zároveň jak $M \subset P$ tak $P \subset M$.
4) $M \cup P$ – sjednocení množin M a P – což značí, že je to množina všech těch x, které jsou alespoň v jedné z množin M, P.
5) $M \cap P$ – průnik množin M a P – což značí množinu všech těch x, které jsou jak v M tak zároveň v P.
6) $\emptyset$ značí tzv. *prázdnou* množinu, což je množina, která nemá žádný prvek.

Pro ty čtenáře, kteří si chtějí hned trochu rozšířit své znalosti o množinách a také pro ty, kteří při použití nějakého pojmu v dalším textu jej zde mohou najít, jsou určeny následující řádky psané petitem.

Množina je soubor věcí (objektů), které nazýváme jejími prvky. Důležité je, že každý objekt buď patří do dané množiny M nebo do ní nepatří, tj. nastává právě jedna z možností:

a) x je prvkem množiny M – x patří do M – $x \in M$,
b) x není prvkem množiny M – x nepatří do M – $x \notin M$.

Dlouho převládalo mínění, že intuitivní chápání množiny je postačující a rozumné. Ukázalo se však, že může vést k logickým sporům (ke sporu vede například pojem *množiny všech množin*). Proto vznikly různé axiomatické teorie množin, jimiž se zde ovšem zabývat nebudeme.

Způsoby zadání množiny. Množinu je možné zadat různými způsoby. Uveďme některé z nich:

a) Vyjmenováním všech prvků, které do ní patří:

$M_1 = \{1, 7, 8, 20, 400\}$ je množina, která obsahuje právě čísla 1,7,8,20,400.
$M_2 = \{$*Praha, Bratislava, Varšava, Riga, Vilnius, Minsk, Kyjev, Moskva, Lublaň, Záhřeb, Bělehrad, Sofia*$\}$ je množina, která obsahuje právě vyjmenovaná města.
(Tento způsob je možný jen u tzv. konečných množin – viz dále.)

b) Pomocí jiné již známé množiny:

Známe-li množinu celých čísel $\mathbb{Z}$, můžeme definovat celé mocniny čísla 2, a tedy také množinu M_3 všech celých mocnin čísla 2, tj. $M_3 = \{2^x;\ x \in \mathbb{Z}\}$.

c) Zadáním nějaké vlastnosti prvků:

M_4 je množina všech občanů ČR narozených v roce 1970.
Množinu M_2 můžeme zadat jako množinu hlavních měst slovanských států.
Budeme psát $M = \{x;\ x \text{ má vlastnost } V\ \}$, jestliže množina M obsahuje právě všechna taková x, která mají vlastnost V.

Podmnožiny. Rovnost množin.

Definice 1.1. Řekneme, že množina P je podmnožinou (částí) množiny M, jestliže každý prvek množiny P je také prvkem množiny M. Píšeme pak $P \subset M$.

Pklad 1.1. Je-li $\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel, $\mathbb{Z}$ množina všech celých čísel, pak je $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Je-li $\mathbb{R}^+$ množina všech kladných reálných čísel, pak neplatí ani $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^+$, ani $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{Z}$.

Definice 1.2. Řekneme, že množiny M a P se rovnají ($M = P$), jestliže platí $M \subset P$ a současně i $P \subset M$.

Poznmka 1.1. Tak se také často rovnost dvou množin dokazuje, viz příklad 1.3. dále.

Pklad 1.2. Nechť $M_1 = \{x;\ x \in \mathbb{Z},\ 0 \leq x < 5\}$, $M_2 = \{x;\ x \in \mathbb{Z},\ x \geq 0,\ x^2 < 25\}$. Potom je zřejmě $M_1 = M_2$, neboť obě obsahují právě čísla $0, 1, 2, 3, 4$.

Pklad 1.3. Nechť $\widetilde{M_1} = \{x;\ x \in \mathbb{R},\ 0 \leq x < 5\}$, $\widetilde{M_2} = \{x;\ x \in \mathbb{R}\ x \geq 0,\ x^2 < 25\}$. Potom je $\widetilde{M_1} = \widetilde{M_2}$. Při důkazu nemůžeme postupovat jako v předchozím příkladu. Postupujme přesně podle definice 1.2. Nechť $x \in \widetilde{M_1}$, tj. $x \in \mathbb{R}$ a $0 \leq x$ a $x < 5$. Podle pravidel o násobení nerovností je také $x^2 < 25$, a tedy $x \in \widetilde{M_2}$. Je-li naopak $x \in \widetilde{M_2}$, pak podle pravidla o odmocňování nerovností je $x < 5$, a tedy $x \in \widetilde{M_1}$.

Cvien 1.1. Dokažte, že platí $M_1 = M_2$, je-li $M_1 = \{x:\ x \in \mathbb{R},\ x^2 - x - 2 < 0\}$, $M_2 = \{x:\ x \in \mathbb{R},\ x^2 < 4,\ x > -1\}$.

Poznmka 1.2. Pro každou množinu M je zřejmě $M \subset M$.

Definice 1.1a. Je-li $P \subset M$, $P \neq M$, pak říkáme, že P je *vlastní* podmnožinou množiny M.

Definice 1.3. Množinu všech podmnožin množiny M označujeme $\exp M$ nebo také 2^M. Množinu, která neobsahuje žádný prvek nazýváme *prázdnou* a označujeme ji $\emptyset$.

Poznmka 1.3. Prázdná množina je zřejmě podmnožinou každé množiny. Užitečnost zavedení tohoto na první pohled protismyslného pojmu uvidíme při zavedení operací s množinami, a také v následujícím příkladu. Z logicko-filozofického je to množina, které odpovídá číslo nula, o jehož užitečnosti jistě nikdo nepochybuje.

PKLAD 1.4. Nechť množina M má n prvků, kde n je přirozené číslo. Potom $\exp M$ má 2^n prvků (počítáme i prázdnou množinu). Je totiž pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ počet podmnožin množiny M, které mají k prvků roven $\binom{n}{k}$. Přidáme-li i prázdnou množinu, dostaneme, že počet prvků $\exp M$ je roven$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$.

Operace s množinami.

DEFINICE 1.4. *Sjednocením* $M_1 \cup M_2$ množin M_1 a M_2 nazýváme množinu všech těch x, které patří alespoň do jedné z těchto množin. *Průnikem* $M_1 \cap M_2$ těchto množin nazýváme množinu všech těch x, které patří jak do M_1 tak do M_2. *Rozdílem* $M_1 \setminus M_2$ těchto množin nazývýme množinu všech těch x, které patří do M_1 ale nepatří do M_2. *Symetrickou diferencí* $\triangle(M_1, M_2)$ nazýváme množinu $(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$ (tj. množinu těch x, které patří do jedné z těchto množin, ale nepatří do obou).

CVIEN 1.2. Dokažte rovnost $\triangle(M_1, M_2) = (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$.

CVIEN 1.3. Dokažte, že $M_1 \setminus M_2 = M_2 \setminus M_1$ právě když $M_1 = M_2$ (zřejmě je pak $M_1 \setminus M_2 = M_2 \setminus M_1 = \emptyset$).

VTA 1.1. *Pro libovolné množiny platí*

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$ (*komutativnost*)
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*asociativnost*)
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*distributivnost*)

DKAZ. 1. a 2. plynou přímo z definice. Dokažme například 6. (důkaz ostatních přenecháváme čtenáři).

Nechť $x \in A \cup (B \cap C)$. Potom je buď $x \in A$, a tedy i $x \in (A \cup B)$ a $x \in (A \cup C)$, a tedy také $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Nebo je $x \in (B \cap C)$. Potom je $x \in B$, $x \in C$, a tedy i $x \in (A \cup B)$, $x \in (A \cup C)$, a tedy také $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Dokázali jsme inkluzi $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Nechť naopak je $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Potom je $x \in (A \cup B)$, $x \in (A \cup C)$. Buď je $x \in A$, a pak je zřejmě $x \in A \cup (B \cap C)$; není-li $x \in A$, potom musí být $x \in B$ i $x \in C$, a tedy také $x \in B \cap C$ a $x \in A \cup (B \cap C)$.

CVIEN 1.4. Dokažte podrobně tvrzení 3. – 5. z věty 1.1.

Sjednocení a průnik je možno zavést i pro více množin než dvě.

DEFINICE 1.5. Nechť $\mathcal{M}$ je množina, jejímiž prvky jsou zase množiny. *Sjednocením všech množin z* $\mathcal{M}$ nazýváme množinu všech těch x, které patří aspoň do jedné množiny $M \in \mathcal{M}$. Označujeme ji $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$. *Průnikem všech množin z* $\mathcal{M}$ nazýváme množinu všech těch x, které patří do každé množiny $M \in \mathcal{M}$. Označujeme ji $\bigcap\limits_{M\in\mathcal{M}} M$. Je-li $\mathcal{M}$ posloupnost (viz kapitola 2. dále) množin $M_1, M_2, \dots$, pak píšeme $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ místo $\bigcup\limits_{M\in\mathcal{M}} M$, $\bigcap\limits_{M\in\mathcal{M}} M$. Obsahuje-li $\mathcal{M}$ k množin $M_1, M_2, \dots, M_k$, pak píšeme $\bigcup\limits_{n=1}^{k} M_n$, resp. $\bigcap\limits_{n=1}^{k} M_n$.

Definice 1.6. Nechť A, M jsou dvě množiny, $A \subset M$. Množinu $M \setminus A$ nazýváme *doplňkem* A v M a označujeme ji $\mathcal{C}_M(A)$. Je-li jasné, v jaké množině doplněk bereme, píšeme stručně $\mathcal{C}(A)$.

Vta 1.2. *Nechť A, B jsou dvě množiny. Potom je $(A\setminus B)\cup(B\cap A) = A$. Speciálně pro $B \subset A$ je $\mathcal{C}_A(B) \cup B = A$.*

Dkaz. Nechť je $x \in A$. Pak je buď $x \notin B$, a tedy $x \in (A \setminus B)$ a také $x \in (A \setminus B) \cup (B \cap A)$. Nebo je také $x \in B$, a pak ovšem $x \in (A \cap B)$ a také $x \in (A \setminus B) \cup (B \cap A)$. Dokázali jsme tedy inkluzi $A \subset (A\setminus B)\cup(B\cap A)$. Nechť je naopak $x \in (A\setminus B)\cup(B\cap A)$. Pak je buď $x \in (A \setminus B)$, což ale znamená, že $x \in A$, nebo je $x \in (B \cap A)$, ale pak je také $x \in A$.

Definice 1.7. Říkáme, že množiny A a B jsou *disjunktní*, jestliže je $A \cap B = \emptyset$.

Vta 1.3 (de Morganovy vzorce). *Nechť je $\mathcal{M} \subset \exp M$. Potom platí*

$$1.\ \mathcal{C}_M\Big(\bigcup_{A\in\mathcal{M}} A\Big) = \bigcap_{A\in\mathcal{M}} \mathcal{C}_M(A),$$
$$2.\ \mathcal{C}_M\Big(\bigcap_{A\in\mathcal{M}} A\Big) = \bigcup_{A\in\mathcal{M}} \mathcal{C}_M(A)$$

(jinými slovy: *doplněk sjednocení je roven průniku doplňků, doplněk průniku je roven sjednocení doplňků).*

Dkaz. Dokážeme 1. Nechť $x \in \mathcal{C}_M(\cup A)$. Potom je $x \in M$, ale $x \notin \cup A$, a tedy nepatří do žádného $A \in \mathcal{M}$, tj. $x \notin A$ pro každé $A \in \mathcal{M}$. To ovšem znamená, že $x \in M \setminus A = \mathcal{C}_M(A)$ pro každé $A \in \mathcal{M}$, a tedy $x \in \cap\mathcal{C}_M(A)$. Nechť naopak $x \in \cap\mathcal{C}_M(A)$. Potom je $x \in \mathcal{C}_M(A)$ pro každé $A \in \mathcal{M}$. To ovšem znamená, že $x \in M$ a $x \notin A$ pro každé A, tj. $x \notin \cup A$. Je tedy $x \in M \setminus \cup A = \mathcal{C}_M(\cup A)$.

Druhá rovnost se dokáže podobně.

Cvien 1.5. Dokažte podrobně druhou rovnost z věty 1.3.

Definice 1.8. *Kartézským součinem* množin A, B nazýváme množinu uspořádaných dvojic (a, b) takových, že $a \in A$, $b \in B$. Označujeme ji $A \times B$.

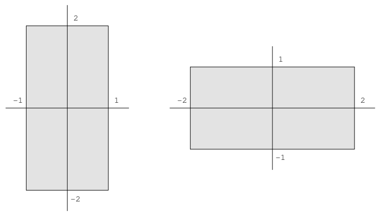
Cvien 1.6. Ukažte, že $A \times B = B \times A$ právě když buď $A = B$ nebo aspoň jedna z množin A, B je prázdná.

Poznmka 1.4. Je možné definovat kartézský součin konečného počtu množin $A_1, A_2, \ldots, A_k$, který označujeme $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ jako množinu uspořádaných k -tic takových, že $a_i \in A_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Pklad 1.5. Množinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \mathbb{R}$ (k -krát) označujeme $\mathbb{R}_k$. Stejně jako každému bodu na přímce přiřazujeme právě jeden prvek z $\mathbb{R} = \mathbb{R}_1$ (reálné číslo), pak každému bodu v rovině (prostoru) můžeme přiřadit právě jeden prvek z $\mathbb{R}_2$ ($\mathbb{R}_3$), tj. uspořádanou dvojici (trojici) reálných čísel, které nazýváme souřadnicemi bodu v nějaké soustavě souřadné.

Cvien 1.7. Nechť $A \subset M$, $B \subset P$. Potom $A \times B \subset M \times P$. Dokažte.

Pklad 1.6. Nechť $A = \{x;\ x \in \mathbb{R},\ |x| \leq 1\}$, $B = \langle -2, 2 \rangle$. Potom $A \times B$ představuje obdélník šířky 2 okolo *svislé* osy, zatímco $B \times A$ obdélník výšky 2 okolo *vodorovné* osy (nanášíme-li první souřadnice na vodorovnou osu a druhé na svislou), viz obr. 1.1. To ukazuje, že obecně je $A \times B \neq B \times A$.



Obr. 1.1

Poznmka 1.5. Ne každou podmnožinu kartézského součinu $M \times P$ lze zapsat jako $A \times B$ pro nějaké $A \subset M$, $B \subset P$. Taková je například množina $K = \{(x, y);\ (x, y) \in \mathbb{R}_2\}\ x^2 + y^2 \leq 1 \subset \mathbb{R}_2$ (uzavřený kruh o středu $(0, 0)$ a poloměru 1).

1.3. Zobrazení

Zobrazení je také jedním z pojmů, které se vyskytují snad ve všech partiích matematiky. Vyslovíme nyní přesnou jeho definici a rozebereme ji. Podrobnější výklad opět následuje petitem.

DEFINICE 1.9. Nechť M a P jsou dvě množiny, A je neprázdná podmnožina množiny M. Je-li ke každému prvku $x \in A$ přiřazen *právě jeden* prvek $y_x \in P$, říkáme, že je zadáno *zobrazení z* množiny M *do* množiny P. Označíme-li je φ, pak píšeme $\varphi : M \to P$, nebo také $\varphi : x \to y_x = \varphi(x)$, $x \in A$. Prvek $y_x = \varphi(x)$ se nazývá *obrazem* prvku x při zobrazení φ, nebo také *hodnotou* zobrazení φ na prvku x. Každé $x \in A$, pro něž je $\varphi(x) = y$, kde y je daný prvek z P, se nazývá *vzorem* prvku y. A se nazývá *definičním oborem* zobrazení φ a značí se $\mathcal{D}_\varphi$; pro $Q \subset A$ $\varphi(Q)$ značí množinu obrazů všech prvků $x \in Q$ při zobrazení φ. Přitom $\varphi(A) = \varphi(\mathcal{D}_\varphi)$ se značí $\mathcal{R}_\varphi$ a nazývá se *oborem hodnot* zobrazení φ. Je-li $\mathcal{R}_\varphi = P$, mluvíme o zobrazení *na* P, je-li $A = M$, mluvíme o zobrazení množiny M (vynecháváme předložku *z*).

PŘÍKLAD 1.7. Pro daná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ je zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dáno předpisem $\varphi(x) = ax + b$ pro $x \in \mathbb{R}$. Takovému zobrazení říkáme *lineární funkce*.

PŘÍKLAD 1.8. Zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definováno takto: $\mathcal{D}_\varphi = \mathbb{R}$ a

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \geq 1 \\ x & \text{pro } |x| < 1 \\ -1 & \text{pro } x \leq -1 \end{cases}$$

PŘÍKLAD 1.9. Zobrazení $\varphi : M \to M$, pro které je $\varphi(x) = x$ pro každé $x \in M$ nazýváme *identickým* a označujeme I_M nebo prostě I.

PŘÍKLAD 1.10. Je-li $M = \mathbb{N}$, kde $\mathbb{N}$ je množina přirozených čísel, pak příslušné zobrazení nazýváme *posloupností* prvků z P. Pro $P = \mathbb{R}$ ($P = \mathbb{C}$) ($\mathbb{C}$ je množina komplexních čísel), mluvíme o reálné (komplexní) číselné posloupnosti. Těmito posloupnostmi se budeme zabývat v kapitole 2.

PŘÍKLAD 1.11. Je-li $M = \mathbb{R}$ a $P = \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), pak zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) nazýváme *reálnou (komplexní) funkcí jedné reálné proměnné.* Těmi se budeme zabývat ve zbylých kapitolách.

Čtenář jistě zná ze školy různá geometrická zobrazení, jako třeba otočení okolo bodu (přímky), stejnolehlost, zrcadlení, aj.

POZNÁMKA 1.6. V definici 1.9. jsme zvýraznili slova *právě jeden*. To je stručné vyjádření následujících dvou věcí:

1) *aspoň* jedno – aby na prvku x bylo zobrazení definováno,
2) *nejvýše* jedno – aby obraz byl určen jednoznačně.

PŘÍKLAD 1.12. Předpis $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $|x| \leq 1$ (připomeňme, že $\sqrt{a}$ značí nezáporné číslo, jehož druhá mocnina je rovna nezápornému číslu a) definuje reálnou funkci reálné proměnné, definovanou na intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

PŘÍKLAD 1.13. Předpis: číslu $x \geq 0$ odpovídá číslo y_x takové, že $y_x^2 = x$ nedefinuje funkci, neboť pro $x > 0$ jsou taková čísla dvě: $\sqrt{x}$ a $-\sqrt{x}$.

POZNÁMKA 1.7. Na druhé straně definice 1.9. nevylučuje možnost, že dva nebo více různých bodů má stejné obrazy. V tomto smyslu uveďme následující dva extrémní případy:

DEFINICE 1.10. Pro nějaké $b \in P$ je $\varphi(x) = b$ pro všechna $x \in \mathcal{D}_\varphi$. Takové zobrazení se nazývá *konstantním* na $\mathcal{D}_\varphi$.

DEFINICE 1.11. Nechť pro jakékoli $x_1,\ x_2 \in \mathcal{D}_\varphi$, $x_1 \neq x_2$ je $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$ – různým bodům odpovídají různé obrazy (toto lze ekvivalentně vyjádřit i takto: $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$ – každý prvek z $\mathcal{R}_\varphi$ má jediný vzor). Potom se takové zobrazení nazývá *prosté* na $\mathcal{D}_\varphi$.

PŘÍKLAD 1.14. Funkce $f(x) = 2x + 5$ je prostá na $\mathbb{R}$, zatímco $g(x) = x^2$ tam prostá není. Ověřte podrobně.

CVIČENÍ 1.8. Najděte obory hodnot výše uvedených zobrazení.

POZNMKA 1.8. Zadati zobrazení z M do P znamená zadat:

a) jeho definiční obor, tj. jistou podmnožinu A množiny M,
b) hodnotu zobrazení v každém bodě $x \in A$.

DEFINICE 1.12. Řekneme, že dvě zobrazení φ a ψ *se rovnají*, tj. $\varphi = \psi$, jestliže $\mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_\psi$ a $\varphi(x) = \psi(x)$ pro každé $x \in \mathcal{D}_\varphi = \mathcal{D}_\psi$.

To znamená , že například $\varphi(x) = x^2$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $\psi(x) = x^2$ pro $x > 0$ jsou dvě různá zobrazení. Na druhé straně s tímto příkladem souvisí následující definice:

DEFINICE 1.13. Je-li $\mathcal{D}_\psi \subset \mathcal{D}_\varphi$ a $\psi(x) = \varphi(x)$ pro $x \in \mathcal{D}_\psi$, pak říkáme, že zobrazení ψ je *zúžením* zobrazení φ a zobrazení φ je rozšířením zobrazení ψ. Značíme také $\varphi|_B$ zúžení φ na množinu $B \subset \mathcal{D}_\varphi$.

S pojmem prostého zobrazení souvisí pojem *inverzního* zobrazení:

DEFINICE 1.14. Je-li $\varphi: M \to P$ prosté zobrazení , pak k němu *inverzním* zobrazením $\varphi^{-1}: P \to M$ nazýváme zobrazení definované takto: $\mathcal{D}_{\varphi^{-1}} = \mathcal{R}_\varphi$ a pro $y \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}$ je $\varphi^{-1}(y) = x_y$, pro něž je $\varphi(x_y) = y$.

Tato definice opravdu zadává zobrazení, neboť díky prostotě φ má každé y jediný vzor při zobrazení φ.

PKLAD 1.15. Je-li pro $x \in \mathcal{D}_\varphi = \{x;\ x \geq 0\}$ $\varphi(x) = x^2$, je $\varphi^{-1}(y) = \sqrt{y}$ s $\mathcal{D}_{\varphi^{-1}} = \{y;\ y \geq 0\}$.

VTA 1.4. *Je-li φ prosté zobrazení z M do P, potom platí:*

1) *φ^{-1} je prosté zobrazení z P do M.*
2) *$\mathcal{D}_{\varphi^{-1}} = \mathcal{R}_\varphi$, $\mathcal{R}_{\varphi^{-1}} = \mathcal{D}_\varphi$.*
3) *$\varphi^{-1}(y) = x \Leftrightarrow \varphi(x) = y$ pro $x \in \mathcal{D}\varphi$ a $y \in \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}$.*
4) *$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$ pro $x \in \mathcal{D}_\varphi$, $\varphi(\varphi^{-1}(y)) = y$ pro $y \in \mathcal{D}_\varphi^{-1}$.*
5) *$(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$.*

DKAZ. Je-li $\varphi^{-1}(y_1) = \varphi^{-1}(y_2) = x$, pak podle definice φ^{-1} je $\varphi(x) = y_1$, $\varphi(x) = y_2$, a tedy $y_1 = y_2$, což dokazuje prostotu φ^{-1}. $\mathcal{D}_{\varphi^{-1}} = \mathcal{R}_\varphi$ a $\mathcal{R}_{\varphi^{-1}} \subset \mathcal{D}_\varphi$ platí podle definice. Je-li ale $x \in \mathcal{D}_\varphi$, pak pro $y = \varphi(x)$ je $\varphi^{-1}(y) = x$, a tedy $\mathcal{D}_\varphi \subset \mathcal{R}_{\varphi^{-1}}$, čímž je 2) dokázáno. Tvrzení 3) plyne přímo z definice φ^{-1}. Dokažme 4). Je-li $\tilde{x} = \varphi^{-1}(\varphi(x))$, pak podle definice φ^{-1} je $\varphi(\tilde{x}) = \varphi(x)$ a z prostoty φ plyne $\tilde{x} = x$. Druhá rovnost se dokazuje podobně. Poslední tvrzení plyne z 2) a z toho, že $(\varphi^{-1})^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = \varphi(x)$.

Jestliže φ není prosté na $\mathcal{D}_\varphi$, může být prosté na nějaké podmnožině $B \subset \mathcal{D}_\varphi$. Pak $\varphi|_B$ je prosté a existuje k němu inverzní $(\varphi|_B)^{-1}$, viz následující příklad.

PKLAD 1.16. Zobrazení $\varphi(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ není prosté. Ale jeho zúžení na interval $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ je prosté. Zobrazuje tento interval na interval $\langle -1, 1\rangle$. Proto inverzní k tomuto zúžení zobrazuje interval $\langle -1, 1\rangle$ na interval $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ a označuje se arcsin.

Dalším důležitým pojmem je tzv. *složené* zobrazení:

DEFINICE 1.15. Nechť $\varphi: M \to P$, $\psi: P \to Q$, $\mathcal{R}_\varphi \cap \mathcal{D}_\psi \neq \emptyset$. Potom definujeme zobrazení $\psi \circ \varphi$ předpisem:

1) $\mathcal{D}_{\psi\circ\varphi} = \{x;\ x \in \mathcal{D}_\varphi,\ \varphi(x) \in \mathcal{D}_\psi\}$,
2) $(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$ pro každé $x \in \mathcal{D}_{\psi\circ\varphi}$.

Zobrazení $\psi \circ \varphi$ se nazývá *složeným* zobrazením (*kompozicí*) zobrazení φ a ψ. Přitom se φ nazývá *vnitřním* a ψ *vnějším* zobrazením

POZNMKA 1.9. Při tvoření složeného zobrazení záleží na pořadí. $\mathcal{D}_{\psi\circ\varphi}$ je voleno tak, aby $\psi \circ \varphi$ bylo definováno na co největší množině, pro něž má $\psi(\varphi(x))$ smysl.

PKLAD 1.17. $\varphi: x \to x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, $\psi: y \to \sqrt{y}$, $y \geq 0$. Protože je $\mathcal{R}_\varphi = \{y;\ y \geq 1\} \subset \mathcal{D}_\psi = \{y;\ y \geq 0\}$, je $\mathcal{D}_{\psi\circ\varphi} = \mathcal{D}\varphi = \mathbb{R}$ a $(\psi \circ \varphi)(x) = \sqrt{1 + x^2}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

PKLAD 1.18. $\varphi : \ x \to 1 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $\psi : \ y \to \sqrt{y}$, $y \geq 0$. Protože je $\varphi(x) \in \mathcal{D}_\psi \Leftrightarrow |x| \leq 1$, je $\mathcal{D}_{\psi\circ\varphi} = \{x; \ |x| \leq 1\}$ a $(\psi \circ \varphi)(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pro každé $x \in \mathcal{D}_{\psi\circ\varphi}$.

Protože je $\mathcal{R}_\psi \subset \mathcal{D}_\varphi$, je $\mathcal{D}_{\varphi\circ\psi} = \mathcal{D}_\psi$ a $(\varphi \circ \psi)(y) = 1 - (\sqrt{y})^2 = 1 - y$ pro každé $y \geq 0$.

POZNMKA 1.10. Je možné za příslušných předpokladů vytvořit kompozici konečného počtu zobrazení $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_n$. Platí pak například $\varphi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3) = (\varphi_1 \circ \varphi_2) \circ \varphi_3$ (asociativnost kompozice). Dokažte.

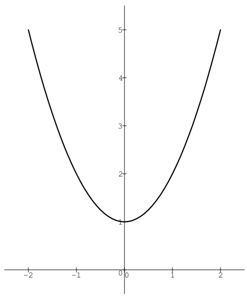
Důkazy následujících tvrzení přenecháváme čtenáři za cvičení.

VTA 1.5. *Jsou-li φ a ψ prostá zobrazení a $\psi \circ \varphi$ je definováno, pak je také prosté.*

VTA 1.6. *Je-li φ prosté zobrazení, pak $\varphi^{-1} \circ \varphi$ a $\varphi \circ \varphi^{-1}$ jsou identická zobrazení na $\mathcal{D}_\varphi$ resp. $\mathcal{R}_\varphi$.*

DEFINICE 1.16. Je-li φ zobrazení z M do P, pak množinu $\mathcal{G}(\varphi) = \{(x, \varphi(x)); \ x \in \mathcal{D}_\varphi\} \subset M \times P$ nazveme *grafem* zobrazení φ.

PKLAD 1.19. Je-li $\varphi : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, je $\mathcal{G}(\varphi)$ podmnožinou $\mathbb{R}_2$, tvořenou všemi dvojicemi čísel tvaru $(x, \varphi(x))$, $x \in \mathcal{D}_\varphi$. Přiřadíme-li každé dvojici čísel (x, y) bod v rovině o souřadnicích x, y v nějaké soustavě souřadné, bude graf funkce jistá množina bodů v rovině, která nám dává jistou představu o chování této funkce. Například pro $\varphi : x \to x^2 + 1$, $|x| \leq 2$ je $\mathcal{G}(\varphi)$ část paraboly na obrázku 2.

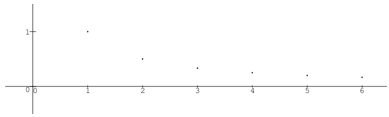


OBR. 1.2

PKLAD 1.20. Je-li φ reálná posloupnost $\varphi(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, je $\mathcal{G}(\varphi)$ posloupnost bodů v rovině, jejichž první souřadnice jsou přirozená čísla a druhé jsou rovné příslušnému číslu a_n. Na obrázku 3. je část grafu $\mathcal{G}(\varphi)$ pro $\varphi(n) = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

CVIEN 1.9. Nakreslete přibližně grafy funkcí uvedených v tomto oddílu.

CVIEN 1.10. Dokažte, že množina $G \subset M \times P$, $G \neq \emptyset$, je grafem nějakého zobrazení $\varphi : \ M \to P$ právě když $(x, y_1) \in G$, $(x, y_2) \in G \Rightarrow y_1 = y_2$.



Obr. 1.3

1.4. Čísla, množiny čísel

V tomto oddílu stručně připomeneme užívané druhy čísel a jejich vlastnosti.

Přirozená čísla – $\mathbb{N}$

$$1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Vznikla jako vyjádření počtu prvků množiny resp. jako vyjádření pořadí odpočítávaných věcí.

Můžeme je srovnávat podle velikosti, sčítat a násobit.

Je jich nekonečně mnoho – ke každému existuje o jedničku větší, ale ne zase příliš mnoho. Platí totiž následující tzv. *axiom indukce*:

Jestliže pro nějakou množinu $M \subset \mathbb{N}$ je

1) $1 \in M$,
2) s každým $n \in M$ je také $(n+1) \in M$,

pak je $M = \mathbb{N}$.

Celá čísla – $\mathbb{Z}$

$$\ldots,\ -n,\ -(n-1),\ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ldots,\ n,\ \ldots$$

(přidali jsme záporná celá čísla a nulu). Můžeme navíc bez omezení odečítat.

Racionální čísla – $\mathbb{Q}$

jsou třídy ekvivalentních zlomků

$$\frac{p}{q},\ q \neq 0,\ p, q \in \mathbb{Z}$$

(dva zlomky p/q a $\tilde{p}/\tilde{q}$ nazýváme ekvivalentní, je-li $p\tilde{q} = \tilde{p}q$).

Můžeme navíc bez omezení dělit (nenulovým číslem).

Na rozdíl od množiny celých čísel mezi každými dvěma racionálními čísly $q_1 < q_2$ leží další racionální číslo (a tedy nekonečně mnoho takových čísel). Kdybychom si racionální čísla znázorňovali na přímce, pak by ji „hustě" zaplnila, ale ne zcela vyplnila. Kdybychom například z počátku nanesli přeponu pravoúhlého trojúhelníka s rameny rovnými jedné, pak by její koncový bod nebyl označen žádným racionálním číslem – viz následující poznámka.

Poznmka 1.11. Neexistuje racionální číslo p/q s vlastností $(p/q)^2 = 2$: Kdyby existovalo, můžeme předpokládat, že p a q jsou kladná a nesoudělná.Pak ale $p^2 = 2q^2$, tj, p^2 je sudé. Pak ale i p musí být sudé: $p = 2k$. Potom ale je $(2k)^2 = 2q^2$, $2k^2 = q^2$, tj. q musí být také sudé, což je spor s předpokládanou nesoudělností $p,\ q$.

Aby se odstranily tyto nedostatky, byla zavedena tzv. reálná čísla.

Reálná čísla – $\mathbb{R}$.

Jedním z možných způsobů jak je zavést jsou tzv. nekonečné desetinné rozvoje

$$\pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots\ ,$$

kde $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, $i \in \mathbb{N}$ s tím, že nepřipouštíme periodu 9 a připouštíme periodu 0 (tzv. ukončené rozvoje; je například 1,00 … 0 … totéž, jako 0,99 … 9 …). Racionálním číslům pak odpovídají rozvoje, které mají periodu (speciálně ukončené rozvoje). Pro daný zlomek p/q se odpovídající desetinný rozvoj dostane dělením se zbytkem čísla p číslem q. Příkladem neperiodického rozvoje může být například rozvoj $0,101001000\ldots$ (počet nul za každou jedničkou se o jednotku zvětšuje).

V množině reálných čísel můžeme sčítat, odečítat, násobit, dělit (kromě nulou) bez omezení, srovnávat podle velikosti, přičemž opět platí, že mezi každými dvěma čísly $r_1 < r_2$ leží nekonečně mnoho dalších reálných čísel (dokonce i nekonečně mnoho racionálních čísel). Přitom každé reálné číslo můžeme s libovolnou přesností přiblížit racionálními čísly: je-li $r =$

$a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ reálné číslo, pak racionální číslo $a_0, a_1 a_2 \dots a_n 00 \dots 0 \dots$ se od r liší nejvýše o $1/10^n$.

Abychom vyjádřili vlastnost, že tato čísla už zaplní celou přímku (a také i například to, že můžeme bez omezení odmocňovat nezáporná čísla), zaveďme nejdříve některé pojmy, které se nám budou hodit i v dalším.

Definice 1.17. Množina $M \subset \mathbb{R}$ je *omezená zhora* (*omezená zdola*), jestliže existuje takové $K_1 \in \mathbb{R}$ ($K_2 \in \mathbb{R}$), že $x \leq K_1$ ($x \geq K_2$) pro všechna $x \in M$. Číslo K_1 (K_2) s touto vlastností pak nazýváme *horní (dolní) hranicí* množiny M. Je-li M omezená zhora i zdola, pak říkáme, že je *omezená*.

Definice 1.18. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ má *největší prvek (= maximum)* (*nejmenší prvek (= minimum)*), jestliže existuje $x_0 \in M$ takové, že $x_0 \geq x$ ($x_0 \leq x$) pro každé $x \in M$. Takové x_0 pak nazýváme *největším (nejmenším)* prvkem množiny M.

Poznámka 1.12. Zřejmě každá konečná množina má nejmenší i největší prvek. Má-li M maximum (minimum), pak je omezená zhora (zdola). Opačné implikace obecně neplatí: $M = \{y;\ y < 2\}$ je omezená zhora, ale nemá maximum.

Definice 1.19. Řekneme, že číslo G je *supremem (= nejmenší horní hranicí)* množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže platí

1) $x \leq G$ pro každé $x \in M$,
2) pro každé $\tilde{G} < G$ existuje $x_{\tilde{G}} \in M$, že $x_{\tilde{G}} > \tilde{G}$.

Řekneme, že číslo g je *infimem (= největší dolní hranicí)* množiny $M \subset \mathbb{R}$, jestliže platí

1) $x \geq g$ pro každé $x \in M$,
2) pro každé $\tilde{g} > g$ existuje $x_{\tilde{g}} \in M$, že $x_{\tilde{g}} < \tilde{g}$.

Poznámka 1.13. 1) značí, že G je horní hranice, 2) značí, že žádné $\tilde{G} < G$ není horní hranicí. Analogicky pro infimum.

Poznámka 1.14. Má-li M maximum, pak je supremum rovno tomuto maximu. Obecně supremum nemusí být maximem – viz příklad z poznámky 1.12.

Vlastnost „neděravosti" $\mathbb{R}$ vyjadřuje následující věta:

VĚTA 1.7. *Každá neprázdná*[1] *zhora (zdola) omezená množina* $M \subset \mathbb{R}$ *má v* $\mathbb{R}$ *supremum (infimum).*

POZNÁMKA 1.15. Pro $\mathbb{Q}$ taková věta neplatí, například množina $M = \{y;\ y \in \mathbb{Q},\ y^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$ nemá v $\mathbb{Q}$ supremum ($\sqrt{2}$, což je její supremum v $\mathbb{R}$, do $\mathbb{Q}$ nepatří).

PODSTATA DKAZU. Nechť omezená zhora množina M obsahuje pouze kladná čísla. Potom je množina všech $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ u všech prvků z M omezená. Nechť $\tilde{a}_0$ je její maximum. Uvážíme-li nyní podmožinu $M_0 \subset M$ všech těch čísel z M, pro něž je $a_0 = \tilde{a}_0$, určíme $\tilde{a}_1$ jako největší z čísel $\{0,1, \dots ,9\}$ takových, že v M_0 existuje číslo, začínající $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1$. Analogicky postupujeme dále, až sestrojíme číslo $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1\tilde{a}_2 \dots \tilde{a}_n \dots$, o němž se dokáže, že je supremem M.

V množině reálných čísel platí (viz například [Ši]) také tzv.

Archimedův princip: pro $\alpha > 0$, β libovolné existuje n celé, že $(n-1)\alpha \le \beta < n\alpha$.

Pro každé reálné číslo $r \neq 0$ definujeme jeho *absolutní hodnotu* $|r|$ jako kladné z čísel r a $-r$, $|0| \stackrel{def}{=} 0$. Připomeňme, že pro takto definovanou absolutní hodnotu platí vztahy:

1) $|ab| = |a| \,.\, |b|$,
2) $|a + b| \le |a| + |b|$ (trojúhelníková nerovnost),
3) $||a| - |b|| \le |a - b|$,
4) $|a| \le b \Leftrightarrow -b \le a \le b$, $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$.

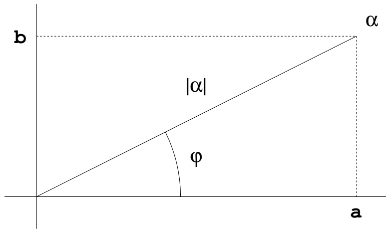
Komplexní čísla – $\mathbb{C}$

Důvodem pro jejich zavedení bylo přání umět odmocňovat i záporná čísla, obecněji přání, aby každý mnohočlen stupně alespoň 1 měl alespoň jeden kořen.

Komplexní čísla se zavádějí jako množina uspořádaných dvojic (a, b) reálných čísel. Rovnost dvou komplexních čísel (a, b) a (c, d) se definuje předpisem $a = c$ a zároveň $b = d$. Sčítání a násobení se definuje následovně: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Tyto operace mají stejné vlastnosti jako v množině reálných čísel. Reálným číslům odpovídají komplexní čísla tvaru $(a, 0)$. Číslo $(0, 1)$ se označuje i (komplexní jednotka) a platí pro něj $i^2 = -1$. Vzhledem k těmto definicím můžeme každé komplexní číslo $\alpha = (a, b)$ zapsat ve tvaru $\alpha = a + ib$, přičemž čísla a a b se nazývají *reálnou* a *imaginární* částí čísla α a značí

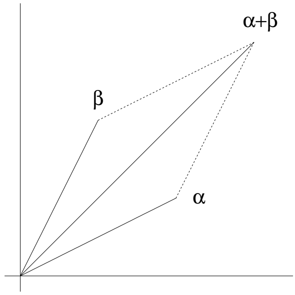
[1] tj. která má aspoň jeden prvek.

se $\operatorname{Re}\alpha$ a $\operatorname{Im}\alpha$. *Absolutní hodnotou* $|\alpha|$ čísla $\alpha = a + ib$ nazýváme číslo $\sqrt{a^2 + b^2}$. Každé komplexní číslo pak můžeme napsat v tzv. *goniometrickém tvaru* $\alpha = a + ib = |\alpha| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$, kde φ (tzv. *argument* komplexního čísla) je takové číslo, pro něž je $\cos\varphi = a/|\alpha|$, $\sin\varphi = b/|\alpha|$. Komplexní čísla si znázorňujeme jako body roviny (viz obr. 1.4).

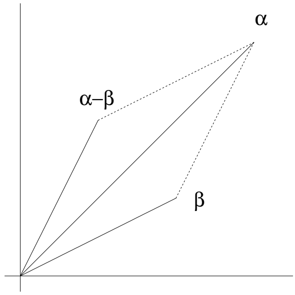


Obr. 1.4

Na tomto obrázku je také vidět geometrický význam zavedených pojmů. Na obrázku 1.5. je vidět, jak si znázorníme součet dvou komplexních čísel, na obrázku 1.6. je vidět význam rozdílu $\beta - \alpha$ dvou komplexních čísel a také význam absolutní hodnoty tohoto rozdílu jako vzdálenosti odpovídajících bodů α a β.



Obr. 1.5



Obr. 1.6

Definice 1.20. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{C}$ je *omezená*, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, že $|x| \leq K$ pro všechny $x \in M$.

V množině $\mathbb{C}$ má každý polynom stupně alespoň 1 alespoň jeden kořen. Na druhé straně v $\mathbb{C}$ není definováno uspořádání. Lze jen srovnávat absolutní hodnoty komplexních čísel (neboť to jsou čísla reálná).

Připomeňme nakonec následující vztahy, platné pro libovolná dvě komplexní čísla α, β:

$$|\alpha.\beta| = |\alpha|\,.\,|\beta|\,,\ \ |\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|\,,\ \ |\alpha-\beta| \geq ||\alpha| - |\beta||\,.$$

KAPITOLA 2

ČÍSELNÉ POSLOUPNOSTI

2.1. Definice, úvodní poznámky

Posloupnost je speciální důležitý případ zobrazení. Vedle jeho samostatného významu je důvod pro jeho zařazení hned na začátku této učebnice i pedagogický: aby si čtenář na poměrně jednoduchém příkladu zvykl na základní pojmy matematické analýzy: *limitu, konvergenci, omezenost* apod.

DEFINICE 2.1. *Posloupností* prvků z množiny M nazýváme zobrazení φ z množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do M. Je-li $M = \mathbb{R}$, mluvíme o *posloupnosti reálných čísel*, je-li $M = \mathbb{C}$, mluvíme o *posloupnosti komplexních čísel*. Hodnotu zobrazení $\varphi(n)$ na prvku $n \in \mathbb{N}$ značíme a_n, b_n apod. a nazýváme n-tým členem posloupnosti. $\mathcal{R}_\varphi$, tj. množinu $\{a_n;\ a_n = \varphi(n),\ n \in \mathbb{N}\}$ nazýváme *množinou členů* této posloupnosti.

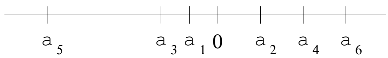
POZNÁMKA 2.1. Pro zkrácení zápisu píšeme obvykle $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ nebo $a_n,\ n \in \mathbb{N}$ místo posloupnost φ, $\varphi(n) = a_n,\ n \in \mathbb{N}$ a $\{a_n\}_1^\infty$ místo množiny členů posloupnosti.

PŘÍKLAD 2.1. Nemusí být $a_i \neq a_j$, $i \neq j$: například tzv. *konstantní* neboli *stacionární* posloupnost je taková, že pro nějaké pevné $c \in M$ je $a_n = c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom je samozřejmě množina $\{a_n\}_1^\infty$ jednobodová a obsahuje právě bod c.

Dále se budeme zabývat pouze posloupnostmi reálných nebo komplexních čísel.

Posloupnost reálných čísel si můžeme geometricky znázornit následovně:

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX



Obr. 2.1

a) na přímce – viz obr. 2.1.
b) v rovině – viz příklad 1.20.

Pokud je $\{a_n\}_1^\infty$ nekonečná množina, nemůže samozřejmě obrázek znázornit celou posloupnost, může ovšem zachytit některé zákonitosti a přiblížit nám některé úvahy.

U posloupností budeme zkoumat *omezenost*, *konvergenci (existenci limity)*, *monotonnost* a vzájemné souvislosti mezi těmito pojmy.

2.2. Omezené a monotonní posloupnosti

Definice 2.2. Řekneme, že posloupnost a_n, $n \in \mathbb{N}$ je *omezená*, je-li omezená množina jejích členů $\{a_n\}_1^\infty$. Pro reálné posloupnosti definujeme analogicky také *omezenost zhora (zdola)*.

Poznámka 2.2. Podle definice omezenosti množiny je tedy posloupnost a_n, $n \in \mathbb{N}$ omezená právě když existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $|a_n| \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Analogicky pro posloupnosti omezené zhora (zdola).

Příklad 2.2. Je-li $a_n = a + nd$, $n \in \mathbb{N}$ *aritmetická posloupnost*, a, $d \in \mathbb{C}$, pak je a_n omezená právě když je $d = 0$. Je-li $d = 0$, pak je posloupnost zřejmě omezená (množina $\{a_n\}_1^\infty$ je jednobodová). Ukažme, že pro $d \neq 0$ tato posloupnost není omezená. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n| \geq |n|\,|d| - |a|$. Podle Archimedova principu (viz kapitola 1.) ke každému K existuje $\tilde{n} \in \mathbb{N}$, že $|d|\,\tilde{n} > K + |a|$, a tedy $|a_{\tilde{n}}| > K$.

Cvičení 2.1. Nechť $a_n = a_1 q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, a_1, $q \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq 0$ je *geometrická posloupnost*. Ukažte, že je omezená právě když je $|q| \leq 1$.

V reálném případě pro $q < -1$ není omezená ani zhora ani zdola, pro $q > 1$ je omezená zdola (zhora) právě když je $a_1 > 0$ ($a_1 < 0$).

DEFINICE 2.3. Nechť a_n, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že tato posloupnost je *neklesající* (*rostoucí*), je-li $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že tato posloupnost je *nerostoucí* (*klesající*), je-li $a_n \geq a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Všechny takové posloupnosti nazýváme *monotonními* , klesající a rostoucí *ryze monotonními*. Řekneme, že posloupnost je monotonní (rostoucí, klesající, apod.) od indexu $n_0 \subset \mathbb{N}$, platí-li příslušné nerovnosti pro každé $n \geq n_0$.

PŘÍKLAD 2.3. Reálná aritmetická posloupnost je vždy monotonní. Pro $d \neq 0$ dokonce ryze monotonní (klesající pro $d < 0$, rostoucí pro $d > 0$). Reálná geometrická posloupnost je monotonní pro $q \geq 0$, ryze monotonní pro $q > 0$, $q \neq 1$, $a_1 \neq 0$, není monotonní pro $q < 0$. Snadné ověření přenecháváme čtenáři za cvičení.

2.3. Limita posloupnosti

DEFINICE 2.4. Řekneme, že číslo $a(\in \mathbb{R},\ \mathbb{C})$ je *limitou* posloupnosti a_n,$n \in \mathbb{N}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ existuje $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0(\varepsilon)$ je

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Píšeme pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (limita a_n pro n konvergující k $+\infty$ je rovna a), nebo $a_n \to a$ pro $n \to +\infty$ (a_n konverguje k a pro n konvergující do plus nekonečna). (Znaménko + u $+\infty$ obvykle vynecháváme). Řekneme, že posloupnost a_n, $n \in \mathbb{N}$ je *konvergentní*, má-li limitu, tj. existuje-li a, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

POZNÁMKA 2.3. Pomocí kvantifikátorů můžeme stručně tuto definici zapsat takto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ (n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

PŘÍKLAD 2.4. Ukažme, že posloupnost $a_n = 1 - 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ má limitu 1. Dokážeme to tak, že opravdu ke každému $\varepsilon > 0$ najdeme příslušné n_0.

Tvrdím, že za n_0 lze volit takové přirozené číslo, že $n_0 > 1/\varepsilon$ (což je ekvivalentní tomu, že $1/n_0 < \varepsilon$). (Takové číslo existuje podle Archimedova principu.) Ověřme to: je-li totiž $n > n_0$, pak je

$$\left|1 - \frac{1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \text{ pro } n > n_0.$$

Pochopení pojmu limity dělá začátečníkovi potíže, které ovšem, chceli porozumět dalšímu, musí překonat. Následující poznámky mu k tomu snad trochu pomohou.

Poznámka 2.4. Definice 2.4. je přesnou formulací následujícího nepřesného (nejasného) tvrzení – jakési intuitivní představy:
a_n se neomezeně blíží k a, jestliže n roste nade všecky meze. Rozeberme a upřesněme toto tvrzení. „Neomezeně se blíží" znamená, že a_n se od a liší méně než libovolné kladné číslo ε. Kromě vyjímečného případu tzv. stacionární posloupnosti $a_n = a$, $n \in \mathbb{N}$, která má zřejmě limitu a, není možné očekávat, že $|a_n - a| < \varepsilon$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To má být pro n „rostoucí nade všecky meze",tj. pro n dostatečně velká, tj. pro všechna $n > n_0$, kde $n \in \mathbb{N}$ je dostatečně velké číslo. Přitom požadovaná blízkost a_n k a a potřebná velikost n nejsou nezávislé. Obecně bude pro $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ potřeba vzít $n_0(\tilde{\varepsilon})$ větší než $n_0(\varepsilon)$. Fakticky jsme došli opět k definici 2.4. Číslo $\varepsilon > 0$ charakterizuje „blízkost" a_n k a, číslo n_0 pak charakterizuje potřebnou velikost těch n, zajišťující požadovanou blízkost a_n k a.

Poznámka 2.5. Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ a $n_0(\varepsilon)$ vyhovuje požadavku kladenému na něj v definici 2.4, pak také libovolné číslo $\tilde{n} > n_0(\varepsilon)$ je přípustné, neboť je-li $|a_n - a| < \varepsilon$ pro každé $n > n_0(\varepsilon)$, pak je to pravda také pro všechna $n > \tilde{n}$ (neboť z $n > \tilde{n}$, $\tilde{n} > n_0(\varepsilon) \Rightarrow n > n_0(\varepsilon)$). Při konstrukci $n_0(\varepsilon)$ není v konkrétních příkladech i v teoretických úvahách třeba brát to nejmenší, které má požadovanou vlastnost.

Poznámka 2.6. Jestliže posloupnost a_n nemá limitu a (tj. platí non($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$)), pak jsou možné dva případy:

a) posloupnost a_n nemá žádnou limitu,
b) posloupnost a_n má limitu b, $b \neq a$.

non(a_n je konvergentní) znamená, že a_n nemá žádnou limitu.

non($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$) značí: ne ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0(\varepsilon)$ tak, že pro všechna $n > n_0(\varepsilon)$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. To znamená (viz ekvivalenci 13) v oddílu 1.1.), že existuje $\varepsilon_0 > 0$ (aspoň jedno), že pro něj příslušné $n_0(\varepsilon_0)$ neexistuje, tj. existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pro žádné přirozené n_0 není pravda, že pro všechna $n > n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon_0$. „Posuneme-li zápor ještě dále, vidíme, že tyto výroky jsou ekvivalentní výroku: *existuje* $\varepsilon_0 > 0$ *tak, že pro každé přirozené* n_0 *existuje* $\tilde{n} > n_0$ *takové, že neplatí* $|a_n - a| < \varepsilon_0$, *tj. platí* $|a_{\tilde{n}} - a| \geq \varepsilon_0$. Pomocí kvantifikátorů se to stručně dá zapsat takto:

$$\text{non}(\lim_{n\to\infty} a_n = a) \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, \tilde{n} > n_0\ \tilde{n} \in \mathbb{N}\ \ |a_{\tilde{n}} - a| \geq \varepsilon_0.$$

Můžeme také říci, že existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že nekonečně mnoho členů posloupnosti a_n se liší od a aspoň o ε_0 (ne obecně všechny, jak často někteří začátečníci chybně tvrdí).

Poznámka 2.7. Kdybychom v konkrétních případech měli hledat limitu podle definice, nebyli bychom asi moc úspěšní. Principálně mohou nastat dvě logické možnosti:

α) dokazovat, že posloupnost nemá žádnou limitu, tj. ke každému a najít ε_0 z předchozí poznámky,

β) dokazovat, že limitu má, a tedy
   1) „uhodnout", jaká je, tj. určit a,
   2) pro toto a najít ke každému číslu $\varepsilon_0 > 0$ přirozené číslo n_0, které má vlastnost z definice 2.4.

V dalším dokážeme některé věty, které nám výpočet limit usnadní. Přesto limity některých posloupností stejně budeme muset počítat z definice.

Příklad 2.5. Nechť p je přirozené. Položme $a_n = 1/n^p$, $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Uvažme nejdříve případ $p = 1$. Je-li $\varepsilon > 0$, pak k němu existuje přirozené číslo $n_0(\varepsilon)$ takové, že $1/n_0(\varepsilon) \leq \varepsilon$. Toto $n_0(\varepsilon)$ má vlastnost z definice 2.4, neboť je

$$|1/n - 0| = 1/n < 1/n_0(\varepsilon) \leq \varepsilon \text{ pro } n > n_0(\varepsilon).$$

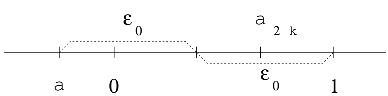
V obecném případě pro $p \in \mathbb{N}$ je $1/n^p \leq 1/n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $n_0(\varepsilon)$ nalezené výše má požadovanou vlastnost i pro posloupnost $1/n^p$. Je tedy $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^p = 0$ pro libovolné $p \in \mathbb{N}$.

Vzniká přirozená otázka, jak přijít na to zvolit $n_0(\varepsilon)$ právě tak, jak jsme je zvolili. Například takto: Chtěli bychom, aby bylo $|1/n^p - 0| < \varepsilon$, tj. $1/n^p < \varepsilon$ pro všechna n dosti velká. Ale $1/n^p \leq 1/n$, a tedy stačí najít n_0 tak, aby pro $n > n_0$ bylo $1/n < \varepsilon$, tj. $n > 1/\varepsilon$. Tuto nerovnost splňují všechna přirozená čísla počínaje číslem $[1/\varepsilon] + 1$, kde pro $\alpha \in \mathbb{R}$ je $[\alpha]$ největší celé číslo menší nebo rovné α (ověřte). Lze tedy za n_0 volit to nejmenší z nich, tj. $[1/\varepsilon] + 1$ (šlo by volit i $[1/\varepsilon]$). Nakonec se pro jistotu přesvědčíme, že takto určené číslo má opravdu požadovanou vlastnost.

Příklad 2.6. Posloupnost $1, 0, 1/2, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, \ldots$ nemá žádnou limitu. Všimněte si, že tato posloupnost je sestavena tak, že na lichých místech jsou členy posloupnosti z příkladu 2.5. (s $p = 1$) a na sudých místech členy posloupnosti z příkladu 2.4. Některé členy zkoumané posloupnosti budou tedy blízké k 0 a jiné zase k 1. Nemůže proto existovat žádné číslo a takové, k němuž by byly všechny členy s dost velkým indexem dost blízké. Ukažme si, že tento názor je správný. Podle poznámky 2.6. musíme tedy najít takové číslo ε_0, že ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje $\tilde{n} > n$, pro které je $|a_{\tilde{n}} - a| \geq \varepsilon_0$. Ukažme, že za ε_0 lze volit číslo $\frac{1}{2}\max(|a|, |a-1|)$. Nechť je například $|a - 1| \geq |a|$. Protože je $a_{2k} = 1 - 1/k$ a $1/k \to 0$, existuje $k_0(\varepsilon_0)$ takové, že pro $k > k_0(\varepsilon_0)$ je $|a_{2k} - 1| < \varepsilon_0$, a tedy i

$$|a_{2k} - a| = |a_{2k} - 1 + (1 - a)| \geq |1 - a| - |a_{2k} - 1| \geq 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0.$$

Pro libovolné n lze tedy za $\tilde{n}$ zvolit takové sudé číslo, které splňuje nerovnosti $\tilde{n} > n$, $\tilde{n} > 2k_0(\varepsilon_0)$ (například lze položit $\tilde{n} = 2\max(n,\ k_0(\varepsilon_0))$). Nakresleme si obrázek:



Obr. 2.2

$a_{2k} \in \langle 1 - \varepsilon_0, 1 \rangle$ pro $k > k_0(\varepsilon_0)$, a musí se proto lišit od a alespoň o ε_0.

V případě $|a - 1| \leq |a|$ by se analogicky ukázalo, že se od a musí lišit alespoň o $|a|/2$ členy a_{2k-1} pro k dost velké.

Pro posloupnosti reálných čísel se definují ještě tzv. *nevlastní* limity:

Definice 2.5. Řekneme, že posloupnost reálných čísel a_n, $n \in \mathbb{N}$ má *nevlastní limitu* $+\infty$ $(-\infty)$, jestliže pro každé $K \in \mathbb{R}$ existuje $n_0(K) \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0(K)$ platí

$$a_n > K \quad (a_n < K).$$

Píšeme pak $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$ $(-\infty)$.

Poznámka 2.8. Limitu ve smyslu definice 2.4. budeme nazývat *vlastní limitou.*

Poznámka 2.9. $+\infty$ a $-\infty$ jsou pouze symboly, nikoli prvky z $\mathbb{R}$. V oddílu 2.6. dále si ukážeme, jak je možné a užitečné tyto symboly přidat k $\mathbb{R}$ a dostat jisté jeho rozšíření $\mathbb{R}^*$.

Příklad 2.7. Pro $a_n = 5n + 1$, $b_n = -2n + 1$,$n \in \mathbb{N}$ ukážeme, že $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = -\infty$.

Důkaz. 1. Nechť K je libovolné pevné reálné číslo. Pak existuje $n_0(K) \in \mathbb{N}$, že $n_0(K) \geq K$. Poněvadž je $5n + 1 > n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je pro $n > n_0(K)$ $a_n > n > n_0(K) \geq K$.

2. Nechť pro $K \in \mathbb{R}$ je $n_0(K) \in \mathbb{N}$ takové, že $n_0(K) \geq -K+1$. Protože je $b_n < -n + 1 < -n_0(K) + 1 \leq K - 1 + 1 = K$ pro $n > n_0(K)$, je $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = -\infty$.

Poznámka 2.10. Máme tedy tři druhy reálných posloupností:

1) mající vlastní limitu (konvergentní),
2) mající nevlastní limitu,
3) nemající žádnou (ani vlastní ani nevlastní) limitu.

Cvičení 2.2. U následujících posloupností rozhodněte, zda mají nebo nemají limitu (vlastní či nevlastní) a jsou-li monotónní:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ a_n = n^2 \\ 2)\ a_n = -n \\ 3)\ a_n = 1/n \\ 4)\ a_{2n-1} = n,\ a_{2n} = -n \\ 5)\ a_{2n-1} = 1,\ a_{2n} = 1/2^n \end{array}\right\} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

2.4. Základní věty o limitách

VĚTA 2.1. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

DŮKAZ. Nechť má posloupnost a_n, $n \in \mathbb{N}$ dvě různé vlastní limity a, b, $a \neq b$. Položme $\varepsilon_0 = |a-b|/2$. Podle definice limity existují n_0 a $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $|a_n - a| < \varepsilon_0$ pro $n > n_0$, $|a_n - b| < \varepsilon_0$ pro $n > n_1$, a tedy pro $n > n_2 = \max(n_0, n_1)$ platí obě tyto nerovnosti. Ale potom máme

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon_0 = |a-b|\,,$$

což je spor.

V případě, že se jedná o posloupnost reálných čísel, musíme vyloučit ještě možnosti, že jedna nebo obě limity jsou nevlastní. Rozeberme první případ, druhý přenecháváme čtenáři za cvičení. Nechť například je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ a zároveň $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Podle definice limity pak existují n_0 a $n_1 \in \mathbb{N}$, že $|a_n - a| < 1$ pro $n > n_0$ (1 hraje úlohu jednoho ε) a $a_n > a+2$ ($a+2$ hraje úlohu jednoho K). Pro $n > \max(n_0, n_1)$ by pak muselo být $a_n < a+1$ a zároveň $a_n > a+2$, což není možné.

POZNÁMKA 2.11. V reálném případě jsme i v případě dvou vlastních limit mohli uvažovat trochu názorněji: podle první nerovnosti by muselo být pro $a < b$ $a_n < (a+b)/2$ a podle druhé zároveň větší než $(a+b)/2$, což opět není možné. (Nakreslete si obrázek: $(a+b)/2$ je střed intervalu $\langle a, b\rangle$.)

CVIČENÍ 2.3. Proveďte důkaz pro zbylé případy.

VĚTA 2.2. *Nechť pro dvě posloupnosti a_n a b_n, $n \in \mathbb{N}$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$, že*

$$a_n = b_n \text{ pro každé } n > n_1.$$

Potom platí:

a) posloupnost a_n je omezená právě když posloupnost b_n je omezená.

b) posloupnost a_n má limitu a právě když posloupnost b_n má limitu a (a je buď reálné nebo komplexní číslo nebo symbol $+\infty$, $-\infty$).

DŮKAZ. a) Nechť a_n je omezená, tj. pro nějaké $K \in \mathbb{R}$ je $|a_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Je-li $G = \max(|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_{n_1}|)$, pak je zřejmě $|b_n| \leq \max(K, G)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy je b_n omezená.

b) Má-li a_n vlastní limitu a, pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0(\varepsilon)$ tak, že $|a_n - a| < \varepsilon$ pro každé $n > n_0(\varepsilon)$. Je-li $n_2(\varepsilon) = \max(n_0(\varepsilon), n_1)$, je pro $n > n_2(\varepsilon)$ $|b_n - a| = |a_n - a| < \varepsilon$, a tedy je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Protože je postavení posloupností a_n a b_n ve větě rovnoprávné, je věta dokázána (případ nevlastní limity přenecháváme čtenáři za cvičení).

POZNÁMKA 2.12. Tvrzení věty 2.2. můžeme stručně vyjádřit takto: omezenost a limita posloupnosti nezávisí na konečném počtu jejích členů.

DŮSLEDEK 2.1. *Ve většině dalších vět můžeme předpoklad, že něco platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ nahradit předpokladem, že to platí pro všechna $n > n_1$, kde n_1 je nějaké přirozené číslo. Dokonce nemusí být a_n pro konečný počet n ani definováno.*

VĚTA 2.3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, *kde* $b_n = a_n - a$.

Důkaz, který plyne přímo z definice, přenecháváme čtenáři.

VĚTA 2.4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, *kde* $b_n = |a_n|$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$.

DŮKAZ. Stačí si uvědomit, že

$$|a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow |b_n - 0| < \varepsilon.$$

VĚTA 2.5. *Je-li* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *($a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ nebo $\pm\infty$), pak je* $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$, *kde klademe* $|\pm\infty| = +\infty$.

DŮKAZ. Pro $a \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ to plyne z nerovnosti $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ a definice limity. Případ nevlastní limity opět přenecháváme čtenáři.

POZNÁMKA 2.13. Existuje-li $\lim_{n\to\infty} |a_n|$, pak obecně nemusí existovat limita posloupnosti a_n: například pro $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ je $|a_n| = 1$, $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$, zatímco posloupnost a_n limitu nemá (dokažte podrobně – stejně jako v příkladu 2.6.).

2.5. Vztahy mezi omezeností, monotónností a existencí limity

VĚTA 2.6. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

DŮKAZ. Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, pak podle definice limity existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $|a_n - a| < 1$ pro $n > n_1$. Pro taková n je tedy $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a| + |a_n - a| \leq |a| + 1$ a pro $K = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_1}|, |a| + 1)$ je $|a_n| \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

POZNÁMKA 2.14. Opak obecně neplatí: posloupnost $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ je omezená, ale není konvergentní.

Důkaz následující věty, která v jistém smyslu doplňuje větu 2.6. přenecháváme čtenáři za cvičení.

VĚTA 2.6'. *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $(-\infty)$.*Potom je* a_n *omezená zdola (zhora) a není omezená zhora (zdola).*

CVIČENÍ 2.4. Dokažte větu 2.6'.

Následující věta se týká pouze posloupností reálných čísel.

VĚTA 2.7. *Každá monotonní posloupnost reálných čísel má limitu. Tato limita je vlastní právě když je posloupnost omezená. V tomto případě je* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}_1^\infty$ *(* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}_1^\infty$*), je-li* a_n *neklesající (nerostoucí). Tato limita je nevlastní právě když posloupnost je neomezená. V tomto případě je tato limita rovna* $+\infty$ *(*$-\infty$*), je-li posloupnost neklesající (nerostoucí).*

DŮKAZ. a) Nechť a_n je omezená. Potom má supremum G a infimum g. Pro a_n neklesající ukážeme, že je $\lim_{n\to\infty} a_n = G$. (Analogicky se dokáže, že pro a_n nerostoucí je $\lim_{n\to\infty} a_n = g$.) Podle definice suprema platí: 1) $a_n \leq G$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. 2) Je-li $\varepsilon > 0$ libovolné, pak existuje $n_0(\varepsilon)$ tak, že $a_{n_0(\varepsilon)} > G - \varepsilon$. V důsledku monotónnosti je pro $n > n_0(\varepsilon)$ $a_n \geq a_{n_0(\varepsilon)}$, a tedy i $a_n > G - \varepsilon$. Celkem tedy máme

$$G - \varepsilon < a_n \leq G < G + \varepsilon \text{ pro } n > n_0(\varepsilon),$$

tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = G$.

b) Nechť a_n je monotónní a neomezená zhora nebo zdola. První případ může nastat pouze u neklesající posloupnosti, druhý pouze u nerostoucí posloupnosti (neboť je-li a_n neklesající, je $a_n \geq a_1$, a tedy je omezená zdola; analogicky pro nerostoucí posloupnost). Uvažme první případ: a_n neklesající a neomezená zhora.

Protože a_n není zhora omezená, existuje ke každému $K \in \mathbb{R}$ takové $n_0(K) \in \mathbb{N}$, že $a_{n_0(K)} > K$. Poněvadž a_n je neklesající, platí $a_n \geq a_{n_0(K)}$ pro každé $n > n_0(K)$. Celkem tedy máme $a_n \geq a_{n_0(K)} > K$ pro každé $n > n_0(K)$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Případ neklesající posloupnosti přenecháváme za cvičení čtenáři.

Cvičení 2.5. Proveďte důkazy zbylých případů ve větě 2.7.

2.6. Věty o limitě součtu a součinu

Věta 2.8. *Nechť a_n, b_n jsou dvě konvergentní posloupnosti. Potom platí:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n . b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n . \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\gamma a_n) = \gamma . \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *pro každé* $\gamma \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n / b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n / \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, *je-li navíc* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

Důkaz této věty převedeme na následující lemmata, z nichž lemma 2.2. a lemma 2.3. mají samostatný význam.

Lemma 2.1. *Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. *Pak* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = 0$.

Důkaz. Platí $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné pevné. K němu existují $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tak, že $|a_n| < \varepsilon/2$, $|b_n| < \varepsilon/2$ pro $n > n_0(\varepsilon)$, resp. $n > n_1(\varepsilon)$. Je-li tedy $n_2(\varepsilon) = \max(n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon))$, dostáváme

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \text{ pro } n > n_2(\varepsilon).$$

LEMMA 2.2. *Je-li* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *a* b_n *je omezená posloupnost, pak je* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$.

DŮKAZ. Nechť $K \in \mathbb{R}$ je takové, že $|b_n| \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak je $|a_n b_n| \leq K\,|a_n|$. Volíme-li $n_1(\varepsilon)$ tak, aby $|a_n| < \varepsilon/K$ pro $n > n_1(\varepsilon)$ (takové $n_1(\varepsilon)$ existuje podle definice 2.4.), pak pro každé $n > n_1(\varepsilon)$

$$|a_n b_n| \leq K\,|a_n| < K\varepsilon/K = \varepsilon.$$

POZNÁMKA 2.15. Při důkazu tohoto lemmatu jsme mohli uvažovat i takto: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0(\varepsilon)$ tak, že pro $n > n_0(\varepsilon)$ je $|a|_n < \varepsilon$. Potom bychom dostali, že pro $n > n_0(\varepsilon)$ je $|a_n b_n| < K\varepsilon$. Tedy ke každému číslu tvaru $K\varepsilon$ jsme našli $n_0(\varepsilon)$, že platí $|a_n b_n| < \varepsilon K$ pro $n > n_0(\varepsilon)$. Probíhá-li ε všechna kladná čísla, pak je probíhá i $K\varepsilon$. Tuto úvahu použijeme v dalším častěji, abychom si zjednodušili konstrukci příslušného $n_0(\varepsilon)$.

LEMMA 2.3. *Nechť* a_n, $n \in \mathbb{N}$ *je posloupnost reálných čísel,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ *a* $p, q \in \mathbb{R}$ *jsou taková, že* $p < a < q$. *Pak existuje* $n_0(p,q) \in \mathbb{N}$ *tak, že pro každé* $n > n_0(p,q)$ *je* $p < a_n < q$. *Speciálně pro*

$a > 0$ *je* $a_n > a/2 > 0$,
$a < 0$ *je* $a_n < a/2 < 0$,
$a \neq 0$ *je* $|a_n| > |a|/2 > 0$

pro $n > n_0$ *dost velké. Poslední tvrzení platí i pro posloupnosti komplexních čísel.*

POZNÁMKA 2.16. Tvrzení speciálních případů lemmatu 2.3. je možné stručně vyslovit takto: je-li limita posloupnosti kladná (záporná, nenulová), pak jsou také všechny členy posloupnosti od jistého indexu n_0 kladné (záporné, nenulové).

DŮKAZ. Položme $\varepsilon_0 = \min\{q-a,\, a-p\}$. Pak existuje $n_1(\varepsilon_0)$ tak, že pro $n > n_1(\varepsilon_0)$ je $a - \varepsilon_0 < a_n < a + \varepsilon_0$, a tedy

$$p = a - (a-p) \leq a - \varepsilon_0 < a_n < a + \varepsilon_0 \leq a + (q-a) = q.$$

Speciální případy dostaneme pro $p = a/2$ resp. $q = a/2$ resp. $p = |a|/2$ (v posledním případě uvažujeme posloupnost $|a_n|$, která má podle věty 2.5. limitu $|a|$).

LEMMA 2.4. *Nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0, b \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ $b_n \neq 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *. Potom je* $\lim\limits_{n\to\infty} 1/b_n = 1/b$.

DŮKAZ. Platí
$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n|\,|b|};$$
podle lemmatu 2.3. existuje n_1 tak, že pro každé $n > n_1$ je $|b_n| \geq |b|/2$. Pro $n > n_1$ je tedy
$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{2}{|b|^2}\,|b_n - b|\,.$$
Podle definice limity ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0(\varepsilon)$ tak, že $|b_n - b| < \varepsilon$ pro každé $n > n_0(\varepsilon)$. Tedy pro každé $n > n_2(\varepsilon) = \max\{n_1, n_0(\varepsilon)\}$ je $|1//b_n - 1/b| < 2\varepsilon/\,|b|^2$.

POZNÁMKA 2.17. Toto lemma platí i bez předpokladu, že $b_n \neq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ v následujícím smyslu: posloupnost $1/b_n$ je obecně definována ne pro všechna $n \in \mathbb{N}$, ale jen pro dost velká, například pro $n > n_1$.

DŮKAZ VĚTY 2.8. Stačí použít větu 2.3, lemmata 2.1. – 2.4. a následující rovnosti:
$$(a_n + b_n) - (a + b) = (a_n - a) + (b_n - b),$$
$$(a_n b_n - ab) = (a_n - a)b_n + (b_n - b)a,$$
$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}.$$

Následující lemmata se týkají posloupností reálných čísel, které mohou mít i nevlastní limity. Opět některé z nich mají samostatný význam, nezachycený ve větě 2.8'. dále.

LEMMA 2.5. *Je-li posloupnost* a_n, $n \in \mathbb{N}$ *omezená zdola (zhora) a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ $(-\infty)$, *pak je* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$ $(-\infty)$.

DŮKAZ. provedeme pro první případ. Nechť $L \in \mathbb{R}$ je takové, že $a_n > L$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom je $a_n + b_n \geq b_n + L$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ .Podle definice 2.5. ke každému $K \in \mathbb{R}$ existuje $n_1(K) \in \mathbb{N}$ tak, že $b_n > K - L$ pro $n > n_1(K)$. Pro taková n je ovšem $a_n + b_n \geq L + b_n > L + K - L = K$.

LEMMA 2.6. *Je-li* $a_n \geq \alpha > 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty\ (-\infty)$, *pak je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty\ (-\infty)$.

Je-li $a_n \leq \beta < 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty\ (-\infty)$, *pak je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty\ (+\infty)$.

Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty\ (-\infty)$, *pak je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty\ (\mp\infty)$.

DŮKAZ. Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, pak pro všechna $n > n_1$ je $b_n > 0$, a tedy $a_n b_n \geq \alpha b_n$ pro tato n. Volíme-li nyní ke každému $K \in \mathbb{R}$ $n_2(K) \in \mathbb{N}$ tak, aby pro $n > n_2(K)$ bylo $b_n > K/\alpha$, dostaneme $a_n b_n \geq \alpha b_n > K$ pro každé $n > n_0(K) = \max\{n_1, n_2(K)\}$. Ostatní případy se dokazují analogicky. Stačí si jen navíc uvědomit, že z $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty\ (-\infty)$ plyne $b_n > 1$ ($b_n < -1$) pro $n > n_1$. Přenecháváme je proto čtenáři za cvičení.

LEMMA 2.7. *Nechť je* $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$ *(speciálně* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$*),* $b_n \neq 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ [2]. *Potom je* $\lim\limits_{n\to\infty} 1/b_n = 0$.

DŮKAZ. Platí zřejmě $|1/b_n| < \varepsilon \Leftrightarrow |b_n| > 1/\varepsilon$ pro $\varepsilon > 0$. Ale podle definice 2.5. ke každému $1/\varepsilon$ existuje $n_0(\varepsilon)$ takové, že pro každé $n > n_0(\varepsilon)$ je $|b_n| > 1/\varepsilon$. Je tedy $\lim\limits_{n\to\infty} 1/b_n = 0$.

Důkaz následujícího lematu přenecháváme za cvičení čtenáři:

LEMMA 2.8. *Je-li* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, $b_n > 0$ *(*$b_n < 0$*) pro každé* $n \in \mathbb{N}$, *pak platí* $\lim\limits_{n\to\infty} 1/b_n = +\infty\ (-\infty)$.

Abychom přehledně zapsali výsledky, obsažené v lemmatech 2.5. – 2.8, rozšíříme $\mathbb{R}$ o symboly $+\infty$, $-\infty$ a zavedeme pro ně uspořádání a aritmetické operace (kromě jistých výjimek).

DEFINICE 2.6. Označíme $\mathbb{R}^*$ množinu $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ a pro každé

---

[2] Viz poznámka 2.17

$a \in \mathbb{R}$ definujme

$$
\begin{gathered}
-\infty < a < +\infty, \\
a \pm \infty = \pm\infty, \\
a.(\pm\infty) = \pm\infty \text{ pro } a > 0, \\
a.(\pm\infty) = \mp\infty \text{ pro } a < 0, \\
a/(\pm\infty) = 0, \\
(\pm\infty)/b = \pm\infty \text{ pro } b > 0, \\
(\pm\infty)/b = \mp\infty \text{ pro } b < 0, \\
|\pm\infty| = +\infty, \\
+\infty + \infty = +\infty, \ -\infty - \infty = -\infty, \\
+\infty(\pm\infty) = \pm\infty, \ (-\infty)(\pm\infty) = \mp\infty.
\end{gathered}
$$

Poznámka 2.18. Nedefinujeme $0.(\pm\infty)$, $+\infty + (-\infty)$, $\pm\infty / \pm \infty$, $a/0$ pro $a \in \mathbb{R}^*$.

Nyní můžeme zformulovat a dokázat větu, které v reálném případě zobecňuje větu 2.8. na případ i nevlastních limit:

Věta 2.8'. *Nechť a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Potom platí*

$$
\begin{aligned}
&a) \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n, \\
&b) \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n), \\
&c) \lim_{n\to\infty} a_n/b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)/(\lim_{n\to\infty} b_n),
\end{aligned}
$$

pokud pravé strany jsou v $\mathbb{R}^*$ definovány;

c') *je-li $b_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ (< 0), pak* $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = +\infty$ $(-\infty)$,

c'') *je-li $b_n < 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ (< 0), pak* $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = -\infty$ $(+\infty)$,

d) *je-li $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $b_n \neq 0$, b_n je pro nekonečně mnoho indexů kladné a pro nekonečně mnoho indexů záporné, pak posloupnost a_n/b_n nemá limitu.*

Poznámka 2.19. Předpoklad $b_n \neq 0$ jsme mohli ve větě 2.8.d) a ve větě 2.8'.c) vynechat, neboť z předpokladu $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ plyne $b_n \neq 0$ pro $n > n_1$ a limita nezávisí na konečném počtu členů posloupnosti; srvn. poznámku 2.17.

Poznámka 2.20. Věty 2.8. a 2.8'. neříkají nic o tzv. *neurčitých výrazech* tupu $+\infty + (-\infty)$, $0.(\pm\infty)$, $0/0$, ∞/∞. V těchto případech totiž nelze určit limitu součtu, součinu a podílu pouze podle limit obou posloupností (viz příklady 2.8.).

Důkaz věty 2.8'. Jsou-li limity obou posloupností vlastní, je to věta 2.8. Je-li aspoň jedna z limit nevlastní, pak případ a) plyne z lemmatu 2.5, případ b) z lemmatu 2.6, případy c), c') a c") z lemmat 2.7. a 2.8. a případu b). Dokažme ještě d). Nechť $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$, $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$ jsou rostoucí posloupnosti přirozených čísel, pro něž je $b_{k_i} > 0$, $b_{l_i} < 0$, $i \in \mathbb{N}$. Potom posloupnosti $\alpha_n = a_{k_n}/b_{k_n}$ resp. $\beta_n = a_{l_n}/b_{l_n}$ mají podle c') resp. c") limitu $+\infty$ resp. $-\infty$, a tedy podle věty 2.11. dále posloupnost a_n/b_n nemůže mít limitu.

Příklady 2.8.

a) $a_n = n$, $b_n = -n + k$, $n \in \mathbb{N}$, kde k je pevné reálné číslo. Potom je $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ a $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = k$. Pro různá k jsou tedy tyto limity různé a nelze je určit pouze ze znalosti $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{n\to\infty} b_n$, které jsou pro všechna k rovné $+\infty$ resp. $-\infty$. Jde o neurčitý výraz $+\infty + (-\infty)$.

b) $a_n = n$, $b_n = 1/kn$, kde $k \neq 0$ je pevné reálné číslo. Potom je $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1/k$. Jde o neurčitý výraz $0.(+\infty)$.

c) $a_n = n$, $b_n = kn$, kde $k > 0$. Pak je $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ a $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1/k$. Jde o neurčitý výraz typu ∞/∞.

d) $a_n = 1/n$, $b_n = 1/kn$, kde $k > 0$. Potom je $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = k$. Jde o neurčitý výraz $0/0$.

e) $a_n = 1$, $b_n = (-1)^n/n$. Potom je $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, ale posloupnost a_n/b_n nemá limitu podle věty 2.11. dále (viz též příklad 2.6.).

Tyto příklady ukazují, že předpoklady věty 2.8'. jsou podstatné.

Poznámka 2.21. V konkrétních příkladech není pochopitelně posloupnost zapsána jako součet, součin resp. podíl posloupností, jejichž limitu známe, je třeba nejdříve provést vhodné úpravy, jejichž výběr je součástí úlohy.

Příklad 2.9. $a_n = \frac{5n^2-n+1}{2n^2+n+3}$, $n \in \mathbb{N}$. Položme $\alpha_n = 5n^2 - n + 1$, $\beta_n = 2n^2 + n + 3$ a ukažme nejdříve, že $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = +\infty$. $\alpha_n = n^2(5 - 1/n + 1/n^2)$. Závorka má limitu $5 > 0$, n^2 má limitu $+\infty$. Podle bodu b) věty 2.8'. je $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$. Pro β_n se důkaz provede analogicky. Nemůžeme tedy použít přímo větu 2.8'. Vydělíme-li však čitatele i jmenovatele n^2, dostaneme

$$a_n = \frac{5 - 1/n + 1/^2}{2 + 1/n + 3/n^2}.$$

Nyní již je limita čitatele a jmenovatele 5 resp. 2 a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5/2$ (podle věty 2.8.).

Příklad 2.10. $a_n = \frac{n^4-n^2}{n^3+2}$. Snadno se přímo z definice dokáže, že $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$ pro $k \in \mathbb{N}$. Jmenovatel má podle věty 2.8'. limitu $+\infty$. Ukážeme, že i čitatel má limitu $+\infty$ (jde o neurčitý výraz $+\infty + (-\infty)$). K tomu stačí napsat rovnost $n^4 - n^2 = n^4(1 - 1/n^2)$ a použít větu 2.8'. Celkově tedy jde opět o neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$. Dělíme-li ovšem čitatel i jmenovatel n^3, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n - 1/n}{1 + 2/n^3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n - \lim\limits_{n\to\infty} 1/n}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} 2/n^3} = +\infty.$$

Cvičení 2.6. Nechť $P(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$, $Q(x) = \sum_{j=0}^{p} b_j x^j$, $a_m \neq 0$, $b_p \neq 0$, a_j, $b_j \in \mathbb{R}$ jsou dva mnohočleny s reálnými koeficienty. Ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } p > m, \\ \dfrac{a_p}{b_p} & \text{pro } p = m, \\ +\infty & \text{pro } p < m,\ a_m b_p > 0, \\ -\infty & \text{pro } p < m,\ a_m b_p < 0. \end{cases}$$

NÁVOD. Dělte čitatele i jmenovatele výrazem n^p.

POZNÁMKA 2.22. Případ $0.(\infty)$ se dá vždy převést na případ $\frac{0}{0}$ a někdy i na případ $\frac{\infty}{\infty}$: je-li totiž $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1/b_n = 0$ a $a_n b_n = \frac{a_n}{1/b_n} = \frac{a_n}{\beta_n}$, což je výraz typu $\frac{0}{0}$; je-li $a_n > 0$ ($a_n < 0$) pro každé n, pak posloupnost $\alpha_n = 1/a_n$ má limitu $+\infty$ ($-\infty$) a dostáváme $a_n b_n = \frac{b_n}{1/a_n} = \frac{b_n}{\alpha_n}$, tj. výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$.

CVIČENÍ 2.7. Dokažte, že

$$1)\ \lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{pro } a > 1, \\ 0 & \text{pro } a \in (0,1), \end{cases}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} n! = +\infty,$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty} n^k/a^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \in \mathbb{Z},\ a > 1, \\ \infty & \text{pro } k \in \mathbb{Z},\ a \in (0,1), \end{cases}$$

$$4)\ \lim_{n\to\infty} a^n/n! = 0 \text{ pro } a \in \mathbb{R}.$$

2.7. Limitní přechod v nerovnosti

V tomto oddílu budeme uvažovat pouze posloupnosti reálných čísel.

VĚTA 2.9. *Nechť posloupnosti a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$ mají limity (vlastní či nevlastní). Je-li $a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$* [3]*, pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

DŮKAZ. Kdyby byla $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, pak by existovalo $q \in \mathbb{R}$, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > q > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Podle lemmatu 2.3. (resp. podle definice limity v případě, že některá z limit je nevlastní) by existovalo $\tilde{n} \in \mathbb{N}$, že pro $n > \tilde{n}$ je $a_n > q$, $b_n < q$, a tedy $a_n > b_n$, což je spor s předpokladem $a_n \leq b_n$.

POZNÁMKA 2.23. I když pro členy posloupnosti platí ostré nerovnosti, nemusí se ostrá nerovnost v limitě zachovat, jak ukazuje příklad $a_n = 1 - 1/n$, $b_n = 1 + 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, kdy obě limity jsou si rovny (jsou rovny 1) přestože $a_n < b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

---

[3] Opět stačí, aby tato nerovnost platila pro všechna n od jistého n_1 počínaje.

DŮSLEDEK 2.2. *Z této věty dostáváme jiný důkaz jednoznačnosti limity posloupnosti reálných čísel: kdyby* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *a zároveň* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$*, pak podle věty 2.9. musí být jak* $a \le b$*, tak i* $b \le a$*, a tedy* $a = b$*.*

Věta 2.9. nám říká, že při limitním přechodu v nerovnosti se znaménko v nerovnosti pro limity zachová, anebo se změní v rovnost. Následující věta nám ze znalostí limit dvou posloupností umožní najít limitu další posloupnosti.

VĚTA 2.10. *Jsou-li* a_n*,* b_n*,* c_n *tři posloupnosti, pro něž platí*

1) $a_n \le c_n \le b_n$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *,*
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \in \mathbb{R}$*,*

potom také posloupnost c_n *má limitu rovnou* a*.*

DŮKAZ dostaneme snadno z definice limity: Předpokládejme, že $a \in \mathbb{R}$ (případ nevlastní limity přenecháváme čtenáři za cvičení). Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0(\varepsilon)$ tak, že je $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ a zároveň $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$ pro každé $n > n_0(\varepsilon)$ (viz předpoklad 2)). Podle předpokladu 1) je pak

$$a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon$$

pro tatáž n, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

CVIČENÍ 2.8. Dokažte, že platí

1) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $c_n \ge a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$.
2) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, $c_n \le b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$.

PŘÍKLAD 2.11. Nechť $c_n = \frac{\sin n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je $0 \le |c_n| \le 1/n$. Položíme-li $a_n = 0$, $b_n = 1/n$, pak podle věty 2.10. je $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n| = 0$ a podle věty 2.4. také $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Jiný důkaz je možné provést pomocí lemmatu 2.2. (proveďte podrobně).

2.8. Vybrané posloupnosti

DEFINICE 2.7. Nechť a_n, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost prvků z množiny M a $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom posloupnost $b_n = a_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$ nazýváme *vybranou* posloupností z posloupnosti a_n.

PŘÍKLAD 2.12. Je-li $k_1 = 1, k_2 = 3, \ldots, k_n = 2n-1, \ldots$ a a_n je posloupnost $1, 0, 1/2, 1/2, 1/3, 2/3, 1, 4, 3/4,$ (viz příklad 2.6.), potom příslušná vybraná posloupnost je $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$.

POZNÁMKA 2.24. Požadavek, že posloupnost k_n v definici 2.7. je rostoucí je podstatný. Kdybychom například položili pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ $k_n = n_0$, $n \in \mathbb{N}$, pak by příslušná posloupnost b_n byla stacionární: $b_n = a_{n_0}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. O ní pochopitelně nemá smysl říkat, že je vybranou posloupností z posloupnosti a_n (srovnej také s větou 2.11. dále).

POZNÁMKA 2.25. Je-li k_n, $n \in \mathbb{N}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel, je zřejmě $k_n \geq n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Platí následující užitečná věta:

VĚTA 2.11. *Má-li číselná posloupnost a_n, $n \in \mathbb{N}$ limitu a (vlastní či nevlastní), pak každá posloupnost z ní vybraná má také limitu a.*

DŮKAZ. Použijeme opět pouze definice a poznámku 2.25. Omezíme se na případ vlastní limity (případ nevlastní limity přenecháváme čtenáři k rozmyšlení). Podle definice limity je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tak, že pro $\forall n > n_0(\varepsilon)$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. Je-li nyní $b_n = a_{k_n}$, pak podle poznámky 2.25. je $k_n \geq n$, a tedy platí $|b_n - a| = |a_{k_n} - a| < \varepsilon$ pro $\forall n > n_0(\varepsilon)$.

POZNÁMKA 2.26. Této věty lze užít jak pro důkaz existence limity, tak pro důkaz neexistence limity:

1) přímo: známe-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, pak okamžitě najdeme limitu každé posloupnosti vybrané z posloupnosti a_n.

1a) přímo: víme-li, že posloupnost a_n má limitu a je-li limita nějaké z ní vybrané posloupnosti rovna a, pak je rovna a i limita posloupnosti a_n.

2) nepřímo: podaří-li se nám z nějaké posloupnosti vybrat dvě vybrané posloupnosti, které mají různé limity, potom původní posloupnost

nemá žádnou limitu. Na základě této věty lze také snadno konstruovat posloupnosti, které nemají limitu.

CVIČENÍ 2.9. Dokažte pomocí věty 2.11, že posloupnost z příkladu 2.6. nemá limitu a porovnejte obtížnost obou postupů.

Vzniká otázka, zda z každé posloupnosti lze vybrat posloupnost, která má limitu. Uvážíme zvlášť omezené a neomezené posloupnosti.

VĚTA 2.12. *Z každé neomezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat posloupnost, která má nevlastní limitu.*

DŮKAZ. Nechť pro určitost posloupnost a_n není omezená zhora. Sestrojíme-li rostoucí posloupnost přirozených čísel k_n tak, že $a_{k_n} \geq n$, pak bude věta dokázána (stačí použít cvičení 2.8.). Ponevadž a_n není zhora omezená, existuje $k_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{k_1} \geq 1$. Jestliže jsme už našli $n - 1$ čísel $k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-1}$, že platí $a_{k_i} \geq i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$, pak nutně musí existovat $k_n \in \mathbb{N}$, které má následující vlastnosti: 1) $k_n > k_{n-1}$, 2) $a_{k_n} \geq n$. Kdyby totiž pro všechna $k > k_{n-1}$ bylo $a_k < n$, pak by posloupnost a_n byla omezená zhora (například číslem $\max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{k_{n-1}}|, n\}$), což není pravda. Tím je důkaz (indukcí) zakončen.

K důkazu podobné věty pro omezené posloupnosti budeme potřebovat následující

LEMMA 2.9 (o posloupnosti vložených intervalů). *Mějme posloupnost uzavřených omezených intervalů $\langle a_1, b_1\rangle$, $\langle a_2, b_2\rangle$, $\ldots$, $\langle a_n, b_n\rangle$, $\ldots$, pro něž platí $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ (tj. $\langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle \subset \langle a_n, b_n\rangle$) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom posloupnosti a_n a b_n mají limity $a \in \mathbb{R}$ resp. $b \in \mathbb{R}$ a platí: $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $\langle a, b\rangle = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \langle a_i, b_i\rangle$. Je-li navíc $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$, je $a = b$.*

DŮKAZ. Posloupnosti a_n, b_n jsou omezené a monotónní, a mají tedy vlastní limity a resp. b. Podle vět 2.7. a 2.9. je $a_n \leq a \leq b \leq b_n$, a tedy $\langle a, b\rangle \subset \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \langle a_i, b_i\rangle$. Opačná inkluze se dokáže nepřímo pomocí lemmatu 2.3.: kdyby existovalo $q \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \langle a_i, b_i\rangle$, které není v $\langle a, b\rangle$, pak by muselo být buď $q < a$ nebo $q > b$. Podle lemmatu 2.3. by pak v prvním případě muselo být $q < a_i$ pro i dost velká, což je spor s $q \in \langle a_i, b_i\rangle$. Je-li

$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, je podle věty 2.8. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) + \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

VĚTA 2.13 (Weierstrassova). *Z každé omezené posloupnosti reálných nebo komplexních čísel lze vybrat konvergentní vybranou posloupnost.*

DŮKAZ provedeme pro posloupnost *reálných* čísel (důkaz pro posloupnost komplexních čísel viz následující cvičení). Poněvadž posloupnost a_n je omezená, existují reálná čísla A, B tak, že $A \le a_n \le B$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Rozpůlíme-li interval $\langle A, B\rangle$ bodem $(A+B)/2$, potom aspoň v jednom z intervalů $\langle A, \frac{A+B}{2}\rangle$, $\langle \frac{A+B}{2}, B\rangle$ leží členy posloupnosti a_n pro nekonečně mnoho indexů n. Tento interval pak označíme $\langle A_1, B_1\rangle$.[4] Interval $\langle A_1, B_1\rangle$ opět rozpůlíme a označíme $\langle A_2, B_2\rangle$ ten z intervalů $\langle A_1, \frac{A_1+B_1}{2}\rangle$, $\langle \frac{A_1+B_1}{2}, B_1\rangle$, v němž leží a_n pro nekonečně mnoho indexů n.[5] Takto sestrojíme posloupnost intervalů $\langle A_k, B_k\rangle$, $k \in \mathbb{N}$, pro něž platí: 1) $\langle A_k, B_k\rangle \supset \langle A_{k+1}, B_{k+1}\rangle$, 2) $B_k - A_k = (B-A)/2^k$, 3) pro každé $k \in \mathbb{N}$ v $\langle A_k, B_k\rangle$ leží a_n pro nekonečně mnoho indexů n. Můžeme proto vybrat rostoucí posloupnost přirozených čísel k_n, $n \in \mathbb{N}$ takovou, že $a_{k_i} \in \langle A_i, B_i\rangle$ pro každé $i \in \mathbb{N}$ (tj. $A_i \le a_{k_i} \le B_i$). Podle lemmatu 2.9. je $\lim_{i\to\infty} A_i = \lim_{i\to\infty} B_i$; označíme-li jejich společnou hodnotu α, pak je podle věty 2.10. také $\lim_{i\to\infty} a_{k_i} = \alpha$, čímž je věta dokázána.

CVIČENÍ 2.10. Ukažte, že posloupnost komplexních čísel a_n má limitu $a \in \mathbb{C}$ právě když posloupnosti $\operatorname{Re} a_n$ a $\operatorname{Im} a_n$ mají limity $\operatorname{Re} a$ a $\operatorname{Im} a$.

CVIČENÍ 2.11. Dokažte větu 2.13. pro posloupnosti komplexních čísel

NÁVOD.

1) Ukažte, že za předpokladů věty jsou posloupnosti $\operatorname{Re} a_n$ a $\operatorname{Im} a_n$ omezené.
2) Lze tedy (podle věty 2.13. dokázané pro reálné posloupnosti) vybrat posloupnost a_{k_n}, že $\operatorname{Re} a_{k_n} \to \alpha$.
3) Z posloupnosti $\operatorname{Im} a_{k_n}$ lze opět vybrat konvergentní vybranou posloupnost $\operatorname{Im} a_{\tilde{k}_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

[4] Může se stát, že v obou z uvedených intervalů leží členy posloupnosti pro nekonečně mnoho indexů. Pak můžeme vybrat kterýkoli z nich.

[5] viz samozřejmě opět předchozí poznámku pod čarou.

4) Nakonec použijte cvičení 2.10. k důkazu toho, že vybraná posloupnost $a_{\tilde{k}_n}$ je konvergentní.

DEFINICE 2.8. Nechť a_n, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost reálných čísel. Označme $\mathcal{P}(a_n,\, n \in \mathbb{N})$ množinu všech prvků z $\mathbb{R}^*$, které jsou limitou nějaké vybrané posloupnosti z posloupnosti a_n.

Potom platí následující věty, jejichž důkazy najde čtenář například v [D2], kap. 2, §2:

VĚTA 2.14. *Pro každou posloupnost a_n, $n \in \mathbb{N}$ má příslušná množina $\mathcal{P}$ největší a nejmenší prvek v $\mathbb{R}^*$, které označujeme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ (*limes superior a_n *) nebo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, resp. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ (*limes inferior a_n *) nebo $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.*

VĚTA 2.15. *Posloupnost a_n, $n \in \mathbb{N}$ má limitu právě když $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.*

VĚTA 2.16. *Nechť posloupnost a_n, $n \in \mathbb{N}$ je omezená zhora (zdola). Potom platí*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k\}_{k=n}^{\infty})$$
$$(\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\inf\{a_k\}_{k=n}^{\infty})).$$

Není-li posloupnost a_n omezená zhora (zdola), pak je $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ($\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

PŘÍKLAD 2.13. Nechť posloupnost je definována následovně: $a_{3k-2} = k$, $a_{3k-1} = 1/k$, $a_{3k} = 1 + 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, tj. jde o posloupnost

$$1, 1, 2, 2, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, \dots$$

Potom je $\mathcal{P}(a_n,\, n \in \mathbb{N}) = \{0, 1, +\infty\}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Plyne to z toho, že každá konvergentní vybraná posloupnost je taková, že obsahuje nekonečně mnoho členů z jedné a pouze konečný počet členů z druhých dvou z posloupností $\alpha_k = k$, $\beta_k = 1/k$, $\gamma_k = 1 + 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, které mají limity $+\infty$, 0, 1.

CVIČENÍ 2.12. Ukažte, že pro posloupnost $0, 1, 0, 1/2, 1, 0, 1/4, 2/4, 3/4, 1, \dots, 0, 1/2^n, 2/2^n, 3/2^n, \dots, (2^n - 1)/2^n, 1, \dots$ je $\mathcal{P} = \langle 0, 1 \rangle$.

CVIČENÍ 2.13. Ukažte, že platí:

1) Mají-li posloupnosti a_{2n-1} a a_{2n} stejnou limitu, pak má (tutéž) limitu i celá posloupnost a_n.
2) Analogicky pro posloupnosti a_{3n-2}, a_{3n-1}, a_{3n}.

2.9. Bolzanova-Cauchyova podmínka konvergence

Definice 2.4. nám říká, kdy nějaké číslo a je limitou dané posloupnosti a_n, $n \in \mathbb{N}$. Abychom zjistili přímo z definice, zda daná posloupnost má limitu, museli bychom v podstatě přebrat všechna čísla a zkoumat, zda některé z nich není její limitou. Následující nutná a postačující podmínka charakterizuje konvergentní posloupnosti pouze na základě chování jejich členů.

VĚTA 2.17 (Bolzanova-Cauchyova). *Posloupnost a_n, $n \in \mathbb{N}$ reálných nebo komplexních čísel je konvergentní tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n > n_0(\varepsilon)$ a každé $m > n_0(\varepsilon)$ platí $|a_n - a_m| < \varepsilon$* (Bolzanova-Cauchyova podmínka).

DŮKAZ rozdělíme na tři lemmata:

LEMMA 2.10. *Je-li posloupnost a_n, $n \in \mathbb{N}$ konvergentní, pak splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

DŮKAZ. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0(\varepsilon)$ tak, že $|a_n - a| < \varepsilon/2$ pro každé $n > n_0(\varepsilon)$. Jsou-li tedy m a n větší než $n_0(\varepsilon)$, je $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \le |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

LEMMA 2.11. *Splňuje-li posloupnost a_n, $n \in \mathbb{N}$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, pak je omezená.*

DŮKAZ. Podle B.-C. podmínky existuje $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n, m > \tilde{n}$ je $|a_n - a_m| < 1$, a tedy pro každé $n > \tilde{n}$ je $|a_n| \le |a_n - a_{\tilde{n}+1}| + |a_{\tilde{n}+1}| \le 1 + |a_{\tilde{n}+1}|$ a stačí užít větu 2.2.

Lemma 2.12. *Splňuje-li posloupnost a_n, $n \in \mathbb{N}$ B.-C. podmínku, pak je konvergentní.*

Důkaz. Podle lemmatu 2.11. je posloupnost a_n, $n \in \mathbb{N}$ omezená, a tedy podle věty 2.13. lze z ní vybrat konvergentní vybranou posloupnost – označme ji a_{k_n}, $n \in \mathbb{N}$. Je-li a její limita, ukažme, že také celá posloupnost má limitu a. Platí totiž

$$|a_n - a| = |a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a|$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Poněvadž je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takové $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, že pro $n > n_0(\varepsilon)$ je $|a_{k_n} - a| < \varepsilon/2$. Podle B.-C. podmínky k tomuto ε existuje $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tak, že $|a_n - a_{k_n}| < \varepsilon/2$ pro $n > n_1(\varepsilon)$ (díky $k_n \geq n$). Je proto pro $n > \tilde{n} = \max\{n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon)\}$ $|a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 2.14. $a_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$, $n \in \mathbb{N}$. Poněvadž je

$$a_{2^n} - a_{2^{n-1}} = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^n} 2^{n-1} = \frac{1}{2},$$

nemůže pro $\varepsilon = 1/4$ existovat příslušné $n_0(\varepsilon)$ z B.-C. podmínky. Posloupnost a_n není proto konvergentní.. Protože je rostoucí ($a_{n+1} = a_n + 1/(n+1) > a_n$), je její limita rovná $+\infty$.

Poznámka 2.27. Ke konvergenci posloupnosti nestačí, aby každé dva po sobě jdoucí členy posloupnosti byly blízké (tj. aby $a_{n+1} - a_n$ bylo dost malé pro každé $n > \tilde{n}$ (dost velké)), což je například u posloupnosti z příkladu 2.14. splněno. Je třeba, aby se málo od sebe lišily libovolné dva členy posloupnosti s dost velkým indexem.

Cvičení 2.14. (Jiný tvar B.-C. podmínky.) Posloupnost a_n, $n \in \mathbb{N}$ je konvergentní$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $\forall n > n_0$ a pro $\forall p \in \mathbb{N}$ platí $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$.

2.10. Číslo e

Ukážeme zde jeden z možných zavedení čísla e – základu tzv. přirozených logaritmů, jehož užitečnost je však daleko širší.

Příklad 2.15. Posloupnost $a_n = (1 + 1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}$ je omezená a rostoucí, neboť platí

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{n^i} = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!}\frac{1}{n^i} + \cdots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n} =$$
$$= 2 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\dots(1 - \frac{k-1}{n}) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\dots(1 - \frac{n-1}{n}).$$

$$a_{n+1} =$$
$$= 2 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n+1}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1})\dots(1 - \frac{k-1}{n+1}) +$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1})\dots(1 - \frac{n-1}{n+1}) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}(1 - \frac{1}{n+1})\dots(1 - \frac{n}{n+1}).$$

Poněvadž je $1 - j/n \leq 1 - j/(n+1)$ pro $j = 1, 2, \dots, n-1$, je $a_{n+1} \geq a_n$. Nahradíme-li ve výrazu pro a_n všechny závorky 1, dostaneme

$$a_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq$$
$$1 + (1 - \frac{1}{2^n})/(1 - \frac{1}{2}) \leq 1 + 2 = 3.$$

Použili jsme nerovnosti $n! \geq 2^{n-1}$, která platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ (dokažte). Posloupnost je tedy monotónní a omezená a má proto podle věty 2.7. vlastní limitu.

Definice 2.9. Limitu posloupnosti z příkladu 2.16. označujeme e.

Příklad 2.16. Nechť $b_n = (1+1/n)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom je b_n klesající a omezená zdola a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$. Poslední plyne z $b_n = (1+1/n)a_n$ pomocí věty 2.8. a definice 2.9. Ukažme, že b_n je klesající. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \frac{n+1}{n} \Leftrightarrow \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1+\frac{1}{n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1+\frac{1}{n}.$$

Podle binomické věty je $(1+h)^k > 1+kh$ pro $k \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, a platí tedy

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1+\frac{n+2}{n(n+2)} = 1+\frac{1}{n}.$$

Příklad 2.17. Nechť $y_n = 1 + 1/1! + \cdots + 1/n!$, $n \in \mathbb{N}$. Ukažme, že je $a_n \le y_n \le e$, kde a_n je posloupnost z příkladu 2.15, a tedy platí $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$. V příkladu 2.15. jsme ukázali, že $a_n \le y_n < 3$. Je tedy y_n omezená, a protože je zřejmě rostoucí, má vlastní limitu. Označme ji γ. Limitním přechodem v nerovnosti $a_n \le y_n$ dostáváme $e \le \gamma$. Je-li ovšem $n \ge k$, je

$$a_n \ge 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n}).$$

Přejdeme-li při pevném k k limitě pro $n \to \infty$, dostaneme $e \ge 2+1/2!+ \cdots + 1/k! = y_k$. Limitním přechodem pro $k \to \infty$ dostanem odtud $e \ge \gamma$, a tedy $e = \gamma$.

Poznámka 2.28. Posloupnost y_n je pro přibližný výpočet čísla e výhodnější, než posloupnosti a_n a b_n z příkladů 2.15. a 2.16. Dá se ukázat odhad

$$e - y_n \le 2/(n+1)!$$

(viz též příklad 5.23. v kapitole 5. dále). Přibližně je $e = 2,718282$.

KAPITOLA 3

FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ
LIMITA, SPOJITOST

3.1. Funkce. Definice a příklady

V této a následujících kapitolách se budeme zabývat dalším důležitým typem zobrazení – *reálnými* nebo *komplexními funkcemi jedné reálné proměnné*. Platí proto pro ně všechny obecné pojmy a vlastnosti zobrazení. Pro úplnost je zde uvedeme znovu, což zvláště pro ty, kteří si v kapitole 1. přečetli i řádky psané petitem, bude jistým opakováním. Na druhé straně budeme studovat také ty vlastnosti, které jsou specifické pro tento speciální druh zobrazení.

Definice 3.1. *Reálnou (komplexní) funkcí jedné reálné proměnné* rozumíme zobrazení f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Její definiční obor označujeme $\mathcal{D}_f$, obor hodnot $\mathcal{R}_f$. $f(M) = \{y;\, y = f(x),\, x \in M\}$ značíme *obraz množiny* M pomocí funkce f. Speciálně je $\mathcal{R}_f = f(\mathcal{D}_f)$.

Poznámka 3.1. Pro stručnost budeme místo reálná (komplexní) funkce jedné reálné proměnné říkat pouze funkce, nebo reálná (komplexní) funkce.

Příklad 3.1. Je-li $\mathcal{D}_f = \mathbb{N}$, jedná se o posloupnost.

Příklad 3.2. $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 3.3. $f(x) = x + 1$, $x \in \langle -1, 1\rangle$.

Příklad 3.4.
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

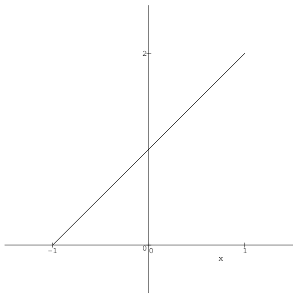
Tato funkce se značí sgn (signum=znaménko). Platí pak $|x| = x \operatorname{sgn} x$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Definice 3.2. *Rovnost* dvou funkcí f a g značí $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$ a $f(x) = g(x)$ pro $x \in \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$. Je-li $\mathcal{D}_f \subset \mathcal{D}_g$ a $f(x) = g(x)$ pro $x \in \mathcal{D}_f$, říkáme, že f je *zúžením g na $\mathcal{D}_f$* a g je *rozšíření f na $\mathcal{D}_g$*. Značíme také $g|_M$ zúžení g na množinu $M \subset \mathcal{D}_g$.

Příklad 3.5. Funkce f z příkladu 3.3. je zúžením na $\langle -1, 1\rangle$ funkce g: $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Definice 3.3. *Grafem* reálné (komplexní) funkce f se nazývá množina $\mathcal{G}_f \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}_2$ $(\mathbb{R}\times\mathbb{C})$[6], definovaná předpisem $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x));\ x \in \mathcal{D}_f\}$, kde $\mathcal{D}_f$ je definiční obor funkce f.

Grafické znázornění reálné funkce v rovině nám dává dobrou představu o chování funkce. Na obr. 3.1. je nakreslen graf funkce z příkladu 3.3: je to úsečka, spojující body $(-1, 0)$ a $(1, 2)$.



Obr. 3.1

Později se naučíme nakreslit přibližně graf následující funkce:

Příklad 3.6. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$,

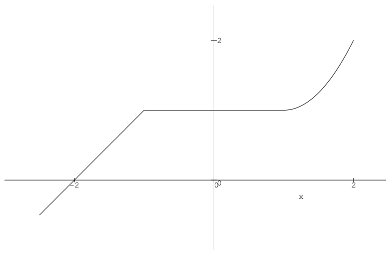
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

[6]Definici kartézského součinu viz oddíl 1.2.

Příklad 3.7. $\mathcal{D}_f = \langle -5/2, 2\rangle$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 + (x-1)^2 & x \in \langle 1, 2\rangle, \\ 1 & |x| \leq 1, \\ 2 + x & x \in \langle -5/2, -1\rangle. \end{cases}$$

Její graf je na obr.3.2.



Obr. 3.2

Zkuste si představit, jak vypadá graf následující funkce:

Příklad 3.8 (Dirichletova funkce). $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ racionální}, \\ 0 & x \text{ iracionální}. \end{cases}$$

Díky tomu, že v $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) je definováno sčítání, násobení, dělení, můžeme definovat součet, součin, podíl dvou funkcí (a také absolutní hodnotu funkce) takto:

Definice 3.4. Nechť f_1 a f_2 jsou dvě funkce. Potom jejich *součtem* $f_1 + f_2$, *rozdílem* $f_1 - f_2$, *součinem* $f_1.f_2$, *podílem* f_1/f_2 nazveme funkce

$$\begin{aligned} (f_1 \pm f_2)(x) &= f_1(x) \pm f_2(x) \ \textit{pro}\ x \in \mathcal{D}_{f_1 \pm f_2} \equiv \mathcal{D}_{f_1} \cap \mathcal{D}_{f_2}, \\ (f_1.f_2)(x) &= f_1(x).f_2(x) \quad \textit{pro}\ x \in \mathcal{D}_{f_1.f_2} \equiv \mathcal{D}_{f_1} \cap \mathcal{D}_{f_2}, \\ (f_1/f_2)(x) &= f_1(x)/f_2(x) \quad \textit{pro}\ x \in \mathcal{D}_{f_1/f_2}, \end{aligned}$$

kde $\mathcal{D}_{f_1/f_2} = \mathcal{D}_{f_1} \cap \mathcal{D}_{f_2} \setminus \{x;\ f_2(x) = 0\}$.
Absolutní hodnotou $|f_1|$ funkce f_1 nazveme funkci definovanou na $\mathcal{D}_{f_1}$ takovou, že $|f_1|(x) = |f_1(x)|$.

PŘÍKLAD 3.9. $\mathcal{D}_f = (0, \infty)$,

$$f(x) = (x \cos x)^{10} + x^4 \log x,\ x \in \mathcal{D}_f.$$

POZNÁMKA 3.2. Komplexní funkci f pak lze zapsat ve tvaru

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$$

kde $\operatorname{Re} f(x)$ a $\operatorname{Im} f(x)$ jsou reálná a imaginární část čísla $f(x)$. Tento fakt umožní mnohé výsledky, dokázané pro reálné funkce přenášet i na komplexní funkce. Funkce $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ nazýváme *reálnou* resp. *imaginární částí* funkce f.

3.2. Složená, prostá a inverzní funkce

DEFINICE 3.5. Je-li f_1 reálná funkce, f_2 reálná nebo komplexní funkce a je-li $M = \{x;\ x \in \mathcal{D}_{f_1},\ f_1(x) \in \mathcal{D}_{f_2}\}$, potom *složenou* funkci $f_2 \circ f_1$ definujeme takto:

$$\mathcal{D}_{f_2 \circ f_1} = M;\ (f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) \text{ pro } x \in M.$$

Funkce f_1 se nazývá *vnitřní*, f_2 *vnější* funkcí složené funkce $f_2 \circ f_1$.

POZNÁMKA 2.3. Je-li dáno n funkcí $f_1, f_2, \ldots, f_n$, je možné za příslušných předpokladů definovat funkci $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$ jako $f_n(f_{n-1}(\ldots(f_2(f_1(x)))))$.

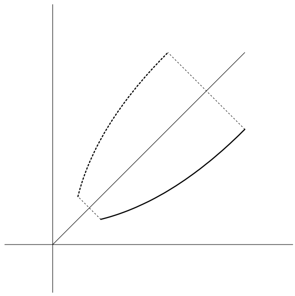
DEFINICE 3.6. Řekneme, že funkce f je *prostá*, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$, $x_1 \neq x_2$ je $f(x_1) \neq f(x_2)$. Řekneme, že f je prostá na množině P, je-li prostá funkce $f|_P$.

POZNÁMKA 3.4. Požadavek prostoty funkce f je možné ekvivalentně vyjádřit takto: z $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

DEFINICE 3.7. Je-li f prostá, pak funkcí k ní *inverzní* nazýváne funkci f^{-1} definovanou takto:

$$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f;\ f^{-1}(y) = x_y,\ \text{je-li } f(x_y) = y \text{ pro } y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}.$$

POZNÁMKA 3.5. Z prostoty funkce f plyne, že x_y v této definici je jediné, a tedy tento předpis opravdu definuje funkci.



Obr. 3.3

Poznámka 3.6. Mohli bychom definovat inverzní funkci také pro komplexní prostou funkci, ale dostali bychom funkci komplexní proměnné, což by vycházelo za rámec těchto skript.

Jsou-li f a f^{-1} prostá reálná funkce a funkce k ní inverzní, pak jejich grafy jsou navzájem k sobě symetrické podle osy prvního kvadrantu (viz obr. 3.3.).

Příklad 3.10. Je-li $f_1(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $f_2(y) = y^2$, $y \in \mathbb{R}$, pak je

$$
\begin{aligned}
(f_2 \circ f_1)(x) &= \sin^2 x = (\sin x)^2, \ x \in \mathbb{R},\\
(f_1 \circ f_2)(x) &= \sin(x^2), \ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Příklad 3.11. Je-li $f_1(x) = 1 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$, $f_2(y) = \sqrt{y}$, $y \in \langle 0, \infty)$, je

$$
\begin{aligned}
(f_2 \circ f_1)(x) &= \sqrt{1 - x^2}, \ x \in \langle -1, 1\rangle,\\
(f_1 \circ f_2)(y) &= 1 - y, \ y \in \langle 0, \infty).
\end{aligned}
$$

Příklad 3.12. Funkce $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ není prostá, ale její zúžení $f_1 = f|_{\langle 0,\infty)}$ a $f_2 = f|_{(-\infty,0\rangle}$ jsou prostá. Jejich obory hodnot jsou stejné jako obor hodnot f: $\langle 0, \infty)$. Je proto $(f_1)^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $(f_2)(x) = -\sqrt{x}$ pro $x \in \langle 0, \infty)$.

3.3. Omezené funkce

DEFINICE 3.8. Řekneme, že funkce f je *omezená* na množině $M \subset \mathcal{D}_f$, je-li omezená množina $f(M)$. Speciálně je f omezená na $\mathcal{D}_f$, je-li $\mathcal{R}_f$ omezená. Je-li f reálná funkce, pak říkáme, že je na M *omezená zhora (zdola)*, je-li $f(M)$ omezená zhora (zdola).

POZNÁMKA 3.7. Každá funkce je omezená na konečné množině.

CVIČENÍ 3.1. Ukažte, že platí: f je omezená na $M \Leftrightarrow |f|$ je omezená na $M \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ tak, že pro $\forall x \in M$ je $|f(x)| \leq K$.

CVIČENÍ 3.2. Ukažte, že reálná funkce f je omezená na M právě když je na M omezená zhora i zdola.

CVIČENÍ 3.3. Ukažte, že f není omezená na $M \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, \exists\, x_n \in M$ tak, že $|f(x_n)| \geq n$ (místo libovolného $K \in \mathbb{R}$) stačí brát pouze $n \in \mathbb{N}$).

PŘÍKLAD 3.13. Je-li $f(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, pak f není omezená na $\mathbb{R}$ (dokažte), ale je omezená na každém omezeném intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$, neboť je

$$\left|x^k\right| \leq \max\{\left|a^k\right|, \left|b^k\right|\} \text{ pro } \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

CVIČENÍ 3.4. $f(x) = 1/x^k$, $x \in (0, 1)$, $k \in \mathbb{N}$. Ukažte, že f je na $(0, 1)$ omezená zdola a není tam omezená zhora.

CVIČENÍ 3.5. Je-li f omezená (omezená zhora, zdola) na každém omezeném intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ a přitom stejnou konstantou, pak je omezená (touto konstantou) na $\mathbb{R}$.

CVIČENÍ 3.6. Rozhodněte, na kterých z následujících množin je funkce $f(x) = \log x$, $x \in (0, \infty)$ omezená a na kterých není omezená: $M_1 = (0, 1)$, $M_2 = (1, 2)$, $M_3 = (2, +\infty)$. Analogicky pro funkci $g(x) = x \cos x$, $x \in \mathbb{R}$ a množiny $\mathbb{R}$ a $P_k = \langle -k, k\rangle$.

3.4. Limita a spojitost funkce

Budeme rozlišovat čtyři případy:

1) vlastní limitu ($\in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) v bodě $a \in \mathbb{R}$,
2) vlastní limitu ($\in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) v $+\infty$, $-\infty$,
3) nevlastní limitu ($\pm\infty$) v bodě $a \in \mathbb{R}$,
4) nevlastní limitu ($\pm\infty$) v $+\infty$, $-\infty$,

přičemž dvě poslední jmenované možnosti budeme definovat pouze pro reálné funkce.

Pro zjednodušení vyjadřování zaveďme následující definici:

Definice 3.9. Nechť $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Potom množinu $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ nazveme ε-*okolím* bodu a, množinu $U_\varepsilon^+(a) = \langle a, a+\varepsilon)$ ($U_\varepsilon^-(a) = (a-\varepsilon, a\rangle$) *pravým* (*levým*) ε-*okolím* bodu a a množiny $U_\varepsilon^*(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$, $U_\varepsilon^{*+} = U_\varepsilon^+(a) \setminus \{a\}$, $U_\varepsilon^{*-} = U_\varepsilon^-(a) \setminus \{a\}$ ε-*redukovaným* (*pravým, levým*) *okolím* bodu a.

Pro $K \in \mathbb{R}$ nazveme K -*okolím* (redukovaným) bodu $+\infty$ ($-\infty$) interval $(K, +\infty)$ ($(-\infty, K)$).

Nebude-li záležet na velikosti okolí, budeme ε, K vynechávat.

Definice 3.10. Nechť funkce f je definována na redukovaném okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) je *limitou* funkce f v bodě a a píšeme $\lim\limits_{x\to a} f = A$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta(\varepsilon)$ tak, že pro všechna x taková, že $0 < |x-a| < \delta(\varepsilon)$ je $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Je-li f definována v pravém (levém) redukovaném okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, pak řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ je *limitou* funkce f v bodě a *zprava* (*zleva*) a píšeme $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pro všechna x taková, že $a < x < a + \delta(\varepsilon)$ ($a - \delta(\varepsilon) < x < a$) platí $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Definice 3.11. Nechť funkce f je definována na nějakém okolí bodu $+\infty$ ($-\infty$). Řekneme, že číslo $A \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) je *limitou* funkce f v bodě $+\infty$ ($-\infty$) a píšeme $\lim\limits_{x\to+\infty} f = A$ ($\lim\limits_{x\to-\infty} f = A$), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $K(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $x > K(\varepsilon)$ ($x < K(\varepsilon)$) je $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Definice 3.12. Nechť *reálná* funkce f je definována v redukovaném (pravém, levém) okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v a limitu (zprava, zleva) rovnou $+\infty$ $[-\infty]$, jestliže ke každému $L \in \mathbb{R}$ existuje $\delta(L) > 0$ tak, že pro všechna x splňující $0 < |x - a| < \delta(L)$ ($a < x < a + \delta(L)$, $a - \delta(L) < x < a$) je $f(x) > L$ $[f(x) < L]$. Píšeme pak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $[-\infty]$ (analogicky pro limitu zprava, zleva).

Definice 3.13. Nechť *reálná* funkce f je definována na nějakém okolí $+\infty$. Řekneme, že f má limitu $+\infty$ ($-\infty$) pro x blížící se k $+\infty$, jestliže ke každému $L \in \mathbb{R}$ existuje $K(L) \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $x > K(L)$ je

$f(x) > L$ ($f(x < L)$). Píšeme pak $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $(-\infty)$. Analogicky pro limitu v $-\infty$.

ÚMLUVA. Je-li limita číslo z $\mathbb{R}$, mluvíme o *vlastní* limitě, je-li to $\pm\infty$, pak mluvíme o *nevlastní* limitě.

Použijeme-li pojmu okolí důsledněji, můžeme definice 3.10. – 3.13. zformulovat pro reálný případ jednotně takto:

DEFINICE 3.14. Nechť je $a \in \mathbb{R}^*$ a reálná funkce f je definována na redukovaném okolí bodu a. Potom funkce f má v bodě a limitu $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $U(A)$ bodu A existuje takové redukované okolí $U^*(a)$ bodu a, že pro každé $x \in U^*(a)$ je $f(x) \in U(A)$.

Podobně by se daly spojit definice pro jednostranné limity zprava (zleva). Je třeba si jen uvědomit, že v bodě $+\infty$ $(-\infty)$ jde fakticky o jednostranné limity.

Analogicky by se daly spojit i definice 3.10. a 3.11. i pro komplexní funkce, kdybychom definovali ε-okolí bodu $A \in \mathbb{C}$ jako množinu těch $x \in \mathbb{C}$, že $|x - A| < \varepsilon$.

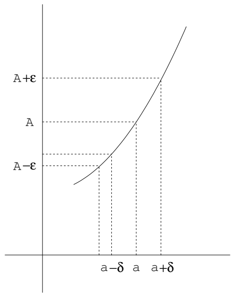
POZNÁMKA 3.8. Definice 3.11. a 3.13. jsou podobné definici limity posloupnosti. Poznámky, které za touto definicí následovaly, je možné vhodně modifikovat i pro definici limity funkce:

POZNÁMKA 3.9. Limita funkce f v bodě a nezávisí na hodnotě funkce v bodě a (funkce v něm nemusí být ani definována) a na hodnotách funkce f v bodech dosti vzdálených od a (limita v bodě je tzv. *lokální* pojem). Limita zleva (zprava) v bodě a nezávisí na hodnotách funkce v pravém (levém) okolí bodu a. Podobně limity v $+\infty$ $(-\infty)$ závisejí pouze na hodnotách $f(x)$ pro x dosti velká (malá).

POZNÁMKA 3.10. Nepřesně je možné říci, že číslo A je limitou funkce f v bodě a, jestliže $f(x)$ je libovolně blízké k A pro x dostatečně blízká k a a různá od a.

POZNÁMKA 3.11. Pro různá ε budou příslušná $\delta(\varepsilon)$ také různá. Obecně pro menší ε bude $\delta(\varepsilon)$ také menší.

POZNÁMKA 3.12. Má-li nějaké číslo $\delta(\varepsilon)$ vlastnost požadovanou v definicích 3.10. a 3.12, pak libovolné číslo $\tilde{\delta} < \delta(\varepsilon)$ má také tuto vlastnost.



Obr. 3.4

Závislost $\delta(\varepsilon)$ na ε ukazuje obrázek 3.4. $\lim_{x\to a} f(x) = A$ znamená, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta(\varepsilon)$ tak, že pro $x \in U^*_{\delta(\varepsilon)}(a)$ leží body $(x, f(x))$ v pásu $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$.

Příklad 3.14. $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažme, že je $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$. Máme k daném $\varepsilon > 0$ najít příslušné $\delta(\varepsilon)$.

Pro $x \in \langle 0, 2\rangle$ platí

$$\left|x^2 - 1\right| = |x-1|\,|x+1| \le 3\,|x-1|\,.$$

Stačí volit $\delta = \min\{\varepsilon/3, 1\}$, aby pro $x \in U^*_\delta(1)$ bylo $\left|x^2 - 1\right| < \varepsilon$.

Příklad 3.15. $f(x) = x^2 + \log x$, $x \in (0, \infty)$. Ukažme, že je $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Pro $x \ge 1$ je $\log x \ge 0$, $x^2 \ge x$, a tedy $f(x) \ge x^2 \ge x$. Pro $L \in \mathbb{R}$ stačí volit $K(L) = \max\{1, L\}$, aby pro $x > K(L)$ bylo $f(x) > L$.

Definice 3.15. Nechť f je definována na nějakém okolí (pravém, levém) bodu $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f je v bodě a *spojitá* (*spojitá zprava, spojitá zleva*), je-li

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\ (\lim_{x\to a+} f(x) = f(a),\ \lim_{x\to a-} f(x) = f(a)).$$

Definice 3.15'. Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu J, je-li spojitá v každém vnitřním bodě intervalu J a spojitá z příslušné strany v těch krajních bodech intervalu J, které k němu patří.

PŘÍKLAD 3.16. Funkce z příkladu 3.14. je spojitá na $\mathbb{R}$. V příkladu 3.14. byla ukázána její spojitost v bodě 1, v ostatních bodech se spojitost dokáže analogicky (proveďte podrobně).

POZNÁMKA 3.13. Spojitost funkce nepřesně znamená, že se její funkční hodnoty v blízkých bodech málo liší.

POZNÁMKA 3.14. Funkce f je v bodě $a \in \mathbb{R}$ spojitá (spojitá zprava, spojitá zleva) tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému ε existuje $\delta(\varepsilon)$ tak, že pro všechna x splňující $0 \leq |x-a| < \varepsilon$ ($a \leq x < a+\delta(\varepsilon)$, $a-\delta(\varepsilon) < x \leq a$) je $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$. Plyne to z definice limity, definice spojitosti a toho, že pro $x = a$ je $f(x)-f(a) = f(a)-f(a) = 0$.

Důkaz následující věty, který plyne snadno přímo z definic, přenecháváme čtenáři za cvičení.

VĚTA 3.1. *Funkce má v bodě a limitu tehdy a jen tehdy, má-li v a obě jednostranné limity a tyto limity jsou stejné. Limita je pak rovna jejich společné hodnotě.*

Funkce je v a spojitá tehdy a jen tehdy, je-li tam spojitá zprava i zleva.

CVIČENÍ 3.7. Vyjádřete podrobně jako v poznámce 2.6. z kapitoly 2. co znamená non($\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$) a co znamená, že f není spojitá v bodě a.

3.5. Souvislost mezi limitou funkce a limitou posloupnosti

Následující věty ukazují, jak se dá charakterizovat limita funkce pomocí limit jistých posloupností.

VĚTA 3.2A (Heineova). *Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^*$. Nechť x_n, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost reálných čísel taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, přičemž $x_n \neq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom je $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.*

VĚTA 3.2B (Heineova). *Nechť pro každou posloupnost x_n, $x_n \to a$, $x_n \neq a$ má posloupnost $f(x_n)$ limitu. Pak limity všech těchto posloupností jsou stejné a jejich společná hodnota je také limitou funkce f v bodě a.*

Často se hodí slabší varianta těchto vět:

DŮSLEDEK 3.1. *Nechť funkce f je definována na redukovaném okolí bodu a. Potom platí*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall x_n,\ x_n \to a,\ x_n \neq a\ f(x_n) \to A \text{ pro } n \to \infty.$$

POZNÁMKA 3.15. Analogická věta platí i pro limity zprava (zleva). Požadavek $x_n \neq a$ je třeba nahradit požadavkem $x_n > a$ ($x_n < a$) pro každé $n \in \mathbb{N}$.

DŮKAZ VĚT 3.2A, 3.2B. Důkaz provedeme pro $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Ostatní případy přenecháváme čtenáři za cvičení. Nechť tedy $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Nechť je dále x_n, $n \in \mathbb{N}$ posloupnost reálných čísel taková, že $x_n \to a$ pro $n \to \infty$, $x_n \neq a$ pro $n \in \mathbb{N}$. Máme dokázat, že $f(x_n) \to A$. Víme, že $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tak, že

$$(*) \qquad |f(x) - A| < \varepsilon \text{ pro } \forall x,\; 0 < |x - a| < \delta.$$

Poněvadž $x_n \to a$, $x_n \neq a$, existuje takové $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $\forall n > n_0$ je

$$(**) \qquad 0 < |x_n - a| < \delta.$$

Z (*) a (**)tedy plyne

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon \text{ pro } \forall n > n_0, \text{ tj. } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Naopak: Nechť $x_n \to a$, $x_n \neq a$, $y_n \to a$, $y_n \neq a$ jsou dvě posloupnosti uvedeného typu. Podle předpokladu existují limity $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ a $\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n)$. Ukažme, že tyto limity jsou stejné. Sestrojme posloupnost z_n, $n \in \mathbb{N}$ následovně: $z_{2k} = y_k$, $z_{2k-1} = x_k$, $k \in \mathbb{N}$. Potom $z_n \to a$, $z_n \neq a$ (dokažte) a podle předpokladu věty posloupnost $f(z_n)$, $n \in \mathbb{N}$ má limitu. Označme ji A. Ale posloupnosti $f(z_{2k}) = f(y_k)$ a $f(z_{2k-1}) = f(x_k)$ jsou z ní vybrané a mají podle věty 2.11. také limitu A. Zbývá dokázat, že $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Kdyby to nebyla pravda, pak zkonstruujeme posloupnost x_n, $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a$ a $x_n \neq a$, pro kterou posloupnost $f(x_n)$ nemá limitu A: Nemá-li f v a limitu A, pak existuje $\varepsilon_0 > 0$ tak, že pro $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n$, $0 < |x_n - a| < 1/n$ a

$$(+) \qquad |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Podle vět 2.3. a 2.10. je $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$; ale z (+) plyne, že $f(x_n)$ nemá limitu A. Obě věty jsou tedy dokázány.

Příklad 3.17. $f(x) = \sin(1/x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ukažme, že tato funkce nemá limitu v 0. Stačí zvolit posloupnosti $x_n = 2/(\pi + 4n\pi)$ a $y_n = 1/n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, které mají limitu 0, $x_n \neq 0$, $y_n \neq 0$, $f(x_n) = 1 \to 1$ a $f(y_n) = 0 \to 0$. Podle věty 3.2. nemá f v 0 limitu.

Cvičení 3.8. Ukažte, že funkce $\sin x$, $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$ nemají pro $x \to \pm\infty$ limitu.

Důsledek 3.2. *Nechť funkce f je definována na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Potom je f spojitá v a tehdy a jen tehdy, jestliže pro každou posloupnost x_n, $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a$ (a to i takovou, že pro některá k je $x_k = a$) má posloupnost $f(x_n)$ limitu $f(a)$.*
Analogické tvrzení platí i pro spojitost zprava (zleva).

Důkaz je snadnou modifikací důkazu vět 3.2a. a 3.2b. Přenecháváme jej čtenáři za cvičení.

3.6. Věty o limitě a spojitosti funkce

Pro limity funkcí platí věty analogické větám a lemmatům z kapitoly 2. o limitách poslouností. Všude je třeba nahradit posloupnost, $n \to \infty$, $n_0(\varepsilon)$ funkcí, $x \to a$, $\delta(\varepsilon)$ apod. Jejich důkazy je možno provádět dvojím způsobem:

a) vhodnou (jednoduchou) modifikací důkazů příslušných vět o posloupnostech,
b) užitím (dvakrát) Heineho vět a vět o posloupnostech.

Pro úplnost zde tyto věty a lemmata zformulujeme a některé z nich dokážeme. Doporučujeme čtenáři, aby si za cvičení tyto důkazy podrobně provedl – případně oběma způsoby. Tyto věty budeme vypisovat pouze pro oboustranné limity, příslušné modifikace na případ jednostranných limit si čtenář snadno provede sám. Pokud nebude řečeno jinak, bude $a \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ nebo $A \in \mathbb{C}$.

Věta 3.3. *Každá funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

Věta 3.4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}(f(x) - A) = 0$, *kde A napravo značí konstantní funkci rovnou A pro všechna $x \in \mathbb{R}$.*

Věta 3.5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} |f|\,(x) = |A|$.

VĚTA 3.6. $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f|(x) = 0.$

VĚTA 3.7. *Nechť* $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$. *Pak existuje redukované okolí* $U^*(a)$, *na němž je* f *omezená.*

VĚTA 3.7'. *Nechť* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\,(-\infty)$. *Pak existuje* $U^*(a)$, *na němž je* f *omezená zdola (zhora) a neomezená zhora (zdola).*

VĚTA 3.8. *Nechť funkce* f *a* g *mají vlastní limity v bodě* $a \in \mathbb{R}^*$. *Potom také funkce* $f \pm g$, $f.g$, f/g *mají v* a *vlastní limity (podíl za dodatečného předpokladu* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$*) a platí:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) &= \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),\\
\lim_{x\to a}(f.g)(x) &= \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x),\\
\lim_{x\to a}(c.g)(x) &= c.\lim_{x\to a} g(x) \text{ pro libovolné } c \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C}),\\
\lim_{x\to a}(f/g)(x) &= \lim_{x\to a} f(x)/\lim_{x\to a} g(x).
\end{aligned}$$

VĚTA 3.8'. *Jsou-li* f, g *spojité v bodě* $a \in \mathbb{R}$, *pak jsou i funkce* $f \pm g$, $f.g$, $|f|$ *a v případě* $g(a) \neq 0$ *i* f/g, *spojité v bodě* a.

VĚTA 3.9. *Je-li* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *a* g *je omezená na* $U^*(a)$, *pak je* $\lim_{x\to a}(f.g)(x) = 0$.

VĚTA 3.10. *Nechť* f *je reálná funkce a* $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. *Potom pro* p, q *splňující* $q < A < p$ *existuje* $U^*(a)$ *tak, že* $q < f(x) < p$ *pro* $x \in U^*(a)$. *Speciálně pro* $A > 0$ $(A < 0)$ *existuje* $U^*(a)$ *tak, že* $f(x) \geq A/2 > 0$ $(f(x) \leq A/2 < 0)$ *pro každé* $x \in U^*(a)$. *Pro* $A \neq 0$ *existuje* $U^*(a)$, *že* $|f(x)| \geq |A|/2 > 0$ *pro* $x \in U^*(a)$, *přičemž poslední tvrzení platí i pro komplexní funkci, která má v* a *nenulovou limitu* $A \in \mathbb{C}$.

VĚTA 3.11. *Nechť* f *a* g *jsou reálné funkce,* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\,(-\infty)$ *a* g *je omezená zdola (zhora) na nějakém* $U^*(a)$. *Pak* $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty\,(-\infty)$.

VĚTA 3.12. *Nechť* f *a* g *jsou reálné funkce,* $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $g(x) \geq \alpha > 0$ $(g(x) \leq \beta < 0)$ *pro* $x \in U^*(a)$. *Potom je* $\lim_{x\to a}(f.g)(x) = \pm\infty$ $(\mp\infty)$.

VĚTA 3.13. *Nechť* $\lim\limits_{x\to a} |f|(x) = +\infty$. *Potom* $\lim\limits_{x\to a} 1/f(x) = 0$.

VĚTA 3.14. *Nechť* f *a* g *jsou reálné funkce, které mají limity* ($\in \mathbb{R}^*$) *v bodě* $a \in \mathbb{R}^*$. *Potom*

a) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
kromě případu, kdy jedna z limit je $+\infty$ *a druhá* $-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x). \lim\limits_{x\to a} g(x)$
kromě případu, kdy jedna z limit je 0 *a druhá* $\pm\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to a}(f/g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)/\lim\limits_{x\to a} g(x)$
kromě případu, kdy $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

c') *je-li* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x) > 0$ *v* $U^*(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f > 0$ (< 0), *pak* $\lim\limits_{x\to a} f/g = +\infty\,(-\infty)$,

c'') *je-li* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x) < 0$ *v* $U^*(a)$, $\lim\limits_{x\to a} f > 0$ (< 0), *pak* $\lim\limits_{x\to a} f/g = -\infty\,(+\infty)$,

d) *je-li* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *a* g *v libovolném redukovaném okolí bodu* a *nabývá jak kladných, tak záporných hodnot, pak funkce* f/g *nemá v bodě* a *limitu.*

Tato věta opět neříká nic o tzv. *neurčitých výrazech* typu $+\infty + (-\infty)$, $0.(\pm\infty)$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, jejichž limitu nelze určit jen na základě limit jednotlivých funkcí. Jejich vyšetřování se provádí speciálními postupy, s některými z nich se seznámíme v dalších kapitolách.

VĚTA 3.15. *Nechť* f *a* g *jsou reálné funkce, které mají limity v bodě* a. *Nechť v nějakém* $U^*(a)$ *platí*

$$f(x) \leq g(x). \tag{*}$$

Pak

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x). \tag{**}$$

I když v (*) *platí ostrá nerovnost, může v* (**) *obecně být rovnost.*

VĚTA 3.16. *Nechť* f, g, h *jsou reálné funkce takové, že v jistém* $U^*(a)$ *platí*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, *pak existuje také* $\lim\limits_{x\to a} h(x)$ *a je rovná* A.

VĚTA 3.16'. *Nechť f, g, jsou reálné funkce takové, že v jistém $U^*(a)$ platí*

$$f(x) \leq g(x).$$

Je-li $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, *je také* $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$. *Je-li* $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, *je také* $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

VĚTA 3.17 (Bolzanova-Cauchyova podmínka). *Funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ vlastní limitu tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pro každé x', x'' splňující $0 < |x' - a| < \delta(\varepsilon)$, $0 < |x'' - a| < \delta(\varepsilon)$ je $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Analogicky pro vlastní limity v $\pm\infty$ a limity zprava (zleva).*

Dokažme například věty 3.9. a 3.17.

DŮKAZ VĚTY 3.9.

1. způsob: Nechť $|g(x)| \leq M$ pro $\forall x \in U^*(a)$. Nechť $\delta(\varepsilon)$ je takové, že $|f(x)| < \varepsilon/M$ pro $\forall x$, $a - \delta(\varepsilon) < x < a + \delta(\varepsilon)$. Potom pro $x \in U^*(a) \cap U^*_{\delta(\varepsilon)}(a)$ je $|f(x)g(x)| < M\varepsilon/M = \varepsilon$.

2.způsob: Podle druhé Heineho věty stačí dokázat, že pro každou posloupnost x_n, $x_n \to a$, $x_n \neq a$ je $\lim_{n \to \infty} f(x_n)g(x_n) = 0$. Nechť tedy je x_n taková posloupnost. Podle první Heineho věty je $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$. Pro $n > \tilde{n}$ je $x_n \in U^*(a)$, v němž je g omezená, a tedy pro $n > \tilde{n}$ je $|g(x_n)| \leq M$. Podle lemmatu 2.2. je $\lim_{n \to \infty} f(x_n)g(x_n) = 0$.

DŮKAZ VĚTY 3.17. Nechť $\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, $a \in \mathbb{R}$. Potom $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, že pro $\forall x$, $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ je $|f(x) - A| < \varepsilon/2$.Potom pro $\forall x'$, x'', $|x' - a| < \delta(\varepsilon)$, $|x'' - a| < \delta(\varepsilon)$ platí $|f(x') - A| < \varepsilon/2$, $|f(x'') - A| < \varepsilon/2$, a tedy

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &\leq |f(x') - A + A - f(x'')| \leq \\ &\leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

(Použili jsme prvního způsobu důkazu.)

Postačitelnost B.-C. podmínky dokážeme druhým způsobem. Nechť je splněna B.-C. podmínka a nechť x_n je libovolná posloupnost splňující $x_n \to a$, $x_n \neq a$. Ukažme, že pro posloupnost $f(x_n)$ je splněna B.-C. podmínka. Pro $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, že pro $\forall x'$, x'', $0 < |x' - a| < \delta(\varepsilon)$,

$0 < |x'' - a| < \delta(\varepsilon)$ je $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Poněvadž je ale $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, existuje k tomuto $\delta(\varepsilon)$ takové $\tilde{n}_0(\delta(\varepsilon)) \equiv n_0(\varepsilon)$, že $|x_n - a| < \delta(\varepsilon)$ pro $\forall n > n_0(\varepsilon)$. To znamená, že pro $m, n > n_0(\varepsilon)$ je $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ (volili jsme $x' = x_n$, $x'' = x_m$). Posloupnost $f(x_n)$ tedy splňuje B.-C. podmínku a má tedy vlastní limitu. Protože posloupnost x_n byla libovolná, dostáváme podle (druhé) Heineho věty, že také funkce f má v bodě a vlastní limitu.

Uveďme ještě větu, která charakterizuje limitu a spojitost komplexní funkce pomocí její reálné a imaginární části:

VĚTA 3.18 (o limitě a spojitosti komplexních funkcí). *Nechť f je komplexní funkce, f_1, f_2 její reálná a imaginární část. Potom platí: f má v bodě a limitu tehdy a jen tehdy, mají-li f_1 a f_2 vlastní limity v bodě a. Přitom platí $\lim\limits_{x\to a} f = \lim\limits_{x\to a} f_1 + i \lim\limits_{x\to a} f_2$. f je v a spojitá tehdy a jen tehdy, jsou-li tam spojité obě funkce f_1 a f_2.*

Analogicky pro spojitost a limity jednostranné.

DŮKAZ. Dokažme větu pro limitu v bodě $a \in \mathbb{R}$. Nechť $\lim\limits_{x\to a} f = A = A_1 + iA_2$, $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$. To znamená, že $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že $|f(x) - A| < \varepsilon$ pro $\forall x$, $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$. Ale $|f_k(x) - A_k| \leq |f(x) - A| < \varepsilon$ pro $k = 1, 2$ a $\forall x$, $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$. To ovšem znamená, že $\lim\limits_{x\to a} f_k(x) = A_k$, $k = 1, 2$.

Naopak. Je-li $\lim\limits_{x\to a} f_k(x) = A_k$, $k = 1, 2$, pak podle věty 3.8. je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) + i \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A_1 + iA_2$.

CVIČENÍ 3.9. Dokažte si tuto větu pomocí Heineho vět a příslušné věty pro posloupnosti komplexních čísel.

Nakonec uveďme několik důležitých příkladů.

PŘÍKLAD 3.18. Nechť f_0 je *konstantní* funkce, tj. $f(x) = A$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$ (kde A je pevné číslo).Nechť dále je $f_n(x) = x^n$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom jsou funkce f_i, $i = 0, 1, \dots$ spojité na $\mathbb{R}$, neboť

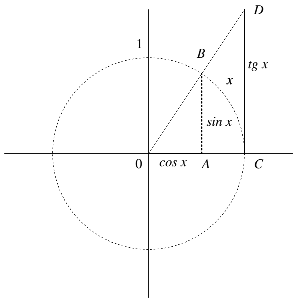
$$|f_0(x) - f_0(x_0)| = 0 < \varepsilon \text{ pro } \forall x \in \mathbb{R};$$
$$|f_1(x) - f_1(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon \text{ pro } |x - x_0| < \varepsilon,$$

tj. lze volit $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Protože je $f_n = \underbrace{f_1 \cdot \ldots \cdot f_1}_{n \text{ krát}}$, stačí $(n-1)-$krát použít větu 3.8'.

PŘÍKLAD 3.19. Funkce $f_n(x) = 1/x^n$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou spojité na svých definičních oborech podle předchozího příkladu a věty 3.8'.

PŘÍKLAD 3.20. Funkce $\sin x$, $\cos x$ jsou spojité na $\mathbb{R}$, funkce $\operatorname{tg} x$ je spojitá na každém intervalu $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tyto funkce se definují pomocí jednotkové kružnice následovně (viz obrázek 3.4.) (x je délka oblouku CB):



OBR. 3.5

Odvoďme nejdříve nerovnost

$$(*) \qquad \sin x < x < \operatorname{tg} x \text{ pro } x \in (0, \pi/2).$$

Je-li P_1 plocha trojúhelníka OCB, P_2 plocha kruhové výseče OCB, P_3 plocha trojúhelníka OCD, pak (z názoru) platí

$$P_1 < P_2 < P_3 \text{ pro každé } x \in (0, \pi/2).$$

Odtud dostáváme požadovanou nerovnost díky tomu, že $P_1 = \frac{\sin x}{2}$, $P_2 = x/2$, $P_3 = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$. Z lichosti funkcí $\sin x$, x, $\operatorname{tg} x$ plyne nerovnost $\operatorname{tg} x < x < \sin x$ pro $x \in (-\pi/2, 0)$. Je proto

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x| \text{ pro } x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Podle známých vzorců pro trigonometrické funkce je

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) . \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \right|,$$

což je menší nebo rovno $2\frac{|x-x_0|}{2} = |x - x_0|$ pro $|x - x_0| < \pi/2$. Pro dané $\varepsilon > 0$ stačí položit $\delta(\varepsilon) = \min(\varepsilon, \pi/2)$, abychom ukázali, že funkce $\sin x$ je spojitá v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Pro $\cos x$ stačí užít vzorečku $\cos x - \cos x_0 = 2\sin[(x - x_0)/2]\sin[(x + x_0)/2]$. Spojitost funkce $\operatorname{tg} x$ plyne ze spojitosti funkcí $\sin x$, $\cos x$ a toho, že $\cos x \neq 0$ pro $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ pomocí věty 3.8'.

Příklad 3.21. Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

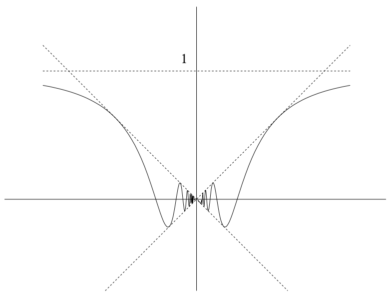
Z nerovnosti $(*)$ plyne nerovnost

$$(**) \qquad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ pro } x \in (0, \pi/2).$$

Díky sudosti funkcí $x/\sin x$, $1/\cos x$ platí $(**)$ i pro $x \in (-\pi/2, 0)$. Poněvadž je $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$, je také $\lim\limits_{x\to 0} 1/\cos x = 1$, a tedy z $(**)$ pomocí věty 3.16. plyne $\lim\limits_{x\to 0} x/\sin x = 1$. Zbytek plyne z věty 3.8.

Příklad 3.22. $f(x) = x\sin(1/x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ukažme, že je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Platí zřejmě $0 \leq |f(z)| \leq |x|$, a opět proto stačí užít vět 3.6. 3.16. Jiný způsob důkazu je pomocí věty 3.9. Graf této funkce je na obrázku 3.6.



Obr. 3.6

3.7. Monotónní funkce a jejich limity

DEFINICE 3.16. Řekneme, že reálná funkce f je *neklesající* (*nerostoucí*) na množině $M \subset \mathcal{D}_f$, jestliže pro každá dvě čísla $x_1, x_2 \in M$ taková, že $x_1 \leq x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Řekneme, že f je *rostoucí (klesající)* na M, jestliže pro každá dvě čísla $x_1, x_2 \in M$, $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Všechny takové funkce nazýváme *monotónními* na M, poslední dvě *ryze monotónními.*

PŘÍKLAD 3.23. $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pro n liché je f rostoucí na $\mathbb{R}$. Je-li $n = 2k$ sudé, je f rostoucí na $\langle 0, \infty)$ a klesající na $(-\infty, 0\rangle$; na žádném intervalu $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$ není monotónní, neboť $f(\pm\delta/2) = (\pm\delta/2)^{2k} = (\delta/2)^{2k} > 0 = f(0)$.

PŘÍKLAD 3.24. Funkce z příkladu 3.7. je neklesající na $\mathcal{D}_f$. Je rostoucí na $(-5/2, -1\rangle$ a na $\langle 1, 2)$.

PŘÍKLAD 3.25. Funkce $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ je rostoucí na intervalech $\langle -\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi\rangle$ a klesající na intervalech $\langle \pi/2+2k\pi, 3\pi/2+2k\pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ a není monotónní na žádné množině, která obsahuje okolí bodu $\pi/2 + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

POZNÁMKA 3.16. Monotónnost je *globální* vlastnost funkce na množině M, tj. vyjadřuje chování funkce na M jako celku. Je-li M jednobodová nebo dvoubodová, pak zřejmě každá funkce je na M monotónní. Ovšem netriviální význam má tento pojem pro množiny alespoň tříbodové.

DEFINICE 3.17. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Je-li M neomezená zhora (zdola), pak řekneme že její supremum (infimum) je rovno $+\infty$ $(-\infty)$.

DEFINICE 3.17A. Supremem, maximem, infimem, minimem reálné funkce f na množině M nazýváme supremum, maximum, infimum, minimum množiny $f(M)$.

VĚTA 3.19. *Nechť f je monotónní na intervalu (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^*$.Potom*
1a) existují $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to b-} f(x)$ a platí

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x) \ (\inf_{x\in(a,b)} f(x)),$$

$$\lim_{x\to b-} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x) \ (\sup_{x\in(a,b)} f(x)),$$

je-li f nerostoucí (neklesající).

1b) $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ je vlastní tehdy a jen tehdy, je-li f omezená na nějakém okolí $U^{*+}(a)$. Analogicky pro $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$.

2) Pro každé $c \in (a,b)$ existují vlastní limity $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to c-} f(x)$ a platí

$$\lim_{x\to c+} f(x) = \sup_{x\in(c,b)} f(x) \ (\inf_{x\in(c,b)} f(x)),$$
$$\lim_{x\to c-} f(x) = \inf_{x\in(a,c)} f(x) \ (\sup_{x\in(a,c)} f(x)),$$

je-li f nerostoucí (neklesající).

Důkaz. Stačí dokázat 1). 2) plyne z 1) aplikovaného na intervaly (c,b) resp. (a,c). Předpokládejme pro určitost, že $a \in \mathbb{R}$, f je neklesající na (a,b) a dokažme, že $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$. Ostatní příklady přenecháváme čtenáři za cvičení.

α) Nechť $\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x) = g > -\infty$. Potom $\forall \varepsilon > 0$ existuje $x_\varepsilon \in (a,b)$ tak, že $g \le f(x_\varepsilon) < g + \varepsilon$. Protože je f neklesající, platí pro $x \in (a, x_\varepsilon)$ $g \le f(x) \le f(x_\varepsilon) < g + \varepsilon$ a stačí položit $\delta(\varepsilon) = x_\varepsilon - a$.

β) Je-li $\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x) = -\infty$, pak $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists\, x_K \in (a,b)$, že $f(x_K) < K$. Ale potom pro $x \in (a, x_K)$ je $f(x) \le f(x_K) < K$.

3.8. Limita a spojitost složené funkce

Věta 3.20. *Nechť f je reálná funkce, která je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a g je reálná nebo komplexní funkce, která je spojitá v bodě $A = f(a)$. Potom složená funkce $g \circ f$ je spojitá v bodě a.*

Důkaz. 1) $g \circ f$ je definována na nějakém $U(a)$: g je definována na nějakém $U_\gamma(A)$, $\gamma > 0$; k tomuto γ existuje $\delta > 0$ tak, že $f(x) \in U_\gamma(A) = U_\gamma(f(a))$ pro $x \in U_\delta(a)$, a tedy $U_\delta(a) \subset \mathcal{D}_{g\circ f}$.

2) Nechť $\varepsilon > 0$. Protože g je spojitá v bodě A, existuje $\tilde{\delta}(\varepsilon) > 0$ tak, že $|g(y) - g(A)| < \varepsilon$ pro $|y - A| < \tilde{\delta}(\varepsilon)$. Poněvadž f je spojitá v bodě a, existuje k tomuto $\tilde{\delta}(\varepsilon)$ takové $\delta(\varepsilon) > 0$, že pro $|x - a| < \delta(\varepsilon)$ je $|f(x) - f(a)| < \tilde{\delta}(\varepsilon)$. Je tedy pro všechna x, $0 \le |x - a| < \delta(\varepsilon)$ $|g(f(x)) - g(A)| = |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$, tj. $g \circ f$ je spojitá v bodě a.

Cvičení 3.10. Dokažte větu 3.20. pomocí Heineho vět.

Věta 3.21. *Nechť f je reálná funkce a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Nechť g je reálná nebo komplexní funkce taková, že $\lim\limits_{y\to A} g(y) = B$. Jestliže existuje $U^*(a)$ tak, že $f(x) \neq A$ pro $x \in U^*(a)$, pak funkce $g \circ f$ má v bodě a limitu a platí*

$$(*)\qquad \lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = B = \lim_{y\to \lim\limits_{x\to a} f(x)} g(y).$$

Důkaz. Provedeme důkaz pro a, $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$. Pro $\varepsilon > 0$ existuje $\tilde{\delta} > 0$ tak, že $|g(y) - B| < \varepsilon$ pro $\forall y$, splňující $0 < |y - A| < \tilde{\delta}$. Poněvadž f má v bodě a limitu A, existuje k tomuto $\tilde{\delta}$ takové $\delta > 0$, že pro $\forall x$, $0 < |x - a| < \delta$ je $|f(x) - A| < \tilde{\delta}$. Navíc můžeme volit δ tak malé, aby v U^*_δ bylo také $f(x) \neq A$, tj. $|f(x) - A| > 0$.Potom ovšem pro $\forall x$, $0 < |x - a| < \delta$ je $|(g \circ f)(x) - B| = |g(f(x)) - B| < \varepsilon$.

Věta 3.21'. *Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ a g je spojitá v bodě A, pak platí*

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(A).$$

Důkaz se provede podobně, jako důkaz věty 3.21, nebo pomocí Heineho vět. Podrobnosti přenecháváme čtenáři.

Poznámka 3.17. Věty 3.21. a 3.21'. umožňují ze znalosti limit vnější a vnitřní funkce určit limitu složené funkce. Protože limita charakterizuje chování funkce v *redukovaném* okolí daného bodu, je ve větě 3.21. velmi důležitý předpoklad $f(x) \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$ pro $\forall x$ z nějakého $U^*(a)$ (viz následující příklad). Kdyby i pro $x \neq a$ bylo $f(x) = A$, pak by v takovém bodě bylo $g(f(x)) = g(A)$ a o vztahu $g(A)$ k limitě g v bodě A nic nevíme, předpokládáme-li pouze existenci její limity v bodě A. Je-li však (jako ve větě 3.21'.) g v bodě A spojitá, můžeme tento předpoklad vynechat.

Příklad 3.26.

$$g(y) = \begin{cases} 1 & y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$
$$f(x) = x\sin(1/x),\ \ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Je $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$ a formální použití vzorečku $(*)$ by dalo $\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x) = 1$. To ale není pravda, neboť pro $x_n = 1/n\pi$, $n\in\mathbb{N}$ je $f(x_n) = 0$, $g(f(x_n)) = 0$ (a tedy $\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = 0$) a zároveň pro $\tilde{x}_n = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$ je $\tilde{x}_n \to 0$ a $g(f(\tilde{x}_n)) = 1$. Podle Heineho věty nemá funkce $g\circ f$ v bodě 0 limitu. Jak je vidět, není splněn předpoklad $f(x)\neq 0$ pro $x\neq 0$.

Poznámka 3.18. Věty 3.20, 3.21, 3.21'. lze modifikovat na případ jednostranné spojitosti resp. jednostranných limit (viz následující cvičení). Předpoklady musí zajišťovat, aby

1) složená funkce byla definována na příslušném okolí,
2) hodnoty vnitřní funkce v bodech z tohoto okolí musí patřit do takového okolí, které odpovídá druhu limity vnější funkce.

Cvičení 3.11. Dokažte: $\lim_{x\to a+} f(x) = A$, $\lim_{y\to A-} g(y) = B$, $f(x) < A$ pro $x\in U^{*+}(a) \Rightarrow \lim_{x\to a+}(g\circ f)(x) = B$.

Příklad 3.27. a) Funkce $F(x) = \sin^2 x\ (= (\sin x)^2)$, $x\in\mathbb{R}$ je spojitá na $\mathbb{R}$, neboť je $F = g\circ f$ s $g(y) = y^2$, $y\in\mathbb{R}$ a $f(x) = \sin x$, $x\in\mathbb{R}$, přičemž funkce f a g jsou spojité na $\mathbb{R}$.

b) Funkce $F(x) = \sin x^n\ (= \sin(x^n))$, $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ je spojitá na $\mathbb{R}$, neboť je $F = g\circ f$ s $g(y) = \sin y$, $y\in\mathbb{R}$ a $f(x) = x^n$, $x\in\mathbb{R}$, přičemž f i g jsou spojité na $\mathbb{R}$.

c) Funkce $F(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ má v bodě 0 limitu 1, neboť je $F = g\circ f$ s $g(y) = y^2$, $y\in\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, přičemž g je spojitá na $\mathbb{R}$ a f má v bodě 0 limitu 1.

d) Funkce $F(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ má v bodě 0 limitu 1, neboť $F = g\circ f$ s $g(y) = \frac{\sin y}{y}$, $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ a $f(x) = x^2$, $x\in\mathbb{R}$, přičemž $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $f(x)\neq 0$ pro $x\neq 0$ a $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$.

Pozorný čtenář jistě postřehl, že v případech a), c) lze též použít větu 3.8, zatímco v případech b), d) je použití věty o limitě složené funkce podstatné.

Cvičení 3.12. Buď $f(\varphi)$ délka úsečky $\overline{AB}$ na obrázku 3.5, φ velikost úhlu $\angle AOB$ ve stupních. Pak zřejmě platí $f(\varphi) = \sin(2\varphi\pi/360)$. Určete $\lim_{\varphi\to 0}\frac{f(\varphi)}{\varphi}$.

3.9. Vztah monotónnosti a prostoty funkce

Zřejmě platí

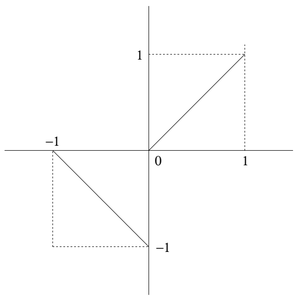
VĚTA 3.22. *Je-li f ryze monotónní na $M \subset \mathbb{R}$, pak je na M prostá.*

Následující příklad ukazuje, že opačné tvrzení obecně neplatí:

PŘÍKLAD 3.28. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \langle 0, 1), \\ -1 - x & x \in (-1, 0) \end{cases}$$

je prostá na $(-1, 1)$ i když tam není monotónní (ověřte). Její graf je na obrázku 3.7.



OBR. 3.7

Zajímavé je, že pro funkci spojitou na intervalu opak také platí:

VĚTA 3.23. *Je-li reálná funkce f spojitá na intervalu I, pak je na I prostá právě když je ryze monotónní.*

Důkaz této věty, který není tak úplně jednoduchý, zde neuvádíme.

3.10. Limita a spojitost inverzní funkce

V tomto oddílu dokážeme větu o limitách a spojitosti inverzní funkce, která se nám bude hodit při zkoumání důležitých příkladů dále.

K jejímu důkazu budeme potřebovat následující důležitou větu o *nabývání všech hodnot mezi dvěma danými hodnotami*, která platí pro reálné spojité funkce na intervalu.

VĚTA 3.24. *Je-li f spojitá reálná funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak na tomto intervalu nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.*

DŮKAZ. Pro $f(a) = f(b)$ je tvrzení zřejmé. Nechť je například $f(a) < f(b)$ a $c \in \langle f(a), f(b)\rangle$. Ukážeme, že $c \in f(\langle a, b\rangle)$. Označme $M_c = \{x;\ x \in \langle a, b\rangle,\ f(x) < c\}$. M_c je neprázdná ($a \in M_c$), zhora omezená (číslem b), a má tedy supremum $\alpha \in \langle a, b\rangle$. Existuje tedy posloupnost $x_n \in M_c$, $n \in \mathbb{N}$ taková, že $x_n \to \alpha \in \langle a, b\rangle$ pro $n \to \infty$. V důsledku spojitosti f pak podle Heineho věty $f(x_n) \to f(\alpha)$ pro $n \to \infty$. Protože je $f(x_n) < c$, je $f(\alpha) \le c$. Kdyby ale bylo $f(\alpha) < c$, pak by podle věty 3.10. bylo $f(x) < c$ pro $x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. To je ale ve sporu s tím, že $\alpha = \sup M_c$. Je proto $f(\alpha) = c$.

VĚTA 3.25. *Nechť je f spojitá a rostoucí na intervalu I s koncovými body $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Potom platí*

1) *$\mathcal{R}_f$ je interval J s koncovými body $A = \inf\limits_{(a,b)} f = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $B = \sup\limits_{(a,b)} f = \lim\limits_{x\to b-} f(x)$. Tyto koncové body patří do $\mathcal{R}_f$ právě když patří do I příslušné koncové body a, b, přičemž patří-li a do I, je $A = \lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a) = \min\limits_{I} f(x)$, analogicky pro b.*
2) *f^{-1} je na J spojitá a rostoucí.*
3) *Platí*
$$\lim_{y\to A+} f^{-1}(y) = a, \quad \lim_{y\to B-} f^{-1}(y) = b.$$

Analogická tvrzení platí pro f klesající s následujícími změnami: f^{-1} je klesající; $A = \inf\limits_{(a,b)} f = \lim\limits_{x\to b-} f(x)$, $B = \sup\limits_{(a,b)} f = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$; $\lim\limits_{y\to A+} f^{-1}(y) = b$, $\lim\limits_{y\to B-} f^{-1}(y) = a$.

DŮKAZ. Rovnosti $\inf\limits_{(a,b)} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$ apod. platí podle věty 3.19. resp. ze spojitosti f. 1) Je-li $I = (a, b)$ a $c \in (\inf\limits_{(a,b)} f, \sup\limits_{(a,b)} f) \overset{\text{def}}{=} \tilde{J}$, pak existují $x_1, x_2 \in I$, že $y_1 = f(x_1) < c < f(x_2) = y_2$. Podle věty 3.24. f nabývá na $\langle x_1, x_2\rangle$ všech hodnot mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$, a tedy i hodnoty c. Je tedy $\tilde{J} \subset J$. Je-li naopak $y_0 = f(x_0) \in J$, kde $x_0 \in (a, b)$, pak existuje $\tilde{x}$, $a < \tilde{x} < x_0$ a (protože f je rostoucí) $f(x_0) > f(\tilde{x}) \ge \inf\limits_{(a,b)} f(x)$; analogicky se dokáže $f(x_0) < \sup\limits_{(a,b)} f(x)$, tj.

$J \subset \tilde{J}$. V případě že I obsahuje některý ze svých koncových bodů, bude v $\mathcal{R}_f$ i obraz tohoto bodu, tj. příslušný krajní bod intervalu $\tilde{J}$.

2) *monotónnost*: kdyby existovaly $y_1 < y_2$, $y_1, y_2 \in J$ tak, že $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, pak (díky tomu, že f je rostoucí) by bylo $y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2$, což je spor s $y_1 < y_2$.

spojitost: ukážeme spojitost f^{-1} v každém bodě $y_0 \in J$, které není jeho pravým krajním bodem (analogicky by se provedl důkaz spojitosti zleva v každém bodě, který není levým krajním bodem J). Nechť tedy $y_0 = f(x_0)$ je takový bod. Potom x_0 není pravým koncovým bodem intervalu I. Zvolme $\varepsilon > 0$ tak malé, aby $x_0 + \varepsilon \in I$ a označme $y_\varepsilon = f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + \delta_\varepsilon = y_0 + \delta_\varepsilon$. Protože f^{-1} je rostoucí, je pro $y \in \langle y_0, y_0 + \delta_\varepsilon)$ $f^{-1}(y) \in \langle x_0, x_0 + \varepsilon)$, c.b.d.

3) plyne z 1) a 2) aplikovaných na funkci f^{-1}, která zobrazuje (A, B) na (a, b): krajní body $\mathcal{R}_{f^{-1}}$ jsou rovny limitám f^{-1} v krajních bodech intervalu (A,B).

Poznámka 3.19. I když je z obrázku, který si čtenář snadno nakreslí, věta skoro zřejmá, dal formální důkaz poměrně dost práce.

Rozeberme několik důležitých příkladů.

Příklad 3.29. Pro $k \in \mathbb{N}$ uvažme funkci $f(x) = x^{2k-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Tato funkce je spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$, přičemž $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Tedy podle naší věty k ní existuje spojitá rostoucí inverzní funkce f^{-1}, definovaná na $\mathbb{R}$ a platí pro ni $\lim_{y \to \pm\infty} f^{-1}(y) = \pm\infty$. Označujeme ji $\sqrt[2k-1]{y}$, nebo $y^{1/(2k-1)}$ ($(2k-1)$-ní odmocnina).

Příklad 3.30. Pro $k \in \mathbb{N}$ uvažme funkci $f(x) = x^{2k}$, $x \in \langle 0, \infty)$. f je spojitá a rostoucí na $\mathcal{D}_f$ a je $f(0) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Zobrazuje proto interval $\langle 0, +\infty)$ na interval $\langle 0, +\infty)$, a existuje k ní spojitá a rostoucí inverzní funkce f^{-1}, definovaná na $\mathcal{R}_f = \langle 0, +\infty)$, přičemž je $\lim_{y \to +\infty} f^{-1}(y) = +\infty$. Označujeme ji $\sqrt[2k]{y}$ nebo $y^{1/2k}$ ($(2k)$-tá odmocnina).

Poznámka 3.20. K funkci $g(x) = x^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$ neexistuje inverzní, neboť f není prostá. Kdybychom vzali její zúžení $\tilde{g}$ na interval $(-\infty, 0\rangle$, pak k $\tilde{g}$ existuje inverzní $(\tilde{g})^{-1}$, která zobrazuje interval $\langle 0, +\infty)$ na interval $(-\infty, 0\rangle$. Protože je (f je funkce z příkladu 3.30.)

$$\left|(\tilde{g})^{-1}(y)\right|^{2k} = ((\tilde{g})^{-1}(y))^{2k} = y = (f^{-1}(y))^{2k} = \left|f^{-1}(y)\right|^{2k},$$

dostáváme $\left|(\tilde{g})^{-1}(y)\right| = \left|f^{-1}(y)\right|$, a tedy $(\tilde{g})^{-1}$ a f^{-1} se liší právě znaménkem, tj. $(\tilde{g})^{-1}(y) = -\sqrt[2k]{y}$, $y \in \langle 0, +\infty)$.

Poznámka 3.21. Z příkladů 3.29. a 3.30. je vidět, že ke každému nezápornému číslu y a ke každému přirozenému číslu n existuje právě jedno nezáporné číslo $\varphi(y)$ takové, že $(\varphi(y))^n = y$. Toto číslo je dáno jako hodnota v bodě y příslušné inverzní funkce zkonstruované v těchto příkladech, tj, $\sqrt[n]{y}$.

Dále je z těchto příkladů vidět, že pro n liché existuje právě jedna n-tá odmocnina pro každé reálné číslo. Pro n sudé a nezáporné číslo y existují právě dvě reálná čísla taková, která po umocnění na n-tou dají y: $\sqrt[n]{y}$ a $-\sqrt[n]{y}$.

Příklad 3.31. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. f je rostoucí, je $\lim\limits_{x \to \pm\pi/2\mp} \operatorname{tg} x = \pm\infty$. Inverzní k ní funkce je definována na $\mathbb{R}$, je tam spojitá a rostoucí a její limity v $\pm\infty$ jsou rovny $\pm\pi/2$. Označuje se arctg.

3.11. Obecná mocnina. Funkce a^x, x^α, $\log_a x$

Definice 3.18. Pro $x > 0$ definujeme

$$\begin{aligned}
x^n &= \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ krát}},\ n \in \mathbb{N},\\
x^0 &= 1\\
x^{1/n} &= \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbb{N}\\
x^{n/m} &= \left(\sqrt[m]{x}\right)^n = \sqrt[m]{(x^n)},\ m, n \in \mathbb{N}\\
x^{-n/m} &= \frac{1}{\left(\sqrt[m]{x}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt[m]{(x^n)}},\ m, n \in \mathbb{N}\\
x^\alpha &= \lim_{n \to \infty} x^{\alpha_n},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha_n \in \mathbb{Q}, \alpha_n \to \alpha\\
0^\alpha &= 0\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0
\end{aligned}$$

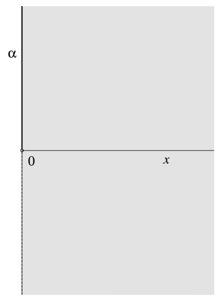
Ve výrazu x^α se x nazývá *základem* nebo *mocněncem* a α *exponentem* nebo *mocnitelem* .

POZNÁMKA 2.22. Ke korektnosti definice je třeba dokázat:

1) Rovnost dvou výrazů ve druhém řádku.
2) Rovnost $x^{n/m} = x^{p/q}$ pro $m/n = p/q$, $m, n, p, q \in \mathbb{N}$, $n/m = p/q$.
3) Nezávislost x^α na posloupnosti α_n, splňující $\alpha_n \to \alpha$.

CVIČENÍ 3.13. Dokažte 1) a 2) z této poznámky.

Na obrázku 3.8. je ukázána množina x a α, pro která je tato mocnina definována.



OBR. 3.8

Pro takto definovanou mocninu platí následující věta:

Věta 3.26. *Pro $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y > 0$ platí*

$$\begin{aligned}
x^\alpha x^\beta &= x^{\alpha+\beta},\\
x^\alpha y^\alpha &= = (xy)^\alpha,\\
\frac{x^\alpha}{y^\alpha} &= \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha,\\
(x^\alpha)^\beta &= x^{\alpha\beta},\\
x^{-\alpha} &= \frac{1}{x^\alpha},\\
x^\alpha < y^\alpha &\ \text{pro}\ x < y,\ \alpha > 0,\\
x^\alpha > y^\alpha &\ \text{pro}\ x < y,\ \alpha < 0,\\
x^\alpha > x^\beta &\ \text{pro}\ \alpha > \beta,\ x > 1,\\
x^\alpha < x^\beta &\ \text{pro}\ \alpha > \beta,\ x < 1,
\end{aligned}$$

přičemž kromě těch, kde je x, y ve jmenovateli, platí i pro x, y rovné nule a $\alpha > 0$.

Poznámka 3.23. Dá se definovat mocnina i pro $x < 0$ a některé exponenty α se zachováním rovností z věty 3.26.

Definice 3.19. I. *Exponenciální* funkcí o základu $a > 0$ nazýváme funkci

$$f_a(x) = a^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

II. *Mocninnou* funkcí s exponentem $\alpha \in \mathbb{R}$ (α-tou mocninou) nazýváme funkci

$$g_\alpha(x) = x^\alpha \text{ pro } \begin{cases} x \geq 0, & \alpha > 0,\\ x > 0, & \alpha \leq 0.\end{cases}$$

Poznámka 3.24. Tato definice mocninné funkce byla takto vyslovena proto, aby byla stručná. Například pro celé exponenty se užívá následujících rozšíření těchto funkcí na $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$):

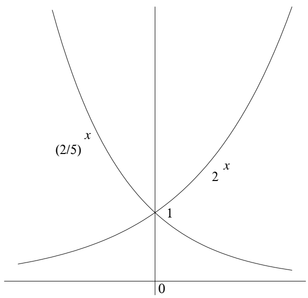
$$\begin{aligned}
x^n &= \underbrace{x.\ldots.x}_{n\text{ krát}},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\\
x^0 &= 1, \qquad\qquad x \in \mathbb{R},\\
x^{-n} &= \frac{1}{x^n}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Platí

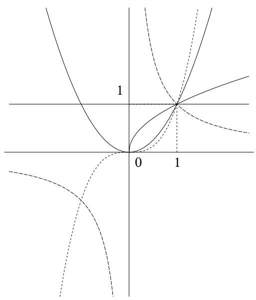
VĚTA 3.27. *Všechny exponenciální i mocninné funkce jsou na svých definičních oborech spojité a platí*

1) a^x *je rostoucí (klesající) na* $\mathbb{R}$,
   $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty\ (0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0\ (+\infty)$ *pro* $a > 1$ *(*$a < 1$*)*,
   $a^x > 0$ *pro* $x \in \mathbb{R}$, $a^0 = 1$ *pro každé* $a > 0$.
2) x^α *je rostoucí (klesající) na* $\langle 0, +\infty)$ *(*$(0, +\infty)$*)*,
   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty\ (0)$, $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha = 0\ (+\infty)$ *pro* $\alpha > 0$ *(*$\alpha < 0$*)*,
   $x^\alpha > 0$ *pro každé* α *a* $x > 0$, $1^\alpha = 1$ *pro každé* α.

Grafy těchto funkcí jsou na obrázcích 3.9. 3.10.



OBR. 3.9



OBR. 3.10

Definice 3.20. *Logaritmickou* funkcí o základu $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ nazýváme funkci inverzní k funkci a^x. Je definována na $(0,+\infty)$ a označujeme ji $\log_a x$.

Vlastnosti logaritmické funkce shrnuje

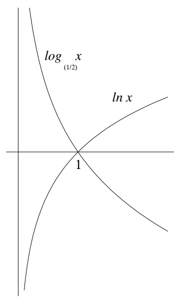
Věta 3.28. *Pro $a > 1$ ($a < 1$) je funkce $\log_a x$ rostoucí (klesající) na $(0,+\infty)$,*

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty\ (-\infty),\ \lim_{x\to 0+} \log_a x = -\infty\ (+\infty),$$
$$\log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1 \textit{ pro každé } a.$$

Dále platí

$$x = a^{\log_a x},\ x^\alpha = a^{\alpha \log_a x},\ \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x,$$
$$\log_b x = \log_b(a^{\log_a x}) = \log_a x \,.\, \log_b a,$$
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

V praxi se nejčastěji používaly tzv. *dekadické* logaritmy o základu 10 – označují se log nebo *přirozené* logaritmy o základu e – označení ln. Grafy logaritmických funkcí jsou na obrázku 3.11.



Obr. 3.11

Logaritmů lze úspěšně použít k výpočtu limit funkcí tvaru $[v(x)]^{w(x)}$, kde $v > 0$ a w jsou funkce. Jestliže existuje limita $\lim_{x\to a} w(x) \ln(v(x)) =$

$y_0 \in \mathbb{R}^*$, pak je $\lim\limits_{x\to a}[v(x)]^{w(x)} = \lim\limits_{y\to y_0} e^y$. V případech, kdy existují vlastní limity $\lim\limits_{x\to a} w(x)$ a $\lim\limits_{x\to a} v(x) \neq 0$, lze tento výsledek zapsat ve tvaru

$$e^{\lim\limits_{x\to a} w(x).\ln(\lim\limits_{x\to a} v(x))} = [\lim_{x\to a} v(x)]^{\lim\limits_{x\to a} w(x)}.$$

Případy typu 0^0, 1^∞, ∞^0 jsou *neurčité výrazy*, kdy limitu funkce v^w nelze určit pouze ze znalosti limit základu v a exponentu w. Tyto neurčité výrazy odpovídají neurčitým výrazům $0.\infty$, $\infty.0$, $0.\infty$ pro funkci $w \ln v$.

Příklad 3.32.

$$\lim_{x\to\pi} x^{\sin x} = \lim_{y\to \lim\limits_{x\to\pi}(\sin x)\ln x} e^y = \lim_{y\to 0} e^y = e^0 = 1.$$

Mohli jsme hned napsat, že limita je rovna $[\lim\limits_{x\to\pi} x]^{\lim\limits_{x\to\pi} \sin x} = \pi^0 = 1.$

Příklad 3.33. V kapitole 5. pomocí L'Hospitalova pravidla určíme, že $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x = 0$. Proto pomocí právě uvedeného postupu dostaneme

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

Následující příklad je velmi důležitý. Provedeme jej podrobně, i když není právě nejjednodušší.

Příklad 3.34. Ukážeme, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Zkoumejme nejdříve limitu zprava. Nechť je $x \in (0, 1/2)$, $n(x) \in \mathbb{N}$ je takové, že $1/(n(x)+1) < x \leq 1/n(x)$ (takové existuje právě jedno). Potom

$$e^x \leq e^{1/n(x)} \leq [(1 + \frac{1}{n(x)-1})^{n(x)}]^{1/n(x)} = 1 + \frac{1}{n(x)-1}.$$

Na druhé straně je

$$e^x \geq e^{1/(n(x)+1)} \geq [(1 + \frac{1}{n(x)+1})^{n(x)+1}]^{1/(n(x)+1)} = 1 + \frac{1}{n(x)+1},$$

a tedy
$$\frac{1}{n(x)+1} \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{n(x)-1}.$$
Poněvadž platí
$$n(x) \leq \frac{1}{x} < n(x)+1,\ n(x)-1 > \frac{1}{x} - 2,$$
$$\frac{1}{n(x)-1} < \frac{x}{1-2x},\ n(x)+1 \leq \frac{1}{x} + 1,\ \frac{1}{n(x)+1} \geq \frac{x}{1+x},$$
je
$$\frac{x}{1+x} \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{1-2x},\ \frac{1}{1+x} \leq \frac{e^x-1}{x} \leq \frac{1}{1-2x}.$$
Poněvadž limity obou krajních funkcí pro $x \to 0$ jsou rovny 1, je také podle věty 3.16. $\lim\limits_{x\to 0+} (e^x - 1)/x = 1$.

Abychom dokázali totéž pro limitu zleva, postupujme následovně: nechť je $x < 0$. Pak je
$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\frac{1}{e^{-x}} - 1}{x} = \frac{\frac{1-e^{-x}}{e^{-x}}}{x} = \frac{e^{-x}-1}{-x}\frac{1}{e^{-x}}.$$
Limita druhého součinitele je rovna 1. Limita prvního je také 1 podle věty o limitě složené funkce: vnitřní funkce $f(x) = -x$, vnější funkce $g(y) = (e^y - 1)/y$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$, $f(x) > 0$ pro $x < 0$ a $\lim_{y\to 0+} g(y) = 1$ podle první části důkazu.

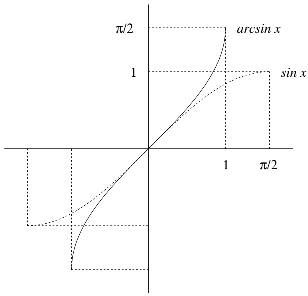
Cvičení 3.14. Najděte $\lim\limits_{x\to 0}(a^x - 1)/x$ pro $a > 0$. Uvědomte si, že tato limita je rovna 1 právě když je $a = e$. To je jedna z možných charakterizací čísla e.

3.12. Funkce trigonometrické, hyperbolické a funkce k nim inverzní

Funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou podle příkladu 3.18. spojité na celém $\mathbb{R}$, jsou periodické s periodou 2π. Funkce $\sin x$ je rostoucí (klesající) na intervalech $\langle -\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi\rangle$ $(\langle \pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi\rangle)$, $k \in \mathbb{Z}$. Funkce $\cos x$ je rostoucí (klesající) na intervalech $\langle -\pi + 2k\pi, 2k\pi\rangle$ $(\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle)$, $k \in \mathbb{Z}$. $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou π-periodické, $\operatorname{tg} x$ je spojitá a rostoucí na intervalech $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to \pi/2-} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\pi/2+} \operatorname{tg} x = -\infty$. $\operatorname{cotg} x$ je spojitá a klesající na intervalech $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty$.

Vezmeme-li zúžení těchto funkcí na příslušné intervaly, na nichž jsou ryze monotónní a tedy prosté, existují k nim funkce inverzní – tzv. *inverzní trigonometrické funkce*:

a) $f(x) = \sin x$, $x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. Inverzní k této funkci se značí $\arcsin x$. Je definována na $\langle -1, 1 \rangle$, zobrazuje jej na $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$, je spojitá a rostoucí. Její graf je na obrázku 3.12.



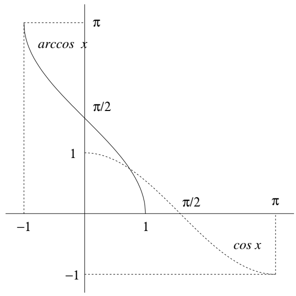
Obr. 3.12

b) Inverzní funkce k $f(x) = \cos x$, $x \in \langle 0, \pi \rangle$ se značí $\arccos x$. Zobrazuje $\langle -1, 1 \rangle$ na $\langle 0, \pi \rangle$, je na něm spojitá a klesající. Její graf je na obrázku 3.13.

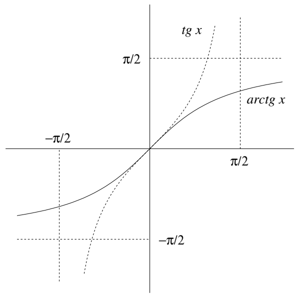
c) Inverzní funkci k funkci $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ značíme $\operatorname{arctg} x$. Zobrazuje $\mathbb{R}$ na $(-\pi/2, \pi/2)$, je na $\mathbb{R}$ spojitá a rostoucí. Je $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\pi/2$. Její graf je na obrázku 3.14.

d) Inverzní funkci k funkci $f(x) = \operatorname{cotg} x$, $x \in (0, \pi)$ značíme $\operatorname{arccotg} x$. Zobrazuje $\mathbb{R}$ na $(0, \pi)$, je na $\mathbb{R}$ spojitá a klesající. Je $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$. Její graf je na obrázku 3.15.

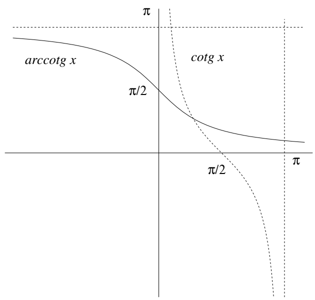
Cvičení 3.15. Nechť $h(x) = \sin x$, $x \in \langle \pi/2, 3\pi/2 \rangle$, $w(x) = \sin x$, $x \in \langle 3\pi/2, 5\pi/2 \rangle$. Vyjádřete h^{-1} a w^{-1} pomocí $\arcsin x$.



Obr. 3.13



Obr. 3.14

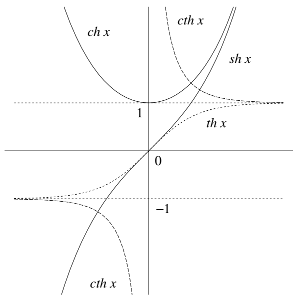


Obr. 3.15

Hyperbolickými funkcemi se nazývají funkce $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$, definované následovně:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R},\\
\operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ x \in \mathbb{R},\\
\operatorname{th} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} (= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}),\ x \in \mathbb{R},\\
\operatorname{cth} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} (= \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Jsou opět na svých definičních oborech spojité a jejich grafy jsou na obrázku 3.16.



Obr. 3.16

Cvičení 3.16. Najděte limity těchto funkcí pro $x \to \pm\infty,\ 0\pm$.

Cvičení 3.17. Pro $x, y \in \mathbb{R}$ dokažte následující rovnosti:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x,\\
\operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,\\
\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1,\ \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x
\end{aligned}$$

3.13. Polynomy, racionální funkce

Polynomem nebo také *mnohočlenem* se nazývá funkce tvaru

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \ x \in \mathbb{R},$$

kde a_i, $i = 0, 1, \dots, n$ jsou reálná nebo komplexní čísla – tzv. *koeficienty* tohoto mnohočlenu. Je-li $a_n \neq 0$, pak číslo n v tomto vzorci nazýváme stupněm mnohočlenu P.

Racionální funkcí se nazývá funkce tvaru

$$R(x) = P(x)/Q(x), \ x \in \mathbb{R} \setminus M,$$

kde P a Q jsou polynomy, $Q \not\equiv 0$, $M = \{x;\ x \in \mathbb{R},\ Q(x) = 0\}$.

CVIČENÍ 3.18. Ukažte, že $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \operatorname{sgn} a_n(+\infty)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = (-1)^n \operatorname{sgn} a_n(+\infty)$, je-li P polynom s reálnými koeficienty, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$.

CVIČENÍ 3.19. Je-li R racionální funkce s reálnými koeficienty, $R = P/Q$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $Q(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, pak ukažte, že platí

$$\lim_{x\to+\infty} R(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } m > n, \\ a_n/b_n & \text{pro } m = n, \\ +\infty \operatorname{sgn}(a_n/b_m) & \text{pro } m < n. \end{cases}$$

Vyšetřete podobně $\lim\limits_{x\to-\infty} R(x)$.

3.14. Klasifikace bodů nespojitosti

DEFINICE 3.21. Nechť funkce f je definována na $U^*(a)$. Řekneme, že má v bodě a *odstranitelnou nespojitost*, jestliže existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Má-li funkce f v bodě a odstranitelnou nespojitost, můžeme ji dodefinovat popřípadě změnit v bodě a tak, aby výsledná funkce $\tilde{f}$ byla v a spojitá:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in U^*(a), \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) & \text{pro } x = a. \end{cases}$$

Příklad 3.35. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0, \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

má v bodě 0 odstranitelnou nespojitost. Podle příkladu 3.21. je funkce

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

spojitá v 0.

Definice 3.22. Řekneme, že funkce f, definovaná na $U^*(a)$ má v bodě a *nespojitost 1. druhu* (*nespojitost typu skoku*), jestliže v bodě a existují obě *vlastní* jednostranné limity $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$, ale jsou různé.

Má-li funkce f v bodě a nespojitost 1. druhu, můžeme vhodným dodefinováním nebo změnou v bodě a dostat funkci, která je v bodě a spojitá zprava nebo zleva.

Příklad 3.36. Funkce $\operatorname{sgn} x$ z příkladu 3.4. má v 0 nespojitost typu skoku.

Definice 3.23. Řekneme, že funkce je *po částech spojitá* na intervalu J, jestliže má vlastní jednostranné limity v koncových bodech tohoto intervalu a je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu J kromě konečného počtu bodů, v nichž má nespojitosti 1. druhu.

Definice 3.24. Řekneme, že funkce f, definovaná na $U^*(a)$ má v bodě a *nespojitost 2. druhu*, jestliže aspoň jedna z jednostranných limit této funkce v bodě a neexistuje nebo je nevlastní.

Příklad 3.37. Funkce $g(x) = \sin(1/x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $f(x) = 1/x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mají v nule nespojitost 2. druhu.

Cvičení 3.20. Má-li funkce v daném bodě odstranitelnou nespojitost nebo nespojitost 1. druhu, pak je na nějakém redukovaném okolí tohoto bodu omezená.

Cvičení 3.21. Má-li funkce v daném bodě nespojitost 2. druhu a je v nějakém redukovaném okolí tohoto bodu omezená, pak alespoň jedna z jejích jednostranných limit neexistuje.

Cvičení 3.22. Nechť funkce f je definována na nějakém $U^*(a)$. Potom ji lze v bodě a spojitě dodefinovat (tj. existuje $\tilde{f}$ taková, že $\tilde{f} = f$ v $U^*(a)$ a $\tilde{f}$ je spojitá v a) právě když existuje vlastní limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

3.15. Symboly o, O
Klasifikace funkcí nekonečně malých a nekonečně velkých

V tomto oddílu budeme zkoumat, kdy se jedna funkce blíží k 0 nebo k ∞ rychleji nebo pomaleji než druhá. Zavedeme též užitečné symboly o (*malé o*) a O (*velké O*).

Definice 3.25. Budeme psát

$$
\begin{aligned}
f =&o(g),\ x = a \in \mathbb{R}^*,\ \text{je-li}\ \lim_{x\to a}(f/g)(x) = 0,\\
f =&O(g),\ x = a \in \mathbb{R}^*,\ \text{je-li}\ f/g\ \text{omezená na nějakém}\ U^*(a),\\
f \sim& g,\ x = a \in \mathbb{R}^*,\ \text{je-li}\ \lim_{x\to a}(f/g)(x) \in \mathbb{R}\setminus\{0\},
\end{aligned}
$$

kde f a g jsou funkce definované na $U^*(a)$.

Definice 3.26. Nechť f a g jsou takové funkce, že

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

pro nějaké $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že f je *nekonečně malá vyššího řádu* než g, je-li $f = o(g)$, $x = a$, *nekonečně malá nižšího řádu*, je-li $g = o(f)$, $x = a$, *nekonečně malá stejného řádu* jako g, je-li $f \sim g$, $x = a$ a *nekonečně malá řádu* $k > 0$ vzhledem ke g, je-li $f \sim g^k$.

Definice 3.27. Nechť f a g jsou takové funkce, že

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

pro nějaké $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že f je *nekonečně velká vyššího řádu* než g, je-li $g = o(f)$, $x = a$, *nekonečně velká nižšího řádu*, je-li $f = o(g)$, $x = a$, *nekonečně velká stejného řádu* jako g, je-li $f \sim g$, $x = a$ a *nekonečně velká řádu* $k > 0$ vzhledem ke g, je-li $f \sim g^k$.

Volíme-li za g například funkci $x - a$ nebo $1/(x - a)$ pro $a \in \mathbb{R}$, funkci x nebo $1/x$ pro $a = \pm\infty$, umožní nám tyto definice roztřídit funkce, které mají v bodě a nulové nebo nevlastní limity podle toho, jak rychle se vzhledem ke srovnávací funkci g blíží k nule nebo k nekonečnu.

Cvičení 3.23. Dokažte:

1) $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$,
2) $f_1 = o(g)\ (O(g))$, $f_2 = O(1) \Rightarrow f_1 f_2 = o(g)\ (O(g))$,
3) $f_i = o(g)\ (O(g))$, $i = 1, 2$, $\Rightarrow f_1 + f_2 = o(g)\ (O(g))$,
   $f_1 f_2 = o(g^2)\ (O(g^2))$.
4) Je-li f řádu $k > 1$ vzhledem ke g, pak $f = o(g)$, je-li $\lim g = 0$.

Příklad 3.38. Mějme funkce $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Poněvadž platí $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} (\frac{\sin(x/2)}{x/2})^2 = \frac{1}{2} \neq 0$, je f řádu 2 vzhledem k x v bodě 0.

3.16. Obecné poznámky k výpočtu limit
Příklady

Neexistuje obecné pravidlo, jak postupovat při výpočtu limity dané konkrétní funkce. Kromě teorie je třeba jisté početní praxe, jistého „citu”, jak z mnoha způsobů vybrat ten, který vede nejrychleji k cíli (cílem může být i důkaz, že limita dané funkce v daném bodě neexistuje). Uvedeme ještě jednu poznámku o použití věty o limitě složené funkce.

Poznámka 3.25. Při praktickém počítání používáme tuto větu dvojím způsobem:

I. Je-li dána funkce F, pak se snažíme ji zapsat ve tvaru $F = g \circ f$, kde g a f jsou vhodné funkce, jejichž příslušné limity známe a (jsou-li splněny příslušné předpoklady) použijeme přímo věty 3.21. 3.21'.

II. Potíž je v tom, že ne vždycky je na první pohled jasné, jak g a f volit, aby se dal použít první postup. Někdy je užitečné „dosadit” (provést substituci) za x nějakou funkci $\varphi(t)$, tj. přejít od funkce F k funkci $(F\circ\varphi)(t)$, jejíž limitu umíme najít. Obecně nemusí platit, že $\lim\limits_{t\to a}(F\circ\varphi)(t)$ bude rovna $\lim\limits_{x\to \lim\limits_{t\to a}\varphi(t)} F(x)$, ale za jistých dodatečných předpokladů o φ to pravda je:

předpokládáme-li například, že φ je spojitá a ryze monotónní na (a, b), $\varphi((a, b)) \subset \mathcal{D}_F$, pak je-li $\lim\limits_{t\to a+}(F\circ\varphi)(t) = A$, pak je také $\lim\limits_{x\to \alpha+} F(x) = A$ pro φ rostoucí a $\lim\limits_{x\to\alpha-} F(x) = A$ pro φ klesající, kde $\alpha = \lim\limits_{t\to a+}\varphi(t)$. To je vidět z toho, že při označení $\Phi(t) = (F \circ \varphi)(t)$ je $F = \Phi \circ \varphi^{-1}$ a stačí použít větu 3.21. nebo 3.21' spolu s větou o limitě inverzní funkce.

PŘÍKLAD 3.39. Najděme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x\sin x}$. Poněvadž je

$$\frac{e^{x^2}-1}{x\sin x} = \frac{e^{x^2}-1}{x^2}\frac{x}{\sin x}$$

a $\lim\limits_{x\to 0}(x/\sin x) = 1$, stačí najít $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2}-1)/x^2$. Hned vidíme (a s tímto cílem jsme uvedenou úpravu dělali), že $(e^{x^2}-1)/x^2 = (g\circ f)(x)$ s $g(y) = (e^y-1)/y$ a $f(x) = x^2$. Podle věty 3.21. a příkladu 3.34. je

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = 1,$$

a tedy také $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2}-1)/x\sin x = 1$.

PŘÍKLAD 3.40. Ukážeme, že

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Položíme-li $\varphi^{-1}(x) \equiv \ln(1+x) = z$, tj. $\varphi(z) = e^z - 1$ (φ a φ^{-1} jsou spojité a rostoucí), dostaneme podle poznámky 3.25.II.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = 1.$$

(Přesněji řečeno postup uvedený v této poznámce dává pouze $\lim\limits_{x\to 0+}(\ln(1+x))/x = 1$, ale zřejmě by se dalo zformulovat analogické tvrzení, které by dalo i limitu zleva.)

PŘÍKLAD 3.41. Ukážeme, že

$$\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e.$$

Postupem uvedeným v oddílu 3.11. dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+1/x)}.$$

Protože je

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+1/x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x} = \lim_{y\to 0+}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1,$$

je $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e$.

Cvičení 3.23. Najděte $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+1/x)^x$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+1/x)^{\alpha x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to b}(1+\alpha(x))^{1/\alpha(x)}$, je-li $\lim\limits_{x\to b}\alpha(x)=0$ a $\alpha(x)>0$ pro $x\in U^*(b)$.

Cvičení 3.24. Dokažte následující zobecnění poznámky 3.25.II: Nechť $\lim\limits_{z\to a}\psi(z)=A$. Nechť ke každému $\eta>0$ existuje $\delta>0$ tak, že $U^*_\delta(A)\subset\psi(U^*_\eta(a))$. Je-li $\lim\limits_{z\to a}(f\circ\psi)(z)=B$, pak je také $\lim\limits_{x\to A}f(x)=B$.

Příklad 3.42. Nechť

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{pro } x\geq 0,\\ 0 & \text{pro } x<0\end{cases}$$

(tzv. *Heavisideova* funkce), $\psi(z)=z^2$, $z\in\mathbb{R}$. Potom $\lim\limits_{z\to 0}\psi(z)=0$, $\lim\limits_{z\to 0}(f\circ\psi)(z)=1$, ale $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ neexistuje.

Poznámka 3.26. Užitím výsledku příkladu 3.40. se výpočet limity výrazu $(v(x))^{w(x)}$ v případě že jde o neurčitý výraz typu 1^∞ převede na zkoumání limity $w(x)(v(x)-1)$, neboť

$$w\ln v=w\frac{\ln(1+(v-1))}{v-1}(v-1),$$

a limita zlomku v této rovnosti je podle příkladu 3.40. rovna 1.

Příklad 3.43. Máme najít

$$\lim_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}.$$

Podle předchozí poznámky stačí najít

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-2\right)=2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x}{x+1}}-1}{\frac{x}{x+1}}=2$$

Zkoumaná limita je tedy rovna e^2. Jak to bylo jednoduché, jen se nezaleknout „strašného” původního výrazu.

KAPITOLA 4

DERIVACE

Pod slovem funkce budeme v této kapitole vždy rozumět reálnou nebo komplexní funkci jedné reálné proměnné, pokud nebude řečeno jinak.

4.1. Definice. Základní vlastnosti

Definice 4.1. Nechť funkce f je definována na $U(a)$ $(U^+(a), U^-(a))$, $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě a *vlastní derivaci* (*vlastní derivaci zprava, zleva*) rovnou $A \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, je-li

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$$
$$\left(\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A, \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A\right).$$

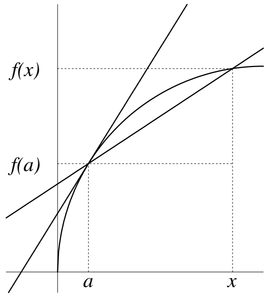
Je-li f reálná funkce, pak říkáme, že f má v bodě a *nevlastní derivaci* (*nevlastní derivaci zprava, zleva*) rovnou $+\infty$, $-\infty$, jsou-li výše uvedené limity rovny $+\infty$, $-\infty$. Derivaci f v bodě a označujeme $\frac{df}{dx}(a)$, $f'(a)$, $\dot{f}(a)$, příslušné derivace zprava (zleva) $f'_+(a)$, $f'_-(a)$.

Pojem derivace má nejrůznější aplikace:

1) geometricky $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ je rovno směrnici sečny ke grafu funkce f, tj. přímky, procházející body $(a, f(a))$ a $(x, f(x))$ tohoto grafu. Derivace jako limita tohoto zlomku pak značí *směrnici tečny* ke grafu f v bodě $(a, f(a))$, viz obrázek 4.1.

2) je-li $s(t)$ dráha, kterou hmotný bod urazí za čas t, pak $\frac{s(t)-s(\tau)}{t-\tau}$ je průměrná rychlost pohybu v době od okamžiku τ do okamžiku t. Derivace jako limita tohoto zlomku pak je *okamžitou rychlostí* pohybu

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX



OBR. 4.1

tohoto bodu v okamžiku τ. Podobně je-li $u(t)$ teplota tělesa v okamžiku t, je $u'(t)$ rychlost změny této teploty v okamžiku t.

3) jiným příkladem je tzv. *lineární hustota* hmoty tyče: je-li dána tyč délky l (jejíž konce označíme 0, l) a $f(x)$ je hmota části tyče mezi body 0 a $x \in \langle 0, l \rangle$, je $f'(x)$ lineární hustota hmoty tyče v bodě x – je to limita průměrných hustot, když délka úseků tyče konverguje k nule.

POZNÁMKA 4.1. Podle věty o limitě složené funkce je

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

pokud aspoň jedna z limit existuje, analogicky pro derivace zprava, zleva.

PŘÍKLAD 4.1. Funkce $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(a) = e^a$, neboť podle příkladu 3.34. je

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{a+t} - e^a}{t} = e^a \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = e^a.$$

CVIČENÍ 4.1. Najděte $(a^x)'$ v bodě $x \in \mathbb{R}$ $(a > 0)$.

PŘÍKLAD 4.2. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \geq 0, \\ 0 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

má derivaci rovnou

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x \geq 0, \\ 0 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Je totiž pro $x_0 < 0$ $(f(x_0 + t) - f(x_0))/t = 0$ pro $|t| < |x_0|$, a tedy $f'(x_0) = 0$. Analogicky se ukáže, že $f'_-(0) = 0$. Je-li $x_0 > 0$, $x > 0$, je

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \to 2x_0$$

pro $x \to x_0$, a tedy $f'(x_0) = 2x_0$. Pro derivaci zprava v bodě 0 máme

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

Příklad 4.3. Pro $f(x) = x$ je $f'(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, neboť $(f(x + t) - f(x))/t = 1$ pro každé t, $x \in \mathbb{R}$.

Protože derivace je definována jako limita tzv. *diferenčního podílu* $(f(a+t) - f(a)/t)$ pro $t \to 0$, dostáváme z příslušné věty o limitě následující větu:

Věta 4.1. *Funkce f má v bodě a derivaci tehdy a jen tehdy, má-li v tomto bodě derivace zprava i zleva a tyto derivace jsou si rovny.*

Vztah mezi existencí *vlastní* derivace a spojitostí funkce v daném bodě vystihuje

Věta 4.2. *Má-li funkce f v bodě a vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz. Podle věty 3.7. existuje $K \in \mathbb{R}$ a $U^*(a)$ takové, že $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leq K$ pro $x \in U^*(a)$, a tedy pro taková x je $|f(x) - f(a)| \leq K\,|x - a|$. Podle vět 3.16, 3.6. a 3.4. je proto $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Poznámka 4.2. Je-li $f'(a) = +\infty$, pak f nemusí být v bodě a spojitá – viz následující cvičení.

Cvičení 4.2. Ukažte, že funkce $\operatorname{sgn} x$ má v 0 derivaci rovnou $+\infty$ a není tam spojitá.

Poznámka 4.3. Je-li funkce v bodě a spojitá, nemusí tam mít derivaci – uvažte funkci $|x|$ v bodě 0.

Platí

Věta 4.3. *Mají-li funkce f a g v bodě a vlastní derivace, pak je*

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) =& f'(a)+g'(a)\\ (f.g)'(a) =& f'(a)g(a)+f(a)g'(a);\end{aligned}$$

je-li navíc $g(a)\neq 0$, je také

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Analogicky pro jednostranné derivace.

Důkaz. První tvrzení plyne okamžitě z věty o limitě součtu. Dokažme druhé a třetí. Použijeme „geniální trik": přičtení a odečtení téhož.

$$\begin{gathered}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=\\ =\frac{1}{x-a}(f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a))=\\ f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a).\end{gathered}$$

Podle věty 4.2. je $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ a pomocí vět o limitě součtu a součinu odtud dostáváme druhé tvrzení.

Podle věty 4.2. je g spojitá v bodě a. Podle předpokladu je $g(a)\neq 0$. Proto podle věty 3.10. je $g(x)\neq 0$ v jistém $U_\delta(a)$. Pro $x\in U^*_\delta(a)$ je proto

$$\begin{gathered}\frac{1}{x-a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}\right)=\\ =\frac{1}{x-a}\frac{(f(x)-f(a))g(a)-f(a)(g(x)-g(a))}{g(x)g(a)}=\\ =\frac{1}{g(x)g(a)}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)-f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)\end{gathered}$$

a stačí opět použít větu 4.2, definici derivace a věty o limitě součtu a součinu.

Poznámka 4.4. Z důkazu věty je vidět, že ji lze snadno zobecnit na případ nevlastních derivací. Stačí například předpokládat, že pravé strany uvedených vzorců mají smysl v $\mathbb{R}^*$ a pro součin ještě spojitost f v bodě a a pro podíl spojitost g v bodě a.

Věta 4.4 (derivace složené funkce). *Nechť f je reálná funkce, g reálná nebo komplexní funkce, které mají vlastní derivace $f'(a)$ a $g'(A)$, $A = f(a)$. Potom funkce $g \circ f$ má derivaci v bodě a rovnou $g'(f(a)).f'(a)$.*

Důkaz. a) Nechť f navíc splňuje předpoklad $f(x) \neq f(a)$ v nějakém $U^*_\gamma(a)$, $\gamma > 0$. Můžeme zároveň předpokládat, že γ je tak malé, že $g \circ f$ je na $U_\gamma(a)$ definována. Potom pro $x \in U^*_\gamma(a)$ je

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Limita druhého zlomku je rovna $f'(a)$. Označíme-li $H(y) = \frac{g(y)-g(A)}{y-A}$ pro $y \in U^*_\delta(A)$, $\delta > 0$ dost malé, je první zlomek roven $(H \circ f)(x)$. Podle věty o limitě složené funkce je $\lim\limits_{x\to a}(H \circ f)(x) = \lim\limits_{y \to f(a)} H(y) = \lim\limits_{y\to A} H(y) = g'(A) = g'(f(a))$.

b) Může se ovšem stát, že takové okolí $U^*_\gamma(a)$ neexistuje. V takovém případě existuje posloupnost x_n, $x_n \to a$, $x_n \neq a$, že $f(x_n) = f(a)$, a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} = 0$. Protože $f'(a)$ existuje, musí být podle Heineho věty rovná 0. Máme tedy v takovém případě dokázat, že $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a} = 0$.

Poněvadž je $g'(A)$ vlastní, existují kladná čísla K a γ tak, že $|(g(y) - g(A))/(y - A)| \leq K$ pro $y \in U^*_\gamma(A)$. Je-li $\varepsilon > 0$, pak k němu existuje $\delta > 0$ tak, že $|(f(x) - f(a))/(x - a) - 0| < \varepsilon/K$. Protože je f v bodě a spojitá (věta 4.2.), můžeme δ volit tak malé, aby pro $x \in U^*_\delta(a)$ bylo $f(x) \in U_\gamma(A)$. Potom pro $x \in U^*_\delta(a)$ máme

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{pro } f(x) = f(a), \\ \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{pro } f(x) \neq f(a) \end{cases}$$

a zkoumaný výraz je proto menší než $K.\varepsilon/K = \varepsilon$ pro $x \in U_\delta^*(a)$.

Věta 4.5 (derivace inverzní funkce). *Nechť f je reálná ryze monotónní a spojitá funkce na $U_\gamma(a)$, $a \in \mathbb{R}$. Nechť $f'(a)$ existuje a je nenulová. Potom $(f^{-1})'$ existuje v bodě $A = f(a)$ a platí $(f^{-1})'(A) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(A))}$.*

Důkaz. Podle věty 3.25. je f^{-1} spojitá a ryze monotónní na $f(U_\gamma(a))$. Podle poznámky 3.25. je (substituce $y = f(x)$)

$$\lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{x-a}{f(x) - f(a)} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Poznámka 4.5. Vzoreček pro derivaci inverzní funkce (nikoli důkaz její existence) si lze snadno zapamatovat takto: víme-li, že $(f^{-1})'$ v bodě $f(x)$ existuje, pak derivováním identity $f^{-1}(f(x)) = x$ dostaneme podle věty o derivaci složené funkce $(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$, odkud (za předpokladu $f'(x) \neq 0$) máme $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$.

Existenci derivace inverzní funkce je možno dokázat za slabších předpokladů než ve větě 4.5: je-li f prostá na $U_\delta(a)$, $f'(a) \neq 0$ a f^{-1} je spojitá v $A = f(a)$, pak má f^{-1} v A derivaci rovnou $1/f'(a)$. K důkazu se použije věta o limitě složené funkce (substituce $x = f^{-1}(y)$, pro $y \to f(a)$ $f^{-1}(y) \to f^{-1}(f(a)) = a$); dostane se

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{y\to f(a)} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{y\to f(a)} \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}$$

a stačí užít větu o limitě podílu.

Příklad 4.5. $(\ln x)' = \frac{1}{e^y}\Big|_{y=\ln x} = 1/x$, $x \in (0, +\infty)$.

Cvičení 4.3. Ukažte, že pro $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ je $f'(x) = 1/x$.

Cvičení 4.4. Dokažte, že pro $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$ je $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$, $x \in (0, +\infty)$.

Příklad 4.6. Ukážeme, že $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Je totiž

$$\frac{\sin(x+t) - \sin x}{t} = \frac{2\cos\left(\frac{x+t+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+t-x}{2}\right)}{t} =$$

$$= \cos(x + t/2)\frac{\sin(t/2)}{t/2} \to \cos x \text{ pro } t \to 0;$$

protože je $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$, $x \in \mathbb{R}$, dostáváme $(\cos x)' = [\sin(\pi/2 - x)]' = -cos(\pi/2 - x) = -\sin x$.

Cvičení 4.5. Ukažte, že $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$, $x \neq \pi/2 + k\pi$, $(\operatorname{cotg} x)' = -1/\sin^2 x$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Použijte vyjádření $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x$, $\operatorname{cotg} x = \cos x/\sin x$.

Příklad 4.7. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f(x) = x^\alpha$, $x \in (0, +\infty)$ je $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, neboť je $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, a tedy $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}\alpha/x = \alpha x^{\alpha-1}$.

Cvičení 4.6. Ukažte, že pro $\alpha \in \mathbb{Z}$ platí $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $\alpha \geq 0$, resp. pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $\alpha < 0$, kde klademe $x^0 = 1$ a $0.x^{0-1} = 0$ pro $x \in \mathbb{R}$. Použijte binomickou větu, nebo rovnost $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-1} + b^{n-1})$ pro a, $b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

4.2. Tabulka derivací

V tomto oddílu uvádíme tabulku derivací základních funkcí. Pro počítání příkladů je ji třeba znát bez zaváhání. Většinu z nich jsme odvodili v předchozích oddílech, ostatní přenecháváme čtenáři jako užitečné cvičení.

1) $f(x) = C$, $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, $f'(x) = 0$.
2) $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1$.
3) $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
4) $(\ln|x|)' = 1/x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
5) $(a^x)' = a^x \ln a$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in (0, \infty)$.
6) $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$, $x \in (0, \infty)$, $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.
7) $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.
8) $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
9) $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$, $x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
10) $(\operatorname{cotg} x)' = -1/\sin^2 x$, $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
11) $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1 - x^2}$, $|x| < 1$.
12) $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1 - x^2}$, $|x| < 1$.
13) $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.
14) $(\operatorname{arccotg} x)' = -1/(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.
15) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $x \in \mathbb{R}$.
16) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $x \in \mathbb{R}$.
17) $(\operatorname{th} x)' = 1/\operatorname{ch}^2 x$, $x \in \mathbb{R}$.
18) $(\operatorname{cth} x)' = -1/\operatorname{sh}^2 x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

19) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, α celé záporné.

POZNÁMKA 4.6. Je-li f komplexní funkce, f_1 a f_2 její reálná a imaginární část, pak z věty 3.18. přímo plyne: f má derivaci v bodě $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f_1$ i f_2 mají v a vlastní derivace; platí pak $f'(a) = f_1'(a) + i f_2'(a)$.

PŘÍKLAD 4.8. Nechť $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ je komplexní číslo, α_1 a α_2 je jeho reálná a imaginární část. Definujme

$$e^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} e^{\alpha_1}(\cos\alpha_2 + i \sin\alpha_2).$$

Pomocí součtových vzorců pro trigonometrické fukce a vlastností exponenciální funkce se snadno dokáže rovnost $e^{\alpha+\beta} = e^\alpha . e^\beta$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Definujeme-li funkci $f(x) = e^{\alpha x}$ pro $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, pak se opět snadno ukáže, že $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$. Proveďte vše podrobně za cvičení.

4.3. Derivace vyšších řádů

Nechť funkce f má v každém bodě otevřeného intervalu J vlastní derivaci. Přiřadíme-li každému $x \in J$ číslo rovné derivaci funkce f v bodě x (tj. $f'(x)$), dostaneme funkci definovanou na J, kterou označíme f'.

DEFINICE 4.2. Nechť funkce f má vlastní derivaci v každém bodě nějakého $U_\gamma(a)$. Nechť její derivace f' má derivaci v bodě a: $(f')'(a) = A$. Potom číslo A nazýváme *druhou derivací* funkce f v bodě a. Tuto druhou derivaci označujeme $f''(a)$ nebo také $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(a)$. Indukcí pro $k \in \mathbb{N}$ definujeme $f^{(k)}(a) \stackrel{\text{def}}{=} (f^{(k-1)})'(a)$, pokud pravá má smysl a nazýváme ji *k -tou derivací* nebo také *derivací řádu k* funkce f v bodě a. Označujeme ji také $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(a)$. Pokládáme také $f^{(0)} = f$.

VĚTA 4.6 (Leibnizův vzorec). *Nechť funkce f a g mají v bodě a vlastní derivace do řádu n včetně, $n \in \mathbb{N}$. Potom i funkce $f.g$ má v bodě a vlastní derivaci řádu n a platí*

$$(*) \qquad (f.g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

Důkaz. Pro $n = 1$ je to věta 3.3. V obecném případě provedeme důkaz indukcí, tj. z předpokladu, že platí pro n odvodíme, že platí i pro $n+1$.

$$
\begin{aligned}
(f.g)^{(n+1)}(a) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'(a) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(a) g^{n-k}(a) + f^{(k)}(a) g^{(n-k+1)}(a)\right) = \\
&= f^{(n+1)}(a) g^{(0)}(a) + f^{(0)}(a) g^{(n+1)}(a) + \\
&+ \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a) \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a),
\end{aligned}
$$

kde jsme užili rovnost $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

4.4. Několik použití derivací

V tomto oddílu trochu předběhneme teorii a uvedeme několik použití derivací, která dokážeme později v kapitole 5. resp. v kapitole o diferenciálních rovnicích ve druhém díle těchto skript (nebo v [K3]).

Nejdříve dva efektivní postupy k výpočtu limit.

Věta (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť pro nějaké $a \in \mathbb{R}^*$ mají funkce f a g vlastní derivace na nějakém $U^*(a)$ a g' je tam nenulová. Nechť je dále splněna jedna z následujících podmínek:*

I. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, *$a \in \mathbb{R}^*$, $g(x) \neq 0$ v $U^*(a)$,*
II. $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$.

Potom platí: existuje-li $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A$, pak je také $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.

VĚTA (Taylorův vzorec). *Nechť f má v $a \in \mathbb{R}$ vlastní derivace do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně. Potom platí*

$$f(x) =$$
$$= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o(x-a)^n.$$

PŘÍKLAD. Najděme
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

ŘEŠENÍ. 1. Použijeme první větu. Je splněna první podmínka. Proto máme
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0+\sin x}{2x} \left(= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$
(Se závorkou jsme dvakrát použili l'Hospitalovo pravidlo, bez závorky jen jednou a pak známou limitu $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)/x = 1$.)

2. Užijme Taylorův vzorec.

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-(1-(\sin 0)x-(\cos 0)x^2/2+o(x^2))}{x^2} =$$
$$= \frac{x^2+o(x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \to \frac{1}{2}.$$

(Tento postup je často rychlejší, než vícenásobné použití l'Hospitalova pravidla.)

PŘÍKLAD. $\lim\limits_{x\to+\infty} x/e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} 1/e^x = 0$. Užili jsme případu II. Opakovaným použitím tohoto případu se dokáže, že $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha/e^x = 0$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Proveďte podrobně.

Formální použití l'Hospitalova pravidla může vést k nesprávným výsledkům:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x-1} \neq \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1.$$
(Není splněn předpoklad, že limita jmenovatele je rovna 0.)

Nakonec jedno použití funkce $e^{\alpha x}$. Podle příkladu 4.8. je $(e^{\alpha x})^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$. Proto funkce $e^{\alpha_0 x}$ je řešením diferenciální rovnice s konstantními koeficienty $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$ (a_k jsou daná čísla, $a_n \neq 0$) tehdy a jen tehdy, je-li α_0 kořenem polynomu $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$. Má-li tento polynom n různých kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, pak se dá ukázat, že každé řešení této rovnice má tvar $\sum_{k=0}^{n} c_k e^{\alpha_k x}$, kde c_k jsou čísla. Poněkud složitější vzorec platí i v případě, že polynom $P(\alpha)$ má vícenásobné kořeny.

Příklad. Pro rovnici $y'' - y = 0$ je $P(\alpha) = \alpha^2 - 1$ a má kořeny ± 1. Obecné řešení této rovnice má proto tvar $ce^x + de^{-x}$.

4.5. Diferenciál funkce

Pro funkce jedné proměnné nemá pojem diferenciálu teoreticky velký význam, protože je ekvivalentní existenci vlastní derivace. Jeho zobecnění pro funkce více proměnných je už podstatné. Má však i v případě funkcí jedné proměnné význam pro přibližný výpočet přírůstku funkce, jak ukazují příklady dále.

Věta 4.7. *Má-li funkce f v bodě a vlastní derivaci rovnou A, pak platí*

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a) \tag{$*$}$$

a naopak, existuje-li $A \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ tak, že platí $(*)$,má funkce f v bodě a vlastní derivaci rovnou A.

Důkaz. Je

$$\begin{aligned} f'(a) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - A \right| = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - A(x-a)|}{|x-a|} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(x) - f(a) - A(x-a) = o(x-a). \end{aligned}$$

Na tuto větu se můžeme podívat i takto: Aby existovala lineární funkce $g(t) = f(a) + At$ taková, že $f(a+t) - g(t) = o(t)$ pro $t = 0$ je nutné a stačí aby f měla v a vlastní derivaci. Pak je taková funkce (tj. takové číslo A) jediná a je $f'(a) = A$.

DEFINICE 4.3. *Diferenciálem* funkce f v bodě a se nazývá taková funkce $df(a)$, že $df(a)(t) = At$, $A \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$, pro kterou platí $f(a+t) - f(a) - df(a)(t) = o(t)$ pro $t = 0$.

POZNÁMKA 4.7. Diferenciál funkce f v bodě a je tedy taková lineární funkce přírůstku argumentu t, která se od celkového přírůstku funkce $f(a+t) - f(a)$ liší o veličinu $o(t)$, $(t = 0)$, tj. o nekonečně malou veličinu vyššího řádu, než je přírustek argumentu. Říká se také, že je to *hlavní část přírůstku* funkce.

Použijeme-li pojmu diferenciál, můžeme větu 4.7. přeformulovat takto:

VĚTA 4.7'. *Funkce f má v bodě a diferenciál právě když tam má vlastní derivaci. Přitom číslo A v diferenciálu je rovno $f'(a)$.*

PŘÍKLAD 4.9. Najděme přibližně $\sqrt{1,0001}$. Uvažme funkci $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x > -1$. Je $f(0) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ pro $x > -1$, a tedy $f'(0) = 1/2$. Proto je $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + o(x)$, $x = 0$. Pro $x = 0,0001$ tedy dostáváme $\sqrt{1,0001} \approx 1,00005$.

CVIČENÍ 4.7. Dokažte, že platí:

$$\begin{aligned} d(f+g)(a) &= df(a) + dg(a), \\ d(f.g)(a) &= g(a)df(a) + f(a)dg(a), \\ d(f/g)(a) &= \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{g^2(a)}. \end{aligned}$$

POZNÁMKA 4.8. V označení diferenciálu $df(a)$ uvádíme a proto, abychom vyjádřili to, že se jedná o diferenciál v bodě a. Pro různá a jsou diferenciály (tj. příslušná čísla A) obecně různá stejně jeko mohou být v různých bodech různé derivace.

POZNÁMKA 4.9. Symbolický zápis derivace $\frac{df(a)}{dx}$ vypadá formálně jako podíl. Je-li $g(x) = x$ funkce, je její diferenciál roven $dg(a)(t) = t$. Derivace funkce f v bodě a je pak rovna obyčejnému podílu diferenciálů funkcí f a g v bodě a.

4.6. Derivace funkce dané parametricky

Někdy bývá výhodné zadat funkci *parametricky* takto: zadáme hodnotu argumentu x funkce, v němž chceme počítat její hodnotu jako nějakou funkci $x = \varphi_1(t)$ parametru t a příslušnou funkční hodnotu y v bodě

$x = \varphi_1(t)$ jako jinou funkci $y = \varphi_2(t)$. Je-li φ_1 prostá, pak tento předpis opravdu zadává funkci $f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$. Výpočet derivace takto zadané funkce lze provést jednodušeji pomocí derivací funkcí φ_1 a φ_2 takto:

VĚTA 4.8. *Nechť funkce f je dána parametricky pomocí funkcí $x = \varphi_1(t)$ a $y = \varphi_2(t)$, kde φ_1 je prostá. Mají-li funkce φ_1 a φ_2 vlastní derivace v bodě t_0 a je $\varphi_1'(t_0) \neq 0$, pak má f derivaci v bodě $x_0 = \varphi_1(t_0)$ rovnou $\varphi_2'(t_0)/\varphi_1'(t_0)$.*

DŮKAZ plyne snadno z vět o derivaci složené a inverzní funkce (proveďte podrobně).

4.7. Parciální derivace funkce více proměnných

Tento krátký oddíl zde zařazujeme proto, abychom alespoň částečně zmenšili zpožďování výkladu matematiky vzhledem k potřebám výkladu fyziky. Podrobný matematický výklad viz například [K2].

Je-li f funkce n reálných proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pak *parciální derivací* této funkce podle k -té proměnné v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ nazýváme derivaci funkce $\varphi(x_k) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$ v bodě x_k^0, pokud tato existuje. Označujeme ji $\partial f/\partial x_k(x^0)$. Je tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k^0 + t, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x^0)}{t}.$$

Pro parciální derivace platí věty o derivování součtu, součinu, podílu a také (za příslušných předpokladů) věta o derivování složené funkce:

Je-li $F(x) = f(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x))$, pak je

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i}(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)) \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(x),$$

kde značíme zkráceně $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

KAPITOLA 5

VLASTNOSTI SPOJITÝCH A DERIVOVATELNÝCH FUNKCÍ

Pod slovem funkce budeme v této kapitole vždy rozumět reálnou nebo komplexní funkci jedné reálné proměnné, pokud nebude řečeno jinak.

5.1. Lokální vlastnosti

Následující věty jsou snadnými důsledky vět 3.7. a 3.10. Čtenář si může jejich důkaz provést za cvičení.

Věta 5.1. *Je-li reálná nebo komplexní funkce f spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak existuje $U_\gamma(a)$, na němž je f omezená. Analogicky pro jednostrannou spojitost.*

Věta 5.2. *Je-li reálná nebo komplexní funkce f spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak platí*

(1) *je-li $f(a) \neq 0$, pak existuje $U_\gamma(a)$, že $|f(x)| \geq |f(a)|/2 > 0$ na $U_\gamma(a)$.*
(2) *je-li f reálná, a $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), pak existuje $U_\gamma(a)$, že $f(x) \geq f(a)/2 > 0$ ($f(x) \leq f(a)/2 < 0$) na $U_\gamma(a)$.*

Analogicky pro jednostrannou spojitost.

Definice 5.1. Řekneme, že funkce f je *neklesající (rostoucí) v bodě* $a \in \mathbb{R}$, jestliže existuje $U^*_\gamma(a)$ tak, že $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) < f(a)$) pro $x \in U^{*-}_\gamma(a)$ a $f(x) \geq f(a)$ ($f(x) > f(a)$) pro $x \in U^{*+}_\gamma(a)$. Řekneme, že funkce f je *nerostoucí (klesající) v bodě* $a \in \mathbb{R}$, jestliže existuje $U^*_\gamma(a)$ tak, že $f(x) \geq f(a)$ ($f(x) > f(a)$) pro $x \in U^{*-}_\gamma(a)$ a $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) < f(a)$) pro $x \in U^{*+}_\gamma(a)$. Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ *lokální maximum (lokální minimum)*, jestliže existuje $U^*(a)$ tak, že $f(x) \leq f(a)$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TeX

$(f(x) \geq f(a))$ pro $x \in U^*(a)$. Platí-li místo neostrých nerovností ostré, mluvíme o *ostrém lokálním maximu (ostrém lokálním minimu)*. Lokální maxima a minima (ostrá) se nazývají *lokálními extrémy (ostrými)*.

Příklad 5.1. Funkce $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ má ostrá lokální maxima (minima) v bodech $\pi/2 + 2k\pi$ $(-\pi/2 + 2k\pi)$, k celé. V ostatních bodech je buď rostoucí nebo klesající.

Věta 5.3. *Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivaci (vlastní či nevlastní). Potom platí*

(1) *je-li $f'(a) > 0$ $(f'(a) < 0)$, je f v bodě a rostoucí (klesající).*
(2) *má-li f v bodě a lokální extrém, je $f'(a) = 0$.*
(3) *je-li f v bodě a neklesající (nerostoucí), pak je $f'(a) \geq 0$ $(f'(a) \leq 0)$.*

Důkaz. 1) Buď $f'(a) > 0$. Podle věty 3.10. existuje $U^*(a)$ tak, že $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ na $U^*(a)$, a tedy $f(x) - f(a) > 0$ pro $x - a > 0$ a $f(x) - f(a) < 0$ pro $x - a < 0$, a f je proto v bodě a rostoucí. Případ $f'(a) < 0$ přenecháváme čtenáři za cvičení.

2) Nechť má f v bodě a například lokální maximum, tj. $f(x) \leq f(a)$ pro $x \in U^*(a)$. Potom ovšem je $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ (≤ 0) pro $x - a < 0$ (> 0). Z první nerovnosti ovšem dostaneme $f'_-(a) \geq 0$ a z druhé $f'_+(a) \leq 0$. Poněvadž $f'(a)$ existuje, je $0 \leq f'_-(a) = f'(a) = f'_+(a) \leq 0$.

3) Poslední tvrzení dostaneme z prvního použitím obecné věty $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \operatorname{non} B \Rightarrow A$: f nerostoucí $\Rightarrow$ non(f rostoucí) $\Rightarrow$ $\operatorname{non} f'(a) > 0$ $\Leftrightarrow f'(a) \leq 0$.

Poznámka 5.1. Věta udává postačující (ale nikoli nutné) podmínky pro to, aby funkce byla rostoucí (klesající) v bodě a nutnou (nikoli postačující) podmínku pro to, aby funkce, která má v daném bodě derivaci, měla v tomto bodě lokální extrém. Poslední tvrzení je nutná (a nikoli postačující) podmínka pro to, aby funkce byla v bodě a neklesající (nerostoucí).

Příklad 5.2. Funkce $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ nemá v bodě 0 extrém, přestože je $f'(0) = 0$. Je v tomto bodě rostoucí, i když není $f'(0) > 0$.

5.2. Globální vlastnosti

VĚTA 5.4 (omezenost). *Je-li reálná nebo komplexní funkce f spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, pak je na tomto intervalu omezená.*

DŮKAZ. Kdyby f nebyla na $\langle a, b\rangle$ omezená, pak by existovala posloupnost $x_n \in \langle a, b\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, že $|f(x_n)| \geq n$. Posloupnost x_n je omezená, a proto z ní lze podle věty 2.13. vybrat konvergentní vybranou posloupnost x_{k_n}, $x_{k_n} \to x_0 \in \mathbb{R}$ pro $n \to \infty$. Podle věty 2.9. je $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Potom ovšem f není omezená na žádném okolí bodu x_0, a tedy podle věty 5.1. nemůže být spojitá v bodě x_0, a tedy ani na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Následující příklady ukazují, že na neomezeném nebo neuzavřeném intervalu věta obecně neplatí. Stačí také nespojitost v jednom bodě intervalu, aby funkce mohla být neomezená.

PŘÍKLAD 5.3. Funkce $f(x) = 1/x$, $x \in (0, 1\rangle$ je na $(0, 1\rangle$ spojitá, ale není tam omezená. Podobně funkce $g(x) = x$ na intervalu $\langle 1, \infty)$.

PŘÍKLAD 5.4. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{pro } x \in (0, 1\rangle, \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

je na $\langle 0, 1\rangle$ nespojitá pouze v bodě 0 a je tam neomezená.

Tato věta se dá zobecnit následovně:

VĚTA 5.4'. *Nechť f je spojitá na intervalu J a má vlastní jednostranné limity v jeho krajních bodech. Pak je f na J omezená.*

DŮKAZ. Z existence vlastních limit v krajních bodech plyne omezenost f na jistých okolích U^+ a U^- těchto bodů. Na $J \setminus (U^+ \cup U^-)$ (což je omezený uzavřený interval) je f spojitá a podle věty 5.4. omezená. Potom je ovšem omezená na $J = (J \setminus (U^+ \cup U^-)) \cup U^+ \cup U^-$.

DEFINICE 5.2. Nechť f je reálná funkce, $M \subset \mathcal{D}_f$, $M \neq \emptyset$. Označíme

$$\sup_M f = \sup f(M) = \sup\{f(x);\ x \in M\}$$
$$\inf_M f = \inf f(M) = \inf\{f(x);\ x \in M\}$$

Řekneme, že funkce f *nabývá na M svého maxima (minima)*, má-li množina $f(M)$ maximum (minimum), tj. existuje-li $x_0 \in M$ tak, že

$f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ pro všechna $x \in M$. Číslo $f(x_0)$ pak nazýváme *maximem (minimem) funkce f na množině M* a označujeme jej $\max\limits_M f$ $(\min\limits_M f)$.[7]

POZNÁMKA 5.2. Každá reálná funkce má na M supremum i infimum ($\in \mathbb{R}^*$), obecně tam ovšem nemusí mít maximum a minimum. Dále je zřejmé, že $\max\limits_M f = \sup\limits_M f$, $\min\limits_M f = \inf\limits_M f$, pokud maximum resp. minimum existuje.

PŘÍKLAD 5.5. Pro funkci $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ je $\sup\limits_{\mathbb{R}} f = \pi/2$, $\inf\limits_{\mathbb{R}} f = -\pi/2$, ale maximum ani mininum na $\mathbb{R}$ tato funkce nemá (je $-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2$ pro $x \in \mathbb{R}$).

Užitečné je si uvědomit platnost následujícího tvrzení, jehož důkaz je zřejmý:

VĚTA 5.5. *Nabývá-li funkce f maxima (minima) na intervalu J v bodě $x_0 \in J$, pak je x_0 buď krajní bod intervalu J, nebo je to takový vnitřní bod intervalu J, v němž má f lokální maximum (minimum).*

VĚTA 5.6 (o nabývání maxima a minima). *Nechť reálná funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak f nabývá na $\langle a, b\rangle$ svého maxima i minima.*

DŮKAZ. Podle věty 5.4. je f na $\langle a, b\rangle$ omezená, a tedy $G = \sup\limits_{\langle a,b\rangle} f \in \mathbb{R}$. Podle definice suprema existuje posloupnost $x_n \in \langle a, b\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, že $G - 1/n < f(x_n) \leq G$, a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = G$. Z posloupnosti x_n můžeme vybrat konvergentní vybranou posloupnost $x_{k_n} \to x_0 \in \langle a, b\rangle$. Díky spojitosti f je podle Heineho věty $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0)$. Na druhé straně je $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = G$, a tedy $f(x_0) = G$ a $f(x_0) = \max\limits_{\langle a,b\rangle} f$. Pro mimimum se důkaz provede analogicky, anebo lze užít již dokázané tvrzení o maximu na funkci $\tilde{f} = -f$ (zřejmě je $\max\limits_{\langle a,b\rangle} \tilde{f} = -\min\limits_{\langle a,b\rangle} f$).

POZNÁMKA 5.3. Spojitost na uzavřeném omezeném intervalu je pouze postačující podmínkou pro nabývání maxima a minima. Na druhé straně

[7]Supremum resp. infimum funkce jsme již definovali v kapitole 3. Uvádíme je zde znovu pro pohodlí čtenáře.

pro neuzavřený interval tvrzení věty obecně neplatí. Viz následující příklady.

PŘÍKLAD 5.6. Funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$ nabývá na $\mathbb{R}$ maxima $(= 1)$ ve všech bodech $x > 0$ a minima $(= -1)$ ve všech bodech $x < 0$.

PŘÍKLAD 5.7. Funkce $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, nenabývá ani maxima ani minima na žádném otevřeném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$.

PŘÍKLAD 5.8. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (-1, 1), \\ 0 & x = -1, 1 \end{cases}$$

nenabývá na $\langle -1, 1\rangle$ ani maxima, ani minima (není na $\langle -1, 1\rangle$ spojitá). Zřejmě je $\sup\limits_{\langle -1,1\rangle} f = 1$, $\inf\limits_{\langle -1,1\rangle} f = -1$.

Pro úplnost uveďme větu, kterou jsme dokázali a použili v kapitole 3. (věta 3.24):

VĚTA 5.7 (o nabývání všech mezihodnot). *Nechť f je reálná funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, a, $b \in \mathbb{R}$. Potom f nabývá na $\langle a, b\rangle$ všech hodnot mezi čísly $f(a)$ a $f(b)$.*

DŮSLEDEK. *Nechť f je reálná funkce definovaná a spojitá na intervalu I. Potom $f(I)$ je opět interval . Jeho koncovými body jsou body $\inf\limits_I f$ a $\sup\limits_I f$. Tyto koncové body patří do něj právě tehdy, nabývá-li f na I minima resp. maxima.*

DŮKAZ. Pro omezený uzavřený interval I to plyne okamžitě z vět 5.6. a 5.7. V obecném případě je předně $f(I) \subset \langle \inf\limits_I f, \sup\limits_I f\rangle$. Jsou-li $x_n, y_n \in I$ takové, že $f(x_n) \to \inf\limits_I f$, $f(y_n) \to \sup\limits_I f$ pro $n \to \infty$, pak podle věty 5.7. musí $f(I)$ obsahovat celý interval $\langle f(x_n), f(y_n)\rangle$, a tedy i otevřený interval $(\inf\limits_I f, \sup\limits_I f)$. Zbytek je zřejmý.

DEFINICE 5.3. Řekneme, že reálná nebo komplexní funkce f je *stejnoměrně spojitá* na intervalu I, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dva body $x', x'' \in I$ takové, že $|x' - x''| < \delta$ je $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Zřejmě platí: je-li f stejnoměrně spojitá na I, pak je spojitá na I (tj. spojitá v každém bodě intervalu I). Opačná implikace obecně neplatí, jak ukazuje

PŘÍKLAD 5.9. Nechť $f(x) = 1/x$, $x \in (0, 1\rangle$. f je zřejmě spojitá na $(0, 1\rangle$. Pro $x_n = 1/n$, $y_n = 1/2n$, $n \in \mathbb{N}$ je $|x_n - y_n| = 1/2n \to 0$, ale $|f(x_n) - f(y_n)| = n \geq 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro $\varepsilon = 1$ příslušné δ z definice stejnoměrné spojitosti neexistuje a funkce není stejnoměrně spojitá na $(0, 1\rangle$.

CVIČENÍ. Stejně jako v předchozím příkladu ukažte, že na $(0, 1\rangle$ není stejnoměrně spojitá funkce $f(x) = \sin(1/x)$.

VĚTA 5.8 (Cantorova). *Reálná nebo komplexní funkce f, která je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu I je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.*

DŮKAZ provedeme nepřímo. Kdyby tam f nebyla stejnoměrně spojitá, pak by existovalo $\varepsilon_0 > 0$ a posloupnosti x_n a y_n z I, že $|x_n - y_n| < 1/n$, ale $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost x_n je omezená, můžeme z ní proto vybrat konvergentní vybranou posloupnost $x_{k_n} \to x_0 \in I$. Potom také $y_{k_n} \to x_0$ a v důsledku spojitosti f v bodě x_0 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_{k_n}) = f(x_0)$. Potom ovšem $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| = 0$, což je spor s $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon_0$.

Následující věty se týkají funkcí majících derivaci.

VĚTA 5.9 (Rolleova). *Nechť reálná funkce f je*

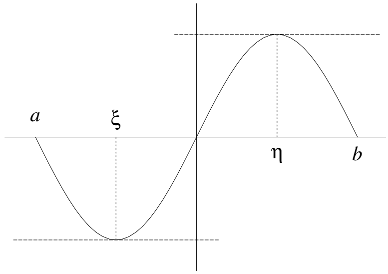
(1) *spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$,*
(2) *má na (a, b) derivaci,*
(3) *$f(a) = f(b)$.*

Potom existuje bod $\xi \in (a, b)$, že $f'(\xi) = 0$.

DŮKAZ. Podle věty 5.6. nabývá f na $\langle a, b\rangle$ svého maxima i minima. Je-li $\min\limits_{\langle a,b\rangle} f = \max\limits_{\langle a,b\rangle} f$, pak je f konstantní funkce a je $f'(\xi) = 0$ pro každé $\xi \in (a, b)$. Je-li $\min\limits_{\langle a,b\rangle} f < \max\limits_{\langle a,b\rangle} f$, pak aspoň jedno z nich se nabývá v nějakém bodě $\xi \in (a, b)$, neboť v krajních bodech jsou funkční hodnoty stejné. Potom ovšem má f v bodě ξ lokální extrém, a podle věty 5.3. je $f'(\xi) = 0$.

POZNÁMKA 5.4. Pro komplexní funkce tato věta neplatí: funkce e^{ix}, $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$ splňuje předpoklady (1) – (3) této věty, ale $|f'(x)| = |ie^{ix}| = 1$ pro každé $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

POZNÁMKA 5.5. Věta 5.9. má jednoduchou geometrickou interpretaci: existuje $\xi \in (a,b)$, že tečna ke grafu funkce v bodě $(\xi, f(\xi))$ je rovnoběžná s osou x, viz obr. 5.1.



OBR. 5.1

Stačí, aby funkce nesplňovala jeden z předpokladů věty 5.9, aby žádný bod ξ s uvedenou vlastností nemusel existovat – viz následující příklady.

PŘÍKLAD 5.10.

a) Funkce $f(x) = |x|$, $x \in \langle -1, 1\rangle$ nemá derivaci v bodě 0.

b) Funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = -1, \\ x & x \in (-1, 1\rangle \end{cases}$$

není spojitá v bodě -1 zprava.

c) Funkce $f(x) = x$, $x \in \langle -1, 1\rangle$ nesplňuje podmínku (3).

Pro ani jednu z těchto funkcí neexistuje $\xi \in (-1,1)$, pro něž by bylo $f'(\xi) = 0$.

VĚTA 5.10 (Lagrangeova, o přírůstku funkce). *Nechť reálná funkce f splňuje předpoklady (1) a (2) věty 5.9. Potom existuje $\xi \in (a,b)$ tak, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

tj. $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

DŮKAZ převedeme na předchozí větu a to tak, že od funkce f odečteme takovou lineární funkci l, $l(x) = \alpha x + \beta$, aby funkce $f - l$ splňovala přepoklad (3) této věty. Takovou funkcí je zřejmě $l(x) = f(a) +$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, $x \in \mathbb{R}$. Použijeme-li na $f - l$ větu 5.9, dostaneme existenci takového $\xi \in (a, b)$, že $f'(\xi) - l'(\xi) = 0$, tj. $f'(\xi) = l'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Geometricky to znamená, že existuje takové $\xi \in (a, b)$, že tečna ke grafu funkce f v bodě $(\xi, f(\xi))$ je rovnoběžná se sečnou, procházející body $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

Druhá formulace vyjadřuje přírůstek funkce pomocí přírůstku argumentu a hodnoty derivace v nějakém středním bodě ξ. Nedostatkem je, že bod ξ prakticky neznáme, víme jen, že existuje. To nám umožní, umíme-li odhadnout velikost derivace, odhadnout velikost přírůstku funkce, viz následující příklad.

Příklad 5.11. Protože $|(\sin x)'| \le 1$ a $|(\operatorname{arctg} x)'| \le 1$ pro $x \in \mathbb{R}$, dá nám použití věty 5.10. na tyto funkce na na libovolném intervalu $\langle a, b\rangle$ nerovnosti

$$|\sin b - \sin a| \le |b - a|$$
$$|\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a| \le |b - a|$$

Dalším zobecněním věty 5.9. je

Věta 5.11 (Cauchyova, zobecněná věta o přírůstku). *Nechť reálné funkce f a g splňují následující požadavky:*

(1) *f, g jsou spojité na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$.*
(2) *f má na (a, b) derivaci.*
(3) *g má na (a, b) vlastní nenulovou derivaci.*

Potom existuje $\xi \in (a, b)$, že

$$(*) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Důkaz. Předně je $g(b) - g(a) \ne 0$, neboť jinak by podle věty 5.8. bylo $g'(\xi) = 0$ pro nějaké x, což vylučuje předpoklad (3). Položíme-li

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)),$$

snadno ověříme, že Φ splňuje předpoklady věty 5.9. a její použití dá existenci takového $\xi \in (a, b)$, že $\Phi'(\xi) = 0$. Protože je $\Phi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi)$, je věta dokázána.

Poznámka 5.6. Přímé použití Lagrangeovy věty na čitatele a jmenovatele prvního zlomku v $(*)$ by dalo existenci takových $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$, že

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}.$$

Výhodou $(*)$, kterou využijeme například v oddílu 5.5. je, že se derivace f' a g' berou ve stejném bodě.

Poznámka 5.7. Důkaz věty 5.11. byl více méně formální. Zvolili jsme „kouzelnou" funkci Φ, na ni jsme použili větu 5.9. a dostali požadovaný výsledek. Avšak i věta 5.11. má názorný smysl: stačí se na dvojici funkcí f a g podívat jako na parametrické zadání funkce $F = f \circ g^{-1}$, anebo křivky v $\mathbb{R}_2$. $(*)$ vyjadřuje to, že tečna v bodě $(g(\xi), f(\xi))$ k této křivce (ke grafu funkce F) je rovnoběžná s přímkou, procházející body $(g(a), f(a))$, $(g(b), f(b))$ (viz oddíl 4.6. kapitoly 4. a oddíl 6.14. kapitoly 6.).

Důsledek 5.1. *Nechť f je reálná nebo komplexní funkce, která je spojitá na intervalu J. Je-li $f'(x) = 0$ na J^0, pak je f konstantní funkce.*[8]

Důkaz. a) Nechť je f reálná. Zvolme pevně bod $x_0 \in J$. Pro $x_1 \in J$, $x_1 > x_0$ použití věty 5.10. na interval $\langle x_0, x_1 \rangle$ dostaneme $f(x_1) = f(x_0)$. Analogicky užitím této věty na interval $\langle x_2, x_0 \rangle$, $x_2 \in J$, $x_2 < x_0$ dostaneme $f(x_2) = f(x_0)$. Celkem je tedy $f(x) = f(x_0)$ pro $x \in J$.

b) Pro f komplexní z předpokladu $f'(x) = 0$ na J^0 plyne $(\operatorname{Re} f)'(x) = (\operatorname{Im} f)'(x) = 0$ na J^0 a stačí aplikovat a) na $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$.

Důsledek 5.2 (o limitě derivací). *Nechť f je reálná nebo komplexní funkce, která je v bodě $a \in \mathbb{R}$ spojitá zprava (zleva) a má na U^{*+} (U^{*-}) vlastní derivaci f', pro kterou platí*

$$\lim_{x \to a+} f'(x) = A \ (\lim_{x \to a-} f'(x) = A).$$

Potom existuje $f'_+(a)$ ($f'_-(a)$) a je rovna A. V případě f reálné může být A rovno $\pm\infty$.

Důkaz. Stačí dokázat větu pro reálnou funkci. Pro komplexní funkci použijeme již dokázané na reálnou a imaginární část funkce f.

---

[8] J^0 je tzv. *vnitřek* intervalu J, což je otevřený interval se stejnými krajními body, jako má interval J.

Pro určitost uvažujme případ derivace zprava. Aplikujeme-li větu 5.10. na interval $\langle a, x\rangle$, $x \in U^{*+}(a)$, dostaneme

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi_x), \text{ kde } a < \xi_x < x.$$

Proto je $\lim\limits_{x\to a+} \xi_x = a$. Jelikož je $\lim\limits_{x\to a+} f'(x) = A$, je podle věty o limitě složené funkce také $\lim\limits_{x\to a+} f'(\xi_x) = A$, a tedy také $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$.

Cvičení 5.1. Nechť $f(x) = x^\alpha$, $x \in \langle 0, \infty)$, $\alpha > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ukažte, že $f'_+(0)$ existuje a je

$$f'_+(0) = \begin{cases} 0 & \alpha > 1, \\ 1 & \alpha = 1, \\ +\infty & \alpha \in (0,1). \end{cases}$$

Cvičení 5.2. Nechť funkce f má na (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$ omezenou derivaci a nechť existuje $\lim\limits_{x\to a+} f'(x) = A$. Potom

(1) existuje $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$),

(2) funkce

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \alpha & x = a, \\ f(x) & x \in (a, b) \end{cases}$$

má v bodě a derivaci zprava rovnou A.

Návod. Použijte B.-C. podmínku.

Definice 5.4. Řekneme, že funkce f splňuje na množině $M \subset \mathbb{R}$ *Lipschitzovu podmínku* s konstantou $K \in \mathbb{R}$, jestliže platí $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ pro všechna $x, y \in M$.

Cvičení 5.3. Dokažte

a) f má na (a, b) omezenou derivaci $\Rightarrow$ f splňuje na (a, b) Lipschitzovu podmínku $\Rightarrow$ f je na (a, b) stejnoměrně spojitá.
b) jsou-li $a, b \in \mathbb{R}$, pak platí: f stejnoměrně spojitá na (a, b) $\Rightarrow$ existují vlastní limity $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ $\Rightarrow$ existuje spojité rozšíření f na interval $\langle a, b\rangle$.

Návod. Pro důkaz b) použijte B.-C. podmínku.

DŮSLEDEK 5.3. *Nechť funkce f má v každém bodě intervalu J vlastní derivaci. Potom funkce $f'(x)$ může mít na J nespojitosti pouze druhého druhu, přičemž jen takové, že aspoň jedna jednostranná limita neexistuje.*

DŮKAZ. Poněvadž má f v každém bodě intervalu J vlastní derivaci, je na J spojitá. Podle důsledku 5.2. plyne z existence limity derivací v nějakém bodě $a \in J$ to, že tato limita je rovna derivaci $f'(a)$, a tedy derivace je v bodě a spojitá. Proto f' může mít nespojitosti pouze uvedeného typu.

PŘÍKLAD 5.12. Funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

má derivaci na celém $\mathbb{R}$, která je v 0 nespojitá (ověřte).

PŘÍKLAD 5.12A. Nechť

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

(Heavisideova funkce). Podle důsledku 5.3. neexistuje funkce f, definovaná na $(-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, pro kterou by bylo $f'(x) = H(x)$ na $(-\delta, \delta)$.

Pomocí Cauchyovy věty dokážeme nyní tzv. l'Hospitalovo pravidlo, které jsme již uvedli v předchozí kapitole (oddíl 4.4):

VĚTA 5.12 (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť pro nějaké $a \in \mathbb{R}^*$ mají funkce f a g vlastní derivace na nějakém $U^*(a)$, přičemž g' je tam nenulová.*

Nechť je dále splněna jedna z následujících podmínek:

I. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $g(x) \neq 0$ *pro* $x \in U^*(a)$,

II. $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = \infty$.

Potom platí: existuje-li $\lim\limits_{x \to a} f'(x)/g'(x) = A$, *pak je také* $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x) = A$. *Věta zůstane v platnosti, nahradíme-li oboustranné limity a okolí jednostrannými.*

DŮKAZ. I. Nechť nejprve je $a \in \mathbb{R}$ a pro určitost nechť je splněn předpoklad s limitou a okolím zprava. Dodefinujme f i g jejich limitami (tj. nulou) v bodě a. Takto získané funkce označme $\tilde{f}$ a $\tilde{g}$. Pro pevné $x > a$ (a dost blízké k a) funkce $\tilde{f}$ a $\tilde{g}$ splňují na $\langle a, x\rangle$ předpoklady Cauchyovy věty. Je proto

$$(*) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{\tilde{f}'(\xi(x))}{\tilde{g}'(\xi(x))} = \frac{f'}{g'}(\xi(x)).$$

Protože je $0 < \xi(x) < x$, je také $\xi(x) \to a+$ pro $x \to a+$, a tedy podle předpokladu a podle věty o limitě složené funkce je limita posledního zlomku v $(*)$ rovná A. Analogicky se provede důkaz pro limitu zleva. Případ $a = \pm\infty$ převedeme na již dokázaný případ. Uvažme opět pro určitost $a = +\infty$. Přejdeme k nové proměnné $y = 1/x \to 0+$ pro $x \to +\infty$. Podle věty o limitě složené funkce (přesněji podle poznámky 3.25) je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)},$$

pokud limita vpravo existuje. Ale funkce $F(y) = f(1/y)$ a $G(y) = g(1/y)$ díky $F'(y) = f'(1/y)(-1/y^2)$, $G'(y) = g'(1/y)(-1/y^2)$ a

$$(**) \qquad \lim_{y\to 0+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to 0+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

splňují předpoklad I. s $a = 0 \in \mathbb{R}$ (druhá rovnost v $(**)$ platí opět podle věty o limitě složené funkce), čímž je důkaz případu I. ukončen. Důkaz pro případ II. viz například [D1].

Věta 5.13. *Nechť reálná funkce f je spojitá na intervalu J a má derivaci na J^0. Potom je f nerostoucí (neklesající) na J tehdy a jen tehdy, je-li $f'(x) \le 0$ ($f'(x) \ge 0$) na J^0.*

Je-li $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) na J^0, pak je f klesající (rostoucí) na J.

Důkaz. To, že uvedené podmínky jsou postačující plyne ihned z věty 3.10. Kdyby naopak bylo $f'(x_0) > 0$ pro nějaké $x_0 \in J^0$, pak podle věty 5.3. by f byla rostoucí v bodě x_0, a nemohla by být nerostoucí na intervalu J. Analogicky pro neklesající funkci. Podrobnosti přenecháváme čtenáři za cvičení.

Z logického hlediska je zajímavá následující věta, vyjasňující souvislost mezi monotónií v bodě a na intervalu:

VĚTA 5.14. *Reálná funkce je rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající na intervalu J tehdy a jen tehdy, jestliže je rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající v každém bodě tohoto intervalu.*

DŮKAZ. Jedním směrem je to zřejmé, důkaz druhé implikace najde čtenář například v [D1].

Dokážeme nyní následující podmínky pro lokální extrém.

VĚTA 5.15. *I. (monotonnost na okolí) Nechť reálná funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$. Je-li f rostoucí (klesající) na $U^{*-}(a)$ a klesající (rostoucí) na $U^{*+}(a)$, pak má f v bodě a ostré lokální maximum (minimum). Analogická tvrzení platí, nahradíme-li slovo rostoucí slovem neklesající a slovo klesající slovem nerostoucí, přičemž ovšem extrémy nemusí být ostré.*

Je-li f rostoucí (klesající) jak na U^{*+} tak i na U^{*-}, pak f nemá v bodě a lokální extrém.

II. (znaménko derivace na okolí) Nechť reálná funkce f je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$. Je-li $f'(x) \geq 0$ (> 0) v $U^{*-}(a)$ a $f'(x) \leq 0$ (< 0) v U^{*+}, pak má f v bodě a lokální maximum (ostré lokální maximum). Je-li $f'(x) \leq 0$ (< 0) v $U^{*-}(a)$ a $f'(x) \geq 0$ (> 0) v U^{*+}, pak má f v bodě a lokální minimum (ostré lokální minimum).

Je-li $f'(x) < 0$ (> 0) v $U^{*}(a)$, pak f nemá v bodě a lokální extrém.

III. (užití derivací vyšších řádů) Nechť pro nějaké přirozené n, $n \geq 2$ je $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$. Je-li n sudé, pak má f v bodě a ostrý lokální extrém, a to maximum pro $f^{(n)}(a) < 0$ a minimum pro $f^{(n)}(a) > 0$.

Je-li n liché, pak f nemá v bodě a lokální extrém. Pro $f^{(n)}(a) > 0$ (< 0) je f v a rostoucí (klesající).

DŮKAZ. Nastává-li některá z možností v II, pak nastává odpovídající možnost v I. a stačí proto dokázat I.

Nechť je například f rostoucí na $U^{*-}(a)$ a klesající na $U^{*+}(a)$. Potom je $f(a) = \lim_{x \to a-} f(x) = \sup_{U^{*-}(a)} f$, a tedy $f(a) \geq f(x)$ pro $x \in U^{*-}(a)$. Dokažme, že platí ostrá nerovnost. Položíme-li pro $x \in U^{*-}(a)$ $\tilde{x} = (x + a)/2$, je $x < \tilde{x} < a$ a $f(x) < f(\tilde{x}) \leq f(a)$. Analogicky se ukáže nerovnost $f(x) < f(a)$ pro $x \in U^{*+}(a)$.

Podrobný rozbor ostatních možností přenecháváme čtenáři za cvičení. Poznamenejme, že v posledním případě odvodíme $f(x) < f(a)$ $(f(x) >$

$f(a)$) pro $x < a$ a $f(x) > f(a)$ ($f(x) < f(a)$) pro $x > a$, a tedy extrém v bodě a není.

III. budeme dokazovat indukcí podle n. 1) Buď $n = 2$. Máme tedy $f'(a) = 0$, $f''(a) \neq 0$, například $f''(a) > 0$. Potom je f' rostoucí v bodě a, a tedy $f'(x) < f'(a) = 0$ pro $x \in U^*-$ a $f'(x) > f'(a) = 0$ pro $x \in U^*+$, a podle II. má f v bodě a ostré lokální minimum. Pro $f''(a) < 0$ je důkaz analogický.

2) Nechť věta platí pro n. Dokažme, že pak platí i pro $n+1$. Máme tedy $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$, $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Uvažme funkci f'. Pro ni je splněn předpoklad věty s n. Je-li $n+1$ liché, je n sudé, a podle indukčního předpokladu má f' v bodě a ostrý lokální extrém. Přitom, je-li $f^{(n+1)}(a) > 0$, je to ostré lokální minimum. Proto je v $U^*(a)$ $f'(x) > f'(a) = 0$, a tedy podle II. je f v bodě a rostoucí. Pro $f^{(n+1)} < 0$ se analogicky ukáže, že f je v a klesající. Je-li $n+1$ sudé, pak je n liché, podle indukčního předpokladu pak f' je v bodě a rostoucí, a tedy je $f'(x) < f'(a) = 0$ pro $x < a$, $f'(x) > f'(a) = 0$ pro $x > a$. Podle II. má f v bodě a ostré lokální minimum.

Poznámka 5.8. Z toho, že $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^n(a) = 0$ nemůžeme udělat žádný závěr o tom, zda v bodě a je či není lokální extrém, ani jakého je druhu.

Příklad 5.13. Pro funkce $f_1(x) = x^5$, $f_2(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$ je $f_i^{(k)}(0) = 0$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2$. f_2 má v bodě 0 lokální minimum, zatímco f_1 v 0 extrém nemá. O obojím se snadno přesvědčíme: f_1 je rostoucí na $\mathbb{R}$ a nemá tedy žádný lokální extrém; $f_2(x) > 0$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a $f(0) = 0$.

Důležitou úlohou je nalezení tzv. *nulových bodů* funkcí. Uvedeme zde dva jednoduché důsledky vět 5.7. a 5.9, které říkají něco o existenci nebo jednoznačnosti nulových bodů.

Definice 5.4. Číslo $x_0 \in \mathbb{R}$ se nazývá *nulovým bodem* funkce f, je-li $f(x_0) = 0$.

Věta 5.16. *Nechť reálná funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li $f(a).f(b) < 0$, pak má f na (a, b) alespoň jeden nulový bod. Je-li f navíc ryze monotónní, pak je takový bod jediný.*

Věta 5.17. *Nechť reálná funkce f je spojitá na intervalu J a má na J^0 derivaci. Jsou-li $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$ dva nulové body funkce f, pak na intervalu (x_1, x_2) je alespoň jeden nulový bod její derivace f'.*

5.3. Funkce konvexní a konkávní. Inflexní body

Jako jsme pomocí první derivace zkoumali monotónnost funkce, budeme v tomto oddílu pomocí druhé derivace zkoumat zakřivení grafu funkce.

Nejprve nám půjde o vzájemnou polohu grafu funkce a tečny k němu v okolí dotykového bodu. Připomeňme definici tečny:

Definice 5.5. Nechť funkce f je definována na $U_\delta(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že přímka $y = f(x_0)+k(x-x_0)$ je *tečnou* ke grafu funkce f v bodě x_0, je-li

$$f(x) - f(x_0) + k(x - x_0) = o(x - x_0).$$

Podle věty 4.7. je existence tečny ekvivalentní existenci vlastní derivace funkce f v bodě x_0 a rovnice tečny je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Definice 5.6. 1) Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *ryze konvexní (ryze konkávní)*, jestliže v nějakém $U^*(x_0)$ je

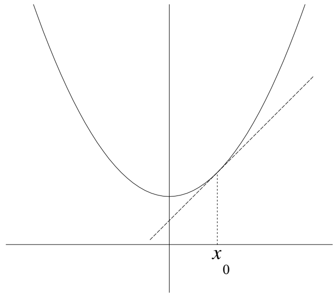
$$(*)\quad f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\ (f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

2) Řekneme, že bod x_0 je *inflexním bodem* funkce f, jestliže v $U^{*+}(x_0)$ platí jedna z nerovností z $(*)$ a v $U^{*-}(x_0)$ nerovnost opačná.

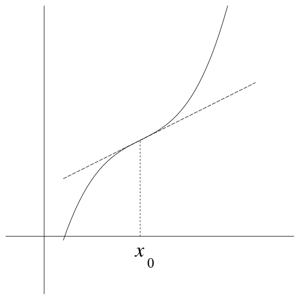
3) Platí-li v $(*)$ místo ostrých nerovností neostré, mluvíme o *konvexnosti (konkávnosti)* funkce v bodě x_0, resp. o *(slabém) inflexním bodu* funkce.

Poznámka 5.9. Geometricky to znamená, že graf funkce je v $U^*(x_0)$ buď nad tečnou v bodě x_0 nebo pod ní (viz obr. 5.2), resp. na jedné straně je pod tečnou a na druhé nad tečnou (viz obr. 5.3). V případě pojmů z bodu 3) se dovoluje, aby body grafu funkce ležely na tečně.

Příklad 5.13. Funkce $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ má inflexní body $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; v bodech, v nichž je $\sin x > 0$ ($\sin x < 0$) je f ryze konkávní (ryze konvexní).



Obr. 5.2



Obr. 5.3

Příklad 5.14. Lineární funkce $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$ (a, b jsou daná reálná čísla), je ve všech bodech konvexní i konkávní a všechny body jsou jejími slabými inflexními body. Zřejmě je $f''(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Odvodíme nyní postačující (a ne nutnou) podmínku pro ryzí konvexnost (ryzí konkávnost) a nutnou (nikoli postačující) pro inflexní bod.

Věta 5.18. *1) Je-li $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), je funkce f v bodě x_0 ryze konvexní (ryze konkávní). 2) Je-li x_0 inflexní bod funkce f a $f''(x_0)$ existuje, pak je $f''(x_0) = 0$.*

Důkaz. 1) Z $f''(x_0) > 0$ plyne, že $f'(x_0)$ je v bodě x_0 rostoucí. Pro $x > x_0$ je tedy $f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0)$, neboť je $\xi_x > x_0$, analogicky pro $x < x_0$ je také $f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x)(x - x_0) >$

$f'(x_0)(x-x_0)$, neboť $f'(\xi_x) < f'(x_0)$ (vynásobením této nerovnosti záporným číslem $(x-x_0)$ dostaneme $f'(\xi_x)(x-x_0) > f'(x_0)(x-x_0)$ pro $x < x_0$). Pro $f''(x_0) < 0$ je postup analogický. 2) Je-li x_0 inflexní bod, pak podle dokázaného nemůže být ani $f''(x_0) > 0$ ani $f''(x_0) < 0$, a je proto $f''(x_0) = 0$.

Následující věta dává dvě postačující podmínky pro inflexní bod.

VĚTA 5.19. *I. Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f''(x).f''(y) < 0$ pro $x < x_0$ a $y > x_0$ (při přechodu přes x_0 druhá derivace změní znaménko), je x_0 inflexní bod.*

II. Je-li pro nějaké $n > 2$ $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, pak pro n liché je x_0 inflexní bod a pro n sudé není x_0 inflexním bodem (f je v něm ryze konvexní resp. ryze konkávní podle znaménka $f^{(n)}(x_0)$).

DŮKAZ. I. Uvažujme pro určitost $f''(x) > 0$ pro $x < x_0$ a $f''(x) < 0$ pro $x > x_0$. Podle věty 5.15. má f' v x_0 ostré lokální maximum, tj. $f'(x) < f'(x_0)$ v $U^*(x_0)$. Podle Lagrangeovy věty je $f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x)(x-x_0)$, což je pro $x > x_0$ větší a pro $x < x_0$ menší než $f'(x_0)(x-x_0)$.

II. Derivace f' splňuje za daných předpokladů předpoklad III. věty 5.15. s $n-1$ místo n. Je-li tedy n liché, je $n-1$ sudé, a f' má tedy v x_0 ostrý lokální extrém. Stačí tedy zopakovat uvahy z důkazu I. Je-li n sudé, je $n-1$ liché, a nechť pro určitost je $f^{(n)}(x_0) > 0$. Podle věty 5.15.III. je f' v x_0 rostoucí. Analogicky jako při důkazu I. se ukáže nerovnost $f(x) - f(x_0) > f'(x_0)(x-x_0)$ pro $x \in U^*(x_0)$.

Až dosud se vše týkalo nějakého (obecně malého) okolí daného bodu. Nyní si řekneme něco o chování funkce na daném intervalu.

VĚTA 5.20. *Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a $f''(x) > 0$ na (a,b).Potom pro každou trojici čísel $x_1, x_2, x_3 \in \langle a,b\rangle$, $x_1 < x_2 < x_3$ je*

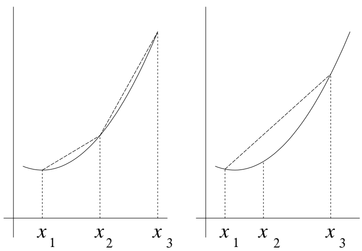
$$(**)\qquad \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

DŮKAZ. Z $f''(x) > 0$ na (a,b) plyne, že f' je rostoucí na (a,b). Podle Lagrangeovy věty je první zlomek v $(**)$ roven $f'(\xi)$ a druhý $f'(\eta)$, kde $\xi \in (x_1,x_2)$, $\eta \in (x_2,x_3)$, a tedy je $f'(\xi) < f'(\eta)$.

Poznámka 5.10. Význam $(**)$ je následující: zlomky jsou rovny směrnicím sečen, procházejících body $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2)$ resp. $(x_2), f(x_2)$, $(x_3, f(x_3))$ a nerovnost říká, že směrnice levé sečny je menší než pravé (viz obr. 5.4a). Dalo by se dokázat (proveďte za cvičení), že $(**)$ je ekvivalentní podmínce

$$(***) \qquad f(x_2) < f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1)$$

pro každou trojici $x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 < x_2 < x_3$, jejíž geometrický význam je tento: graf funkce f pro $x \in \langle x_1, x_3\rangle$ leží pod sečnou $y = g(x) = f(x_1) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x - x_1)$, procházející body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$, viz obr. 5.4b. Podmínka $(***)$ se bere za definici *ryzí konvexnosti funkce na intervalu* $\langle a, b\rangle$. Věta 5.20. pak dává postačující podmínku ryzí konvexnosti funkce na intervalu.



Obr. 5.4

Poznámka 5.11. Ve větě 5.20. a v poznámce 5.10. můžeme nahradit ostré nerovnosti neostrými a dojít ke dvěma ekvivalentním podmínkám *konvexnosti funkce na intervalu* $\langle a, b\rangle$. Podobně lze dokázat věty, které dostaneme z věty 5.20. nahrazením všech nerovností opačnými (ostrými resp. neostrými). Analogicky lze modifikovat poznámku 5.10. a dojít k definici *ryzí konkávnosti funkce* resp. *konkávnosti funkce na intervalu* $\langle a, b\rangle$.

5.4. Asymptoty

Definice 5.7. Nechť $f(x)$ je definována na (a, b), $b \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x \to b-} f(x) =$

$+\infty$ $(-\infty)$. Potom říkáme, že funkce f má v bodě b *vertikální asymptotu.* Analogicky pro levý krajní bod (pokud je zase $a \in \mathbb{R}$).

DEFINICE 5.8. Nechť f je definována na $(a, +\infty)$. Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je *asymptotou funkce f pro $x \to +\infty$*, je-li

$$(*) \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx + q)] = 0.$$

Analogicky pro $x \to -\infty$, je-li f definována na $(-\infty, b)$.

VĚTA 5.21. *Aby přímka $y = kx + q$ byla asymptotou funkce f pro $x \to \pm\infty$ je nutné a stačí, aby platilo*

$$1) \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R},$$
$$2) \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = q \in \mathbb{R}.$$

DŮKAZ. Nechť $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - (kx + q)) = 0$. Potom zřejmě také $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)-(kx+q)}{x} = 0$. Poněvadž ale $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{kx+q}{x} = k$, je také $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)/x = k$. 2) pak plyne ihned z $(*)$. Naopak $(*)$ plyne přímo z 2).

5.5. Průběh funkce

Pod úlohou najít průběh funkce rozumíme sestrojení přibližného grafu této funkce, který by dával jistou představu o jejím chování. V konkrétních případech mohou být požadavky na výstižnost grafu různé.

Postup při řešení této úlohy je možno shrnout do následujících bodů:

(1) body nebo intervaly spojitosti funkce, její limity v bodech nespojitosti nebo v krajních bodech definičního intervalu,
(2) sudost, lichost, periodičnost, omezenost funkce apod.,
(3) množiny, kde je funkce monotónní,
(4) body lokálních extrémů, případně hodnoty v nich,
(5) nulové body funkce,
(6) konkávnost, konvexnost funkce, inflexní body,
(7) asymptoty.

Všechny tyto otázky byly probrány v předchozích oddílech. Připomeňme jen definice pojmů, uvedených v (2):

Definice 5.9. Řekneme, že funkce f je *sudá (lichá)* na intervalu J, symetrickém vzhledem k počátku, je-li $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$ pro $x \in J$. Řekneme, že funkce je *periodická s periodou* $T > 0$ *na* $\mathbb{R}$, je-li $f(x+T) = f(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Zřejmě, je-li T perioda, je také $T_n = nT$, $n \in \mathbb{N}$ periodou, a jde o to najít nejmenší periodu.

Je-li funkce sudá (lichá), pak stačí najít její graf pro $x > 0$, je-li periodická, pak stačí najít její graf na nějakém intervalu, jehož délka je rovná periodě.

Příklad 5.15. Vyšetřeme průběh funkce $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) f je spojitá na celém $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

(2) f je sudá, je omezená na každém omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$, ale není omezená na $\mathbb{R}$.

(3) $f'(x) = x/\sqrt{1+x^2}$, a tedy f je rostoucí na intervalu $\langle 0, +\infty)$ a klesající na $(-\infty, 0\rangle$.

(4) $f'(x) = 0$ pouze pro $x = 0$. Z předchozího plyne, že v bodě 0 má ostré lokální minimum (což by se dalo dokázat i z toho, že $f''(x) = 1/(1+x^2)^{3/2}$, a tedy $f''(0) = 1 > 0$). Jiné lokální extrémy funkce nemá. $f(0) = 1$.

(5) funkce nemá žádné nulové body, je vždy větší nebo rovná 1.

(6) $f''(x) > 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, a tedy je f ryze konvexní na $\mathbb{R}$.

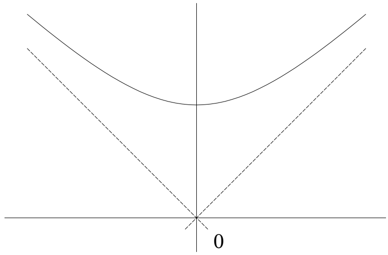
(7) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\sqrt{1/x^2+1}}{x} = \pm 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x^2} - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0$ (analogicky pro $x \to -\infty$). Funkce má tedy dvě asymptoty: $y = x$ pro $x \to +\infty$ a $y = -x$ pro $x \to -\infty$.

Graf této funkce je na obr. 5.5.

Příklad 5.16. Vyšetřeme průběh funkce

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(1) f je spojitá na $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$.
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = (1/4)\lim\limits_{x\to 0}(2x-5) + (1/2)\lim\limits_{x\to 0}(7x-3)/x^2 = -\infty$.



OBR. 5.5

Funkce má v 0 vertikální asymptotu.
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}(2x - 5 + 14/x - 6/x^2)/4 = \pm\infty.$

(2) f není ani sudá ani lichá, není na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ omezená.

(3) $f'(x) = (x^3 - 7x + 6)/2x^3 = (x-1)(x-2)(x+3)/2x^3$, $x \neq 0$. f' je kladná, a tedy f je rostoucí na intervalech $(-\infty, -3\rangle$, $(0, 1\rangle$, $\langle 2, +\infty)$, a f' je záporná, a tedy f klesající na intervalech $\langle -3, 0)$, $\langle 1, 2\rangle$.

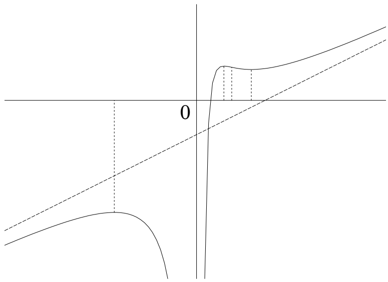
(4) Odtud je vidět, že v bodě $x = -3$ má f ostré lokální maximum, $f(-3) = -49/12$. V bodě 1 má ostré lokální maximum, $f(1) = 5/4$, v bodě 2 má ostré lokální minimum, $f(2) = 9/8$.

(5) Poněvadž je $2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 2(x - 1/2)(x^2 - 2x + 6)$, $x \in \mathbb{R}$, je $f(x) = 0$ pouze pro $x = 1/2$.

(6) $f''(x) = (7x - 9)/x^4$, $x \neq 0$, a tedy $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 9/7)$ – f je na těchto intervalech ryze konkávní. $f''(x) > 0$ pro $(9/7, +\infty)$ a f je tam ryze konvexní. $f''(9/7) = 0$, a protože v bodě $x = 9/7$ mění f'' znaménko, má f v tomto bodě inflexní bod. Je $f(9/7) = 913/756 \approx 1,2$.

(7) Najděme nakonec asymptoty. Je $\lim_{x\to\pm\infty}(2x^3 - 5x^2 + 14x - 6)/4x^3 = 1/2$, $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - x/2] = -5/4$. Funkce má proto asymptotu $y = x/2 - 5/4$ pro $x \to \pm\infty$. Kromě toho má, jak již bylo řečeno, vertikální asymptotu v bodě $x = 0$.

Graf této funkce je na obrázku 5.6.



Obr. 5.6

5.6. Maximální a minimální hodnoty reálné funkce na dané množině

Začněme jednoduchým případem.

I. Nechť funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Podle věty 5.6. nabývá na $\langle a, b\rangle$ maxima i minima. Abychom našli tyto hodnoty a body, v nichž je funkce nabývá, postupujeme takto:

Jsou dvě možnosti. Buď funkce nabývá svého maxima (minima) na $\langle a, b\rangle$ v některém z krajních bodů tohoto intervalu, anebo v některém vnitřním bodě $x_0 \in (a, b)$ (nebo ovšem i na kraji i uvnitř). Podezřelými vnitřními body, v nichž může nabývat svého maxima (minima) mohou být (podle vět 5.3. a 5.5.) pouze takové body, v nichž má funkce nulovou derivaci, nebo derivaci nemá. Nechť takových „podezřelých" bodů je je konečně mnoho: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Potom

$$\max_{\langle a,b\rangle} f = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\},$$

analogicky pro minimum.

Poznamenejme ještě, že v některých z bodů $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lokální (a tedy ani globální) extrém být nemusí, ale je často jednodušší uvážit i hodnotu v takových bodech, než zkoumat, zda je podezřelý bod skutečně bodem lokálního extrému.

Příklad 5.17. $f(x) = \sin x^2$, $x \in \langle -\sqrt{\pi}, \sqrt{5\pi}/2\rangle = J$. $f'(x) = 2x\cos x^2$, a tedy $f'(x) = 0$ pro $x = 0$ a taková x, pro něž je $\cos x^2 = 0$, tj. $x^2 = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Z těchto bodů pouze body $\pm\sqrt{\pi/2}$ leží uvnitř J. Je dále $f(0) = 0$, $f(\pm\sqrt{\pi/2}) = 1$, $f(-\sqrt{\pi}) = 0$, $f(\sqrt{5\pi}/2) = \sin(5\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, a tedy

$$\max_J f = \max\{0, -\sqrt{2}/2, 0, 1, 1\} = 1,$$
$$\min_J f = \min\{0, -\sqrt{2}/2, 0, 1, 1\} = -\sqrt{2}/2.$$

Maximální hodnotu nabývá funkce ve dvou vnitřních bodech $\pm\sqrt{\pi/2}$, minimální v pravém krajním bodě.

II. Jestliže se nejedná o omezený uzavřený interval, anebo funkce není na daném intervalu spojitá, nemáme existenci maxima (minima) funkce na dané množině zajištěnu. V takovém případě nelze ukázat obecný postup (jako v I.) jak zjistit, zda extrémy existují a jak je najít. Ukažme si, jak je možné postupovat v některých speciálních případech.

1) Někdy se dá maximum (minimum) „uhodnout": $\min_{\mathbb{R}} \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+0} = 1$.

2) Je možné hledat supremum (infimum) funkce na dané množině a pak zkoumat, zda je funkce na této množině nabývá.

3) Je možné rozdělit uvažovanou množinu na části, na nichž je určení maxima jednodušší, a pak vzít největší ze všech maxim jednotlivých částí (analogicky pro minimum, supremum, infimum).

Nakonec jedno malé zobecnění postupu I.:

4) Nechť f je spojitá na intervalu (a, b) a má vlastní jednostranné limity A, B v krajních bodech a, b. Nechť dále počet bodů intervalu (a, b), ve kterých f může mít lokální extrém je konečný: $x_1, x_2, \dots, x_n$. Aby f nabývala na (a, b) maxima je nutné a stačí, aby

$$(*) \qquad H \equiv \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} \geq K \equiv \max\{A, B\}.$$

Platí-li $(*)$, je $\max_{(a,b)} f = H$. Analogicky pro minimum (zformulujte podrobně).

Důkaz. Nabývá-li f maxima na (a, b), pak je to v nějakém bodě lokálního maxima, a tedy v nějakém x_j z $x_1, x_2, \dots, x_n$. Proto je $f(x_j) \geq f(x)$ pro $x \in (a, b)$, a tedy podle věty o limitním přechodu v nerovnosti dostaneme $A = \lim_{x\to a+} f(x) \leq f(x_j)$, stejně pro B. Nechť naopak platí $(*)$. Pro $a, b \in \mathbb{R}$ dodefinujme f jejími limitami A, B v bodech a, b.

Dostaneme funkci $\tilde{f}$, spojitou na $\langle a, b\rangle$. Ta na $\langle a, b\rangle$ nabývá maxima v některém z bodů $a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Protože ale platí $(*)$, musí to být v některém bodě x_j. Je tedy $\tilde{f}(x_j) \geq \tilde{f}(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$, odkud plyne $f(x_j) \geq f(x)$ pro $x \in (a, b)$. Důkaz pro $a, b \in \mathbb{R}^*$ lze provést tak, že zobecníme větu o nabývání maxima na spojitou funkci na uzavřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}^*$.

Tento postup je možno přizpůsobit i za jiných předpokladů (viz příklad 5.19).

Cvičení 5.4. Splňuje-li f předpoklady bodu 4) (bez $(*)$) výše, ukažte, že f je na (a, b) omezená a

$$\sup_{(a,b)} f = \max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), A, B\},$$
$$\inf_{(a,b)} f = \min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), A, B\}.$$

Příklad 5.18. Je-li $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, pak je f spojitá na $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $f'(x) = (1 - x^2)/(1 + x^2)^2$, a tedy $f'(x) = 0$ pouze pro $x = \pm 1$, což jsou všechny podezřelé body z lokálního extrému, $f(\pm 1) = \pm 1/2$. Je proto $\max\{f(1), f(-1)\} = 1/2 > \max\{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\}$ $= 0$. Je proto $\max\limits_{\mathbb{R}} f = 1/2$ a nabývá se v bodě 1. Analogicky nabývá f svého minima na $\mathbb{R}$ v bodě -1. Nakreslete graf této funkce (zřejmě je lichá).

Příklad 5.19. Je třeba najít válec, který má ze všech válců daného objemu $V > 0$ nejmenší povrch.

Nejdříve musíme úlohu správně formulovat jako úlohu najít minimum nějaké funkce na jisté množině.

Je-li h výška válce a r poloměr jeho podstavy, je povrch válce S dán vzorcem $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Poněvadž r a h jsou podřízeny požadavku $V = \pi r^2 h$, můžeme například h vyjádřit pomocí r (a V) a dostaneme

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}. \qquad (**)$$

Podle smyslu úlohy může být r libovolné kladné číslo.

Úlohu jsme převedli na úlohu najít minimum funkce $(**)$ na množině $(0, +\infty)$. S je na tomto intervalu spojitá, v krajních bodech má limity

$\lim_{r\to 0+} S(r) = \lim_{r\to +\infty} S(r) = +\infty$. Tvrzení bodu 4) je možné zobecnit na případ nevlastních limit (proveďte to). Poněvadž je $S'(r) = 4\pi r - 2V/r^2$, je $S'(r) = 0$ pouze v bodě $r_0 = \sqrt[3]{V/2\pi}$. Dále je $S(r_0) < \lim_{r\to 0+} S(r) = \lim_{r\to +\infty} S(r) = +\infty$, a tedy $S(r_0)$ je minimum S na $(0, +\infty)$. Hledaný válec má tedy rozměry $r_0 = \sqrt[3]{V/2\pi}$, $h_0 = 2\sqrt[3]{V/2\pi} = 2r_0$.

V daném případě jsme to, že $S(r_0)$ je minimem S na $(0, +\infty)$ mohli odůvodnit jednodušeji: $S'(r) > 0$ pro $r > r_0$, $S'(r) < 0$ pro $r < r_0$, a tedy je S rostoucí na $\langle r_0, +\infty)$ a klesající na $(0, r_0\rangle$. Je proto $S(r_0) < S(r)$ pro $r \in (0, +\infty) \setminus \{r_0\}$.

5.7. Taylorův vzorec

V tomto oddílu zobecníme věty 4.7. a 5.10. Větu 4.7. je možno vyslovit takto: Má-li funkce f vlastní derivaci v bodě x_0, pak existuje právě jeden mnohočlen $P_1(x)$ stupně nejvýše 1, pro nějž platí

$$f(x) - P_1(x) = o(x - x_0).$$

Tento mnohočlen má tvar $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Platí

VĚTA 5.22 (Peanova). *Nechť funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní derivace do řádu n včetně, kde n je přirozené. Potom existuje právě jeden mnohočlen $P_n(x)$ stupně nejvýše n (anebo nulový), že platí*

$$f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

Tento mnohočlen je dán vzorcem

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

nazývá se Taylorovým mnohočlenem $n-$tého stupně a označuje se $\mathcal{T}_n(x; x_0, f)$.

Důkazu předešleme tři lemmata:

LEMMA 5.1. *Nechť f a g mají vlastní derivace v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ až do řádu n včetně, (n přirozené). Je-li $f^{(i)}(x_0) = g^{(i)}(x_0) = 0$, i=1,2, ... ,n-1, $g^{(n)}(x_0) \neq 0$, pak je $g(x) \neq 0$ na jistém okolí $U^*(x_0)$ a*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

DŮKAZ provedeme indukcí podle n. Nechť je $n = 1$. Potom je $g(x)$ ryze monotónní v bodě x_0 ($g'(x_0) \neq 0$), a tedy $g(x) \neq 0$ na nějakém okolí $U^*_\delta(x_0)$ a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{(f(x) - f(x_0))/(x - x_0)}{(g(x) - g(x_0))/(x - x_0)} \to \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

pro $x \to x_0$.

Nechť lemma platí pro n. Dokažme je pro $n + 1$. Položíme-li $F(x) = f'(x)$ a $G(x) = g'(x)$, pak F a G splňují předpoklady lemmatu pro n, a tedy $G(x) = g'(x) \neq 0$ na nějakém $U^*_\delta(x_0)$ a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n)}(x_0)}{G^{(n)}(x_0)} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{g^{(n+1)}(x_0)}.$$

Funkce f a g jsou spojité a mají derivace na jistém okolí $U_\gamma(x_0)$ (neboť mají v x_0 $(n + 1)$-ní derivaci). Volíme-li $\gamma < \delta$, je také $g'(x) \neq 0$ na $U^*_\gamma(x_0)$. Můžeme proto použít l'Hospitalova pravidla, a dostaneme

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{g^{(n+1)}(x_0)}.$$

LEMMA 5.2. *Nechť funkce f má v bodě x_0 vlastní derivace do řádu n včetně ($n \in \mathbb{N}$). Potom*

(1) $f(x) = o((x - x_0)^n) \Leftrightarrow f^{(k)} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$,
(2) $f(x)$ *je řádu n vzhledem k $(x - x_0)^n \Leftrightarrow f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že platí některá z pravých stran a zkoumejme $f(x)/(x - x_0)^n$. Položíme-li $g(x) = (x - x_0)^n$, je $g^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, $g^{(n)} = n! \neq 0$, a tedy podle lemmatu 5.1. je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \begin{cases} 0 & \text{pro } f^{(n)}(x_0) = 0, \\ \neq 0 & \text{pro } f^{(n)}(x_0) \neq 0. \end{cases}$$

Dokažme opačné implikace. Nechť platí některá z levých stran. Dokažme nejdříve, že pro $k = 0, 1, \ldots, n-1$ je $f^{(k)}(x_0) = 0$. Kdyby to nebyla pravda, pak pro nějaké $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ by bylo $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, $f^{(m)}(x_0) \neq 0$. Potom by ale první zlomek na pravé straně v

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f(x)}{(x-x_0)^m} \frac{1}{(x-x_0)^{n-m}}$$

měl podle první části důkazu nenulovou limitu. Protože druhý nemá vlastní limitu, dostali bychom spor s existencí vlastní limity $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n}$. Zbývá dokázat tvrzení o $n-$té derivaci. Podle lemmatu 5.1. je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Pravá strana je rovna 0 právě když je $f^{(n)}(x_0) = 0$, tj. je-li $f(x) = o((x-x_0)^n)$, musí být $f^{(n)}(x_0) = 0$, je-li $f(x)$ řádu n vzhledem k $(x-x_0)^n$, je $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Lemma 5.3. *Pro každé $x_0 \in \mathbb{R}$ lze každý mnohočlen $P_n(x)$ stupně nejvýše n zapsat jediným způsobem ve tvaru $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)$ s $c_k = P_n^{(k)}(x_0)/k!$.*

Důkaz. Je-li $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^n$, je pro $l = 0, 1, \ldots, n$ $P_n^{(l)}(x) = c_l l! + \sum_{k=l+1}^{n} \tilde{c}_k (x-x_0)^{k-l}$ s $\tilde{c}_k = k(k-1)\ldots(k-l+1)$. To pro $x = x_0$ dá požadované. Existence takového zápisu pro $n = 0, 1$ je zřejmá. Pro $n > 1$ ji dokažme indukcí: zřejmě můžeme napsat

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n (x-x_0)^n + \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{a}_k x^k$$

s vhodnými $\tilde{a}_k$. Druhý sčítanec na pravé straně se dá v požadovaném tvaru zapsat podle indukčního předpokladu.

Důkaz Peanovy věty. Je-li $P_n(x)$ polynom stupně nejvýše n, je podle lemmatu 5.2.

$$f(x) - P_n(x) = o(x-x_0)^n \Leftrightarrow (f - P_n)^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(x_0) = 0,$$

pro $k = 0, 1, \ldots, n$. A to proto podle lemmatu 5.3. nastane pro $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x - x_0)^k$ s $c_k = f^{(k)}(x_0)/k!$.

Tato věta ukazuje, že Taylorův mnohočlem $\mathcal{T}_n(x; x_0, f)$ je blízký k funkci f pro $x \to x_0$. Tato přesnost se zvětšuje se zvětšováním stupně n tohoto mnohočlenu. Užitečnost této věty pro výpočet limit jsme viděli v kapitole 4. Ukažme si ještě jeden příklad:

Příklad. Najděme

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} f(x).$$

Čitatele musím rozložit přesně do členů třetího řádu: dostaneme

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x + x^2/2! + o(x^2))(x - x^3/3! + o(x^3)) - x - x^2}{x^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 + x^3/2! - x^3/3! - x - x^2 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Nyní si ukážeme, že za příslušných předpokladů přibližuje Taylorův mnohočlen fukce f tuto funkci na celém intervalu.

Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace do řádu n včetně. Položme

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \mathcal{T}_n(x; x_0, f).$$

Toto $R_{n+1}(x)$ se nazývá *Taylorovým zbytkem funkce f po $n-$tém členu.* Potřebujeme jej odhadnout. K tomu bude užitečná následující věta, dávající jisté vyjádření tohoto zbytku.

Věta 5.23. *Nechť funkce f má vlastní derivace do řádu $n+1$ včetně na uzavřeném intervalu J s koncovými body x_0 a x (v krajních bodech derivace jednostranné). Nechť funkce $\varphi(t)$ je spojitá na J a na J^0 má vlastní nenulovou derivaci. Pak existuje $\xi \in J^0$ tak, že*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi).$$

Speciálně

a) *pro $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$ je*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

(Lagrangeův tvar zbytku),

b) *pro* $\varphi(t) = t$ *je*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(1-\theta)^n}{n!} f^{n+1}(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^{n+1}$$

pro nějaké $\theta \in (0, 1)$ *(Cauchyův tvar zbytku).*

Důkaz bude krátký, ale nebude do něho moc vidět. Pro pevné x zvolme funkci

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k, \ \ t \in J.$$

(J je $\langle x_0, x\rangle$ pro $x > x_0$ a $\langle x, x_0\rangle$ pro $x < x_0$.)

Je $F(x) = 0$, $F(x_0) = R_{n+1}(x)$, $F'(t) = -f^{(n+1)}(t)(x-t)^n/n!$. F a φ splňují podmínky věty 5.11, a proto existuje takové ξ mezi x_0 a x, že

$$\frac{F(x_0) - F(x)}{\varphi(x_0) - \varphi(x)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Dosadíme-li sem za $F(x_0)$, $F(x)$ a $F'(\xi)$, dostaneme požadované vyjádření zbytku (přesvědčte se podrobně). Speciální případy dostaneme dosazením za φ – v případě b) ještě položíme $\theta = \frac{\xi - x_0}{x - x_0}$, které je opravdu z intervalu $(0, 1)$, neboť ξ je mezi x a x_0. (Proveďte opět podrobně.)

Poznámka 5.12. Pozorný čtenář si jistě všiml, že místo spojitosti $f^{(n+1)}$ na J stačilo předpokládat spojitost $f^{(n)}$ na J a existenci $f^{(n+1)}$ na J^0.

Jde nyní o to, zda $\mathcal{T}_n(x; x_0, f) \to f(x)$, tj. $R_{n+1}(x) \to 0$ pro $n \to \infty$ pro $x \neq x_0$. Z odvozených vyjádření je vidět, že to závisí na chování $f^{(n+1)}(\xi)$ pro $n \to \infty$, neboť jak $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, tak $\frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)n}{n!}$ konvergují k nule pro $n \to \infty$. Rozebereme si několik důležitých příkladů.

Příklad 5.20. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$, a tedy

$$\mathcal{T}_n(x; 0, e^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Máme proto

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ pro } n \to \infty$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Užili jsme Lagrangeův tvar zbytku.

Příklad 5.21. $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$. Platí (dokažte) $(\sin x)^{(k)} = \sin(x + k\pi/2)$. Je proto

$$(\sin)^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{pro } k \text{ sudé}, \\ (-1)^n & \text{pro } k = 2n+1,\ n = 0, 1, \dots . \end{cases}$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ proto máme

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{2n-1}(x; 0, \sin x) &= \mathcal{T}_{2n}(x; 0, \sin x) = \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \\ R_{2n}(x) = R_{2n+1}(x) &= \frac{\sin(\xi + (2n+1)\pi/2)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \end{aligned}$$

a tedy $R_n(x)$ konverguje k nule pro $n \to \infty$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 5.22. $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$. Podobně jako v předchozím příkladu se pro $n = 0, 1, \dots$ ukáže

$$\mathcal{T}_{2n}(x; 0, \cos x) = \mathcal{T}_{2n+1}(x; 0, \cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$
$$|R_{2n+1}(x)| = |R_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!},$$

a tedy $R_n(x) \to 0$ pro $n \to \infty$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 5.23. $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, 1\rangle$, $x_0 = 0$. Použijeme Cauchyův tvar zbytku. Je

$$(\ln(1+x))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k},$$

a tedy

$$\mathcal{T}_n(x;0,\ln(1+x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k},$$

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!} \frac{(-1)^n n!}{(1+\theta x)^{n+1}} \right| =$$

$$(*) \qquad = \frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \text{ pro } |x|<1.$$

Protože pro $x > -1$ je $\theta x > -\theta$, $1+\theta x > 1-\theta$, $(1-\theta)/(1+\theta x) < 1$, je pravá strana v $(*)$ menší než $|x|^{n+1}/(1-|x|)$, což konverguje k nule pro $n \to \infty$ a $|x| < 1$. Je tedy pro $|x| < 1$ $\mathcal{T}_n(x;0,\ln(1+x)) \to \ln(1+x)$ pro $n \to \infty$. Dá se ukázat (pomocí Lagrangeova tvaru zbytku nebo též příklad 12.9. v [KIII]), že to platí i pro $x = 1$. Pro $x > 1$ to není pravda.

Příklad 5.24. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, $x_0 = 0$. Potom je

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + R_{n+1}(x).$$

Dá se dokázat (viz například [D1]), že pro $|x| < 1$ $R_{n+1}(x) \to 0$ pro $n \to \infty$. Pro $\alpha \in \mathbb{N}$ je $R_{n+1}(x) = 0$ pro $n \geq \alpha$ a dostáváme známý binomický vzorec (který platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$).

Příklad 5.25. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$, $|x| \leq 1$.Platí (spočtěte za cvičení)

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n+1}(x).$$

Opět platí ([D1]), že $R_n(x) \to 0$ pro $n \to \infty$ a $|x| \leq 1$.

Poznámka 5.13. Známe-li Taylorovy mnohočleny funkcí f a g, pak snadno určíme Taylorův mnohočlen jejich součinu $f.g$: Nechť

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),$$

$$g(x) = \sum_{l=0}^{n} \beta_l (x-x_0)^l + o((x-x_0)^n).$$

Podle věty 5.22. jsou polynomy na pravých stranách právě Taylorovy polynomy funkcí f resp. g. Vynásobíme-li tyto rovnosti, dostaneme

$$f(x)g(x) = \sum_{k+l \le n} \alpha_k \beta_l (x - x_0)^{k+l} + o((x - x_0)^n).$$

Podle téže věty je polynom na pravé straně Taylorův polynom funkce $f(x).g(x)$.

KAPITOLA 6

PRIMITIVNÍ FUNKCE. RIEMANNŮV INTEGRÁL NEWTONŮV VZOREC

6.1. Úvod

V této závěrečné kapitole se budeme zabývat *integrály.* Toto slovo se používá ve dvou na první pohled zcela rozdílných významech:

I. *Neurčitý integrál* neboli *primitivní funkce* k dané funkci f je taková funkce F, jejíž derivace je rovna f, tj. $F' = f$. Pro tuto funkci se užívá označení

$$\int f(x)\,dx,$$

které je mj. vhodné pro formulaci různých pravidel pro výpočet.

II. *Určitý integrál* (v našem případě to bude tzv. *Riemannův integrál*) funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$ je *číslo*, které dostaneme jako limitu tzv. *integrálních součtů*

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

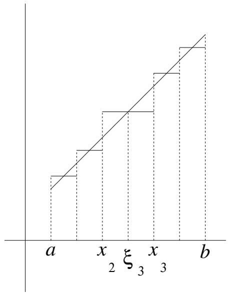
pro $\max\limits_i (x_i - x_{i-1}) \to 0$, kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Toto číslo se označuje

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

a pro kladnou funkci f je rovno plošnému obsahu oblasti Ω nad osou x a pod grafem funkce f, viz obr. 6.1. Důležité jsou i jeho následující fyzikální významy:

Je to práce síly f, pod jejímž působením se těleso přesune po přímce z bodu a do bodu $b > a$.

Je-li $f(x)$ tzv. lineární hustota v bodě $x \in \langle a, b\rangle$ hmoty tyče (tj. limita průměrných hustot hmoty této tyče na úseku $\langle x, x + \Delta_x\rangle$ pro $\Delta_x \to 0$), je $\int_a^b f(x)\,dx$ rovno celkové hmotě tyče.



Obr. 6.1

Je vidět, že pojmy neurčitý a určitý integrál jsou na první pohled zcela rozdílné; přesto je mezi nimi těsný vztah:

III. *Newtonův vzorec.* Je-li například f spojitá a F je k ní primitivní na $\langle a, b\rangle$, platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Přejděme nyní k podrobnému výkladu této poměrně obtížné látky.

6.2. Primitivní funkce

Definice 6.1. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkcí* k funkci f na intervalu J, jestliže

$$F'(x) = f(x) \text{ pro } x \in J$$

(v krajních bodech patřících do J se rozumí příslušné jednostranné derivace).

Primitivní funkci k funkci f označujeme

$$\int f(x)\,dx$$

a nazýváme ji také *neurčitým integrálem* funkce f.

Z tabulky derivací z kapitoly 4. dostáváme následující tabulku primitivních funkcí:

(1) $\int C\,dx = Cx,\ x \in \mathbb{R}$ (C je konstantní funkce, rovná číslu C).
(2) $\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$, $x \in (0,\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$; $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}\cup\{0\}$[9]; $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha < -1$.
(3) $\int e^x\,dx = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
(4) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
(5) $\int a^x\,dx = a^x/\ln a$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in (0,1)\cup(1,\infty)$.
(6) $\int \sin x\,dx = -\cos x$, $x \in \mathbb{R}$.
(7) $\int \cos x\,dx = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
(8) $\int 1/\cos^2 x\,dx = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
(9) $\int 1/\sin^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x$, $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
(10) $\int 1/\sqrt{1-x^2}\,dx = \arcsin x$, $x \in (-1,1)$.
(11) $\int 1/\sqrt{1-x^2}\,dx = -\arccos x$, $x \in (-1,1)$.
(12) $\int 1/(1+x^2)\,dx = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.
(13) $\int 1/(1+x^2)\,dx = -\operatorname{arccotg} x$, $x \in \mathbb{R}$.
(14) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x$, $x \in \mathbb{R}$.
(15) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x$, $x \in \mathbb{R}$.
(16) $\int 1/\operatorname{ch}^2 x\,dx = \operatorname{th} x$, $x \in \mathbb{R}$.
(17) $\int 1/\operatorname{sh}^2 x\,dx = -\operatorname{cth} x$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

VĚTA 6.1. *Nechť funkce F je primitivní k funkci f na intervalu J. Potom pro každé $C \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) je k ní primitivní také funkce $F_C(x) = F(x) + C$. Jsou-li naopak F_1 a F_2 dvě primitivní funkce k f na J, pak je*

$$F_1(x) - F_2(x) = \textit{konstantní funkce na } J.$$

DŮKAZ. První tvrzení plyne z toho, že derivace součtu je rovna součtu derivací a derivace konstantní funkce je rovna 0. Dále je $(F_1(x) - F_2(x))' = f(x) - f(x) = 0$, a podle důsledku 5.1. je funkce $F_1 - F_2$ konstantní na J.

Množina všech primitivních funkcí k dané funkci na daném intervalu je tedy buď prázdná, nebo nekonečná. V posledním případě dostaneme všechny primitivní funkce z jedné přičtením všemožných konstant. Jejich grafy (v případě reálných funkcí) vzniknou tedy posunutím grafu

[9]Pro $\alpha = 0$ zde klademe $x^0 = 1$ pro $x \in \mathbb{R}$.

jedné z nich ve směru osy y. K pravým stranám ve výše uvedené tabulce primitivních funkcí lze tedy přičíst libovolnou konstantu.

Ne každá funkce má na daném intervalu primitivní – viz příklad 5.12a. Na druhé straně dále ukážeme, že každá funkce spojitá na nějakém intervalu má na tomto intervalu primitivní funkci.

6.3. Věty o primitivních funkcích

VĚTA 6.2. *Nechť f a g mají primitivní funkce F a G na intervalu J. Potom funkce $f+g$ má na J primitivní funkci $F+G$, tj.*

$$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx.$$

Je-li C číslo, pak funkce $C.f$ má primitivní funkci $C.F$, tj.

$$\int C.f\,dx = C\int f\,dx.$$

DŮKAZ plyne z vlastností derivací.

POZOR: protože není derivace součinu rovna součinu derivací, není ani primitivní funkce k součinu součinem primitivních funkcí. Z věty o derivaci součinu plyne následující metoda hledání primitivních funkcí:

VĚTA 6.3 (o integraci per partes). *Nechť funkce f a g mají vlastní derivace na intervalu J. Nechť F je primitivní funkce k funkci $(f'.g)$. Potom funkce $G = f.g - F$ je primitivní k funkci $(f.g')$, tj.*

$$\int fg'\,dx = f.g - \int f'g\,dx.$$

DŮKAZ plyne z věty o derivaci součinu.

PŘÍKLAD 6.1.

$$\int xe^{-x}\,dx = x(-e^{-x}) + \int e^{-x} = -xe^{-x} - e^{-x} + C,\ x\in\mathbb{R}$$

(položili jsme $f = x$, $g' = e^{-x}$).

PŘÍKLAD 6.2.

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C, \ x \in (0, \infty)$$

$(f = \ln x,\ g' = 1,\ f' = 1/x,\ g = x)$.

Někdy vede k cíli použití uvedeného postupu dvakrát:

PŘÍKLAD 6.4.

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx = x^2 e^x - (2x e^x - \int 2e^x \, dx) =$$
$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

Někdy tímto postupem dostaneme rovnici pro hledanou primitivní funkci:

PŘÍKLAD 6.4.

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx =$$
$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx,$$

odkud

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

Nakonec jeden „důkaz” toho, že $0 = -1$. Počítejme uvedenou metodou $\int \operatorname{tg} x \, dx$:

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -1 + \int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} \, dx = -1 + \int \operatorname{tg} x \, dx.$$

(Použili jsme $f = 1/\cos x$, $g' = \sin x$, $f' = (\sin x)/\cos^2 x$, $g = -\cos x$).

Formálně tedy dostáváme $0 = -1$, což není pravda. Když si ale znovu přesně zopakujeme tvrzení věty 6.3, dostaneme: je-li $\int \operatorname{tg} x \, dx$ primitivní k $\operatorname{tg} x$, je $-1 + \int \operatorname{tg} x \, dx$ primitivní k $\operatorname{tg} x$, což je podle věty 6.1. pravda, ale k tomuto zjištění jsme nepotřebovali dělat uvedený výpočet. Správý závěr je tedy ten, že pro výpočet primitivní funkce k $\operatorname{tg} x$ nám tento postup nic nedává. Určíme ji jiným postupem dále.

Z věty o derivaci složené funkce dostáváme následující větu:

VĚTA 6.4 (integrace substitucí). *Nechť f má primitivní funkci F na intervalu J. Nechť φ zobrazuje interval I do J a má na I vlastní derivaci. Potom $F \circ \varphi$ je primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na I, tj.*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx_{|x=\varphi(t)} + C.$$

Tuto větu používáme tedy tak, že integrovanou funkci si zapíšeme ve tvaru $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ s nějakými f a φ (pokud to jde a my přijdeme na to, jak), pak za $\varphi(t)$ dosadíme x, za $\varphi'(t)\,dt$ dosadíme dx, spočteme integrál $\int f(x)\,dx$ a do výsledku dosadíme opět za x $\varphi(t)$.

PŘÍKLAD 6.5. Počítejme integrál $\int e^{t^2} t\,dt$. Zde se nabízí vzít $f(x) = e^x$ a $\varphi(t) = t^2$. Bohužel není $\varphi'(t)$ rovné t, ale $2t$. Proto nejdříve vydělíme a vynásobíme hledaný integrál 2 a pak už se tato f a φ hodí:

$$\int e^{t^2} t\,dt = \frac{1}{2}\int e^{t^2} 2t\,dt = \frac{1}{2}\int e^x\,dx_{|x=t^2} = \frac{1}{2}e^x_{|x=t^2} = \frac{1}{2}e^{t^2} + C.$$

PŘÍKLAD 6.6. Máme najít $\int \cos^3 t\,dt$. Zapíšeme nejdřív integrovanou funkci ve tvaru $(1-\sin^2 t)\cos t$. Teď už se nabízí substituce $x = \sin t$:

$$\int \cos^3 t\,dt = \int (1-\sin^2 t)\cos t\,dt =$$
$$= \int (1-x^2)\,dx = x - \frac{1}{3}x^3 = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t + C.$$

Někdy je výhodnější jiný postup: v hledaném integrálu $\int f(x)\,dx$ uděláme substituci $x = \varphi(t)$ s nějakou derivovatelnou funkcí φ, tj. za x dosadíme $\varphi(t)$, za dx dosadíme $\varphi'(t)\,dt$, spočteme (pokud to umíme) integrál $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ a do výsledku dosadíme za t jeho vyjádření $\varphi^{-1}(x)$ – musí být tedy φ prostá, aby měla inverzní φ^{-1}. Funkci φ vybíráme tak, abychom po substituci získaný integrál byli schopni spočítat. Je třeba uvážit, že dosazujeme nejen za x, ale i za dx. Ukažme si to na příkladu.

PŘÍKLAD 6.7. Máme najít integrál $\int \frac{dx}{x^2+4}$. Uděláme substituci $x = 2t$ (je derivovatelná s kladnou derivací, a tedy prostá). Dostaneme

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \int \frac{2\,dt}{4t^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t = \\ = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/2) + C.$$

To, že za příslušných předpokladů tento postup je korektní, dokazuje následující věta:

VĚTA 6.5 (druhá substituční metoda). *Nechť φ zobrazuje interval I na interval J a má na I vlastní derivaci, která je buď všude kladná, nebo všude záporná. Je-li $G(t)$ primitivní k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na J, je $G(\varphi^{-1}(x))$ primitivní k f na J.*

DŮKAZ. Z toho, že derivace φ' zachovává na I znaménko a je nenulová plyne, že je na I ryze monotónní, a tedy prostá, přičemž φ^{-1} má derivaci, rovnou $1/\varphi'$. Je tedy

$$[G(\varphi^{-1}(x))]' = G'(\varphi^{-1}(x))[\varphi^{-1}(x)]' = \\ = G'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x),$$

kde x a t jsou svázány vztahem $x = \varphi(t)$.

POZNÁMKA 6.1. Věty 6.2. - 6.5. umožňují spolu s tabulkou primitivních funkcí najít primitivní funkce mnohých funkcí. Obecný postup jak postupovat však neexistuje. Navíc: označíme-li $\mathcal{F}$ množinu funkcí, tvořenou funkcemi e^x, x^α, $\ln x$, trigonometrickými funkcemi, funkcemi k nim inverzními, a nakonec funkcemi, které ze všech těchto dostaneme sčítáním, násobením, dělením a tvořením složených funkcí, pak derivace každé funkce z $\mathcal{F}$ je opět z $\mathcal{F}$, ale existují $f \in \mathcal{F}$ takové, že k nim primitivní funkce do $\mathcal{F}$ nepatří. Takové jsou například funkce e^x/x, $(\sin x)/x$, $(\cos x)/x$, $1/\ln x$, e^{-x^2}, $\cos(x^2)$, $\sin(x^2)$, aj.

6.4. Integrace racionálních funkcí

V tomto oddílu stručně vyložíme „recept” na integrování tzv. *racionálních funkcí.*

Racionální funkcí rozumíme funkci, danou předpisem

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde P a Q jsou polynomy $Q \not\equiv 0$, definovanou pro ta x, pro něž není $Q(x) = 0$. (Takových bodů je nejvýš tolik, kolik je stupeň polynomu Q.)

Budeme předpokádat, že koeficienty těchto mnohočlenů jsou reálné.

Začněme několika speciálními případy:

I.

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,dx = \begin{cases} \frac{A}{-k+1}(x-x_0)^{-k+1}, & k \geq 2, \\ A \ln|x-x_0|, & k = 1 \end{cases}$$

(substituce $x - x_0 = t$).

II.

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+\beta x+\alpha)^k},$$

kde trojčlen ve jmenovateli nemá reálné kořeny, tj. $\beta^2 < 4\alpha$, a je tedy kladný pro $x \in \mathbb{R}$

Je-li $A \neq 0$, snažíme se v čitateli „vyrobit” derivaci trojčlenu ve jmenovateli:

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+2B/A}{(x^2+\beta x+\alpha)^k}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+\beta)+(2B/A-\beta)}{(x^2+\beta x+\alpha)^k}\,dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{A/2}{(-k+1)(x^2+\beta x+\alpha)^{k-1}} + \dfrac{A}{2}(2B/A-\beta)\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\alpha)^k}\,dx, \\ \dfrac{A}{2}\ln(x^2+\beta x+\alpha) + \dfrac{A}{2}(2B/A-\beta)\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+\beta x+\alpha}\,dx, \end{cases}$$

kde první řádek je pro $k \geq 2$, druhý pro $k = 1$. Tím jsme tento případ převedli na případ $A = 0$.

Uvažujme tedy případ $A = 0$. Budeme se zbavovat ve jmenovateli členu s první mocninou x:

$$\int \frac{dx}{(x^2+\beta x+\alpha)^k} = \int \frac{dx}{(x^2+2(\beta/2)x+\alpha+(\beta/2)^2-(\beta/2)^2)^k} =$$

$$= \int \frac{dx}{((x+\beta/2)^2+\gamma^2)^k}, \quad \gamma^2 = \alpha - \beta^2/4 > 0.$$

Substituce $x + \beta/2 = y$ a $z = y/\gamma$ dají postupně

$$\int \frac{dy}{(y^2+\gamma^2)^k} = \frac{1}{\gamma^{2k}} \int \frac{dy}{((y/\gamma)^2+1)^k} = \frac{1}{\gamma^{2k}} \int \frac{\gamma\, dz}{(z^2+1)^k} = \\ = \frac{1}{\gamma^{2k-1}} \int \frac{dz}{(1+z^2)^k}.$$

To pro $k = 1$ dá

$$\frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg} z,\ \ z = y/\gamma = \frac{x+\beta/2}{\sqrt{\alpha-\beta^2/4}}.$$

Pro $k \geq 2$ odvodíme pro $I_k \equiv \int \frac{dz}{(1+z^2)^k}$ rekurentní vzorec:

$$I_k = \int \frac{dz}{(1+z^2)^k} = \int \frac{1+z^2-z^2}{(1+z^2)^k}\, dz = \\ = I_{k-1} - \int \frac{z^2}{(1+z^2)^k}\, dz.$$

Integrací per partes odvodíme

$$\int \frac{z^2}{(1+z^2)^k}\, dz = \frac{1}{2} \int z \frac{2z}{(1+z^2)^k}\, dz = \\ = \frac{1}{2} \left\{ z \frac{1}{(-k+1)(1+z^2)^{k-1}} - \int \frac{dz}{(-k+1)(1+z^2)^{k-1}} \right\} = \\ = \frac{1}{2} \left\{ \frac{z}{(-k+1)(1+z^2)^{k-1}} + \frac{1}{(k-1)} I_{k-1} \right\} =$$

Je tedy konečně

$$I_k = \frac{z}{2(1-k)(1+z^2)^{k-1}} + \left(1 - \frac{1}{2(k-1)}\right) I_{k-1} = \\ = \frac{z}{2(k-1)(1+z^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1}.$$

POZNÁMKA. Nemá smysl se učit tyto vzorečky nazpaměť, je třeba si pamatovat postup, a ten v každém konkrétním příkladu použít.

III.

Obecný případ
$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$
kde P a Q jsou polynomy převedeme na sled několika výše uvedených speciálních případů:

1. Je-li stupeň $P \geq$ stupeň Q, částečně vydělíme a dostaneme
$$R(x) = P_1(x) + \frac{\widetilde{P}(x)}{Q(x)},$$
kde P_1 a $\widetilde{P}$ jsou mnohočleny, stupeň $\widetilde{P} <$ stupeň Q. Protože polynom P_1 snadno integrujeme, převedli jsme obecný případ na případ, kdy stupeň $P <$ stupeň Q.

2. V případě, kdy je stupeň $P <$ stupeň Q, platí následující věta o rozkladu (viz například Dodatek 2. v [K1], [I1]):

Je-li
$$Q(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-a_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{s}(x^2+\beta_j x+\alpha_j)^{l_j}$$
rozklad polynomu Q na reálné kořenové činitele (součinitelé prvního typu odpovídají reálným kořenům a_i násobnosti k_i mnohočlenu Q, součinitelé druhého typu odpovídají dvojicím komplexně sdružených kořenů násobnosti l_j, trojčlen $x^2 + \beta x_j + \alpha_j$ nemá reálné kořeny, $\beta_j^2 < 4\alpha_j$), pak existuje rozklad
$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_{k_1,1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{k_1-1,1}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \\ & + \cdots + \frac{A_{k_r,r}}{(x-a_r)^{k_r}} + \frac{A_{k_r-1,r}}{(x-a_r)^{k_r-1}} + \cdots + \frac{A_{1,r}}{x-a_r} + \\ & + \frac{C_{l_1,1}x + D_{l_1,1}}{(x^2+\beta_1 x+\alpha_1)^{l_1}} + \cdots + \frac{C_{1,1}x + D_{1,1}}{(x^2+\beta_1 x+\alpha_1)} + \\ & + \cdots + \frac{C_{l_s,s}x + D_{l_s,s}}{(x^2+\beta_s x+\alpha_s)^{l_s}} + \cdots + \frac{C_{1,s}x + D_{1,s}}{(x^2+\beta_s x+\alpha_s)}\end{aligned}$$

kde reálné koeficienty $A_{p,q}$, $C_{p,q}$, $D_{p,q}$ tohoto rozkladu jsou polynomy P a Q určeny jednoznačně.

Poznámka 6.2. K určení těchto koeficientů musíme nejprve rozložit mnohočlen Q, abychom určili správný tvar rozkladu. Potom napíšeme rozklad s neurčitými koeficienty, pro něž dostaneme po vynásobení $Q(x)$ soustavu rovnic (dostaneme rovnost dvou polynomů s neurčitými koeficienty, která je splněna právě když tyto polynomy mají stejné koeficienty u stejných mocnin).

Příklad 6.8. Spočtěme integrál

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}.$$

Rozklad integrandu má tvar

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Po vynásobení jmenovatelem dostáváme

$$\begin{aligned} x = A(x^2+2x+2) + B(x-1)(x^2+2x+2)+& \\ + (Cx+D)(x-1)^2.& \end{aligned}$$

Koeficient A snadno určím dosazením za $x = 1$: $1 = A.5$, tj. $A = 1/5$. Pro určení zbylých koeficientů máme tedy rovnost

$$\begin{aligned} x - (x^2+2x+2)/5 =& \\ = B(x-1)(x^2+2x+2) + (Cx+D)(x-1)^2.& \end{aligned}$$

Přirovnáváme koeficienty u stejných mocnin:

x^3: $0 = B + C$, $C = -B$,
x^2 : $-1/5 = B - 2C + D$,
x^1 : $1 - 2/5 = C - 2D$,
x^0 : $-2/5 = -2B + D$.

Tato soustava má řešení $B = 1/25$, $C = -1/25$, $D = -8/25$. (Nedivte se, že máme 4 rovnice pro 3 neznámé; jen 3 jsou nezávislé, ověřte. Kdybychom koeficient A neurčovali použitým speciálním způsobem, dostali bychom přirovnáním koeficientů soustavu 4 rovnic o čtyřech neznámých, která má právě jedno řešení. Napište si ji.)

Je tedy

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} = \\ = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{25}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{25}\int \frac{x+8}{x^2+2x+2}\,dx = \\ = -\frac{1}{5}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{25}\ln|x-1| - \frac{1}{25}\int \frac{x+8}{x^2+2x+2}\,dx.$$

$$\int \frac{x+8}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+16}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \\ + 7\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + 7\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \\ = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + 7\operatorname{arctg}(x+1).$$

Hledaný integrál je tedy roven

$$\frac{1}{5}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2} - \frac{7}{25}\operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

6.5. Některé důležité substituce

Podrobný rozbor a důkazy následujících tvrzení najde čtenář například v knihách [D1], [IP], [F].

I. Nechť R je racionální funkce, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom je

$$\int R(e^{\alpha x})\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{R(z)}{z}\,dz$$

(substituce $z = e^{\alpha x}$).

II. Pro R stejnou jako v I. je

$$\int \frac{1}{x}R(\ln x)\,dx = \int R(t)\,dt$$

(substituce $t = \ln x$).

Definice 6.2. Mnohočlenem ve dvou proměnných se nazývá funkce tvaru

$$P(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j,$$

kde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Je-li alespoň jedno a_{ij} s $i + j = n$ nenulové, mluvíme o mnohočlenu stupně n.

Racionální funkcí dvou proměnných rozumíme funkci tvaru

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

kde P a Q jsou mnohočleny dvou proměnných, $Q \not\equiv 0$.

III. Je-li $R(u, v)$ racionální funkce dvou proměnných, potom integrál

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

lze převést na integrál racionální funkce jedné proměnné následujícími substitucemi

1. $t = \operatorname{tg}(x/2)$,
2. $t = \cos x$, je-li $R(-u, v) = -R(u, v)$,
3. $t = \sin x$, je-li $R(u, -v) = -R(u, v)$,
4. $t = \operatorname{tg} x$, je-li $R(-u, -v) = R(u, v)$.

První substituce vede k cíli vždy; poněvadž však vede často ke složitým výpočtům, je užitečné ve speciálních případech použít substituce 2 – 4.

IV. Integrál

$$\int R\left(x, \sqrt[s]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx,$$

kde $s \in \mathbb{N}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, se převede na integrál z racionální funkce jedné proměnné substitucí

$$t = \sqrt[s]{\frac{ax + b}{cx + d}}.$$

V. (Eulerovy substituce). K výpočtu integrálů tvaru

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$$

jsou užitečné následující substituce:

1) Má-li trojčlen $ax^2 + bx + c$ dva reálné různé kořeny $x_1 < x_2$, vede k cíli substituce

$$t = \sqrt{\frac{a(x - x_2)}{x - x_1}}$$

pro ta x, pro něž je tato odmocnina definována.

2) Je-li $a > 0$, lze použít substituci

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t.$$

3) Je-li $c > 0$, lze užít substituce

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}.$$

Ukažme si na několika příkladech převod těchto integrálů na integrál z racionální funkce jedné proměnné:

Příklad 6.9. Máme najít integrál

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}.$$

Je

$$t = \operatorname{tg}(x/2) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)},$$

$$t^2 = \frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)} = \frac{1 - \cos^2(x/2)}{\cos^2(x/2)} \Rightarrow \cos^2(x/2)(1 + t^2) = 1,$$

$$\cos^2(x/2) = \frac{1}{1 + t^2}.$$

$$\begin{aligned}
\sin x =& 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}\cos^2(x/2) = \frac{2t}{1+t^2}\\
\cos x =& \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = 2\cos^2(x/2) - 1 =\\
=& \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{2-(1+t^2)}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\\
\frac{dx}{dt} =& \frac{1}{dt/dx} = \frac{2}{1/\cos^2(x/2)},\ dx = 2\cos^2(x/2)\,dt = \frac{2}{1+t^2}\,dt.
\end{aligned}$$

Je tedy

$$\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int \frac{1}{2.2t/(1+t^2) - (1-t^2)/(1+t^2) + 5}\frac{2\,dt}{1+t^2} =$$
$$= \int \frac{2\,dt}{4t - (1-t^2) + 5(1+t^2)} = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2}.$$

PŘÍKLAD 6.10. Převeďme na integrál z racionální funkce integrál

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

Užijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$ a potřebujeme pomocí t vyjádřit $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ a dx:

je

$$t^2 = \operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2},$$
$$x = \operatorname{arctg} t, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Proto se zkoumaný integrál převádí na

$$\int \frac{1}{[t^2/(1+t^2)]^2 + [1/(1+t^2)]^2}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt.$$

Příklad 6.11. Pro $x > 1$ převeďme na integrál z racionální funkce integrál

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\, dx.$$

Vydělíme-li čitatele i jmenovatele $\sqrt{x-1}$, dostaneme

$$\int \frac{\sqrt{(x+1)/(x-1)} - 1}{\sqrt{(x+1)/(x-1)} + 1}\, dx.$$

Uděláme substituci $t = \sqrt{(x+1)/(x-1)}$. Je pak $(x+1)/(x-1) = t^2$, $x = (t^2+1)/(t^2-1)$, $dx = -4tdt/(t^2-1)^2$, a tedy zkoumaný integrál je roven

$$-4 \int \frac{t-1}{t+1} \frac{tdt}{(t^2-1)^2} = -4 \int \frac{tdt}{(t+1)^3(t-1)}.$$

Příklad 6.12. Převeďme na integrál z racionální funkce integrál

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+x+1}}.$$

Protože jak koeficient u x^2 tak absolutní člen jsou kladné, lze užít obě Eulerovy substituce. Užijeme-li $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$, dostaneme $x^2+x+1 = x^2+2xt+t^2$, $x = (1-t^2)/(2t-1)$. Užijeme-li $\sqrt{x^2+x+1} = xt+1$, dostaneme $x^2+x+1 = x^2t^2+2xt+1$, $x = (1-2t)/(t^2-1)$. Dokončení úlohy již přenecháváme čtenáři za cvičení.

6.6. Riemannův integrál.

Definice 6.3. Nechť $\langle a, b\rangle$ je omezený uzavřený interval. Nechť $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ je $n+1$ čísel. Řekneme, že tato čísla určují *dělení* D intervalu $\langle a, b\rangle$ a nazýváme je *dělícími body* tohoto dělení. Interval $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ nazýváme i-tým *dělícím intervalem* dělení D a číslo $\nu(D) = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ nazýváme *normou* tohoto dělení.

Definice 6.4. Dělení D' nazýváme *zjemněním* dělení D, je-li každý dělící bod dělení D také dělícím bodem dělení D'.

Definice 6.5. Nechť je f reálná funkce, definovaná a omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li D dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ s dělícími body x_i, $i = 0, 1, \dots, n$, označme

$$m_i = \inf_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f, \quad M_i = \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Potom číslo

$$s(f, D) \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

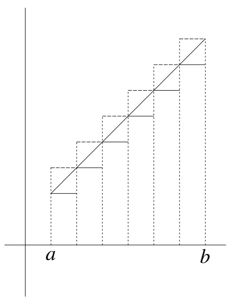
nazýváme *dolním Riemannovým součtem* funkce f odpovídajícím dělení D a číslo

$$S(f, D) \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

nazýváme *horním Riemannovým součtem* funkce f odpovídajícím dělení D.

Poznámka 6.3. Kdybychom nepředpokládali, že f je omezená, pak by některá z m_i, M_i mohla být $\pm\infty$, a také součty $s(f, D)$ a $S(f, D)$ by pak byly $\pm\infty$. Je-li ovšem f omezená na $\langle a, b\rangle$, je také omezená na každém dělícím intervalu dělení D, a tedy uvedené výrazy jsou reálná čísla.

Na obrázku 6.2. je kromě grafu funkce f vyznačen plnou čarou graf funkce, rovné na každém $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ m_i a tečkovaně graf funkce, rovné na každém $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ M_i. Geometrický význam $s(f, D)$ je tedy součet ploch menších obdélníčků a geometrický význam $S(f, D)$ je součet ploch větších obdélníčků.



Obr. 6.2

LEMMA 6.1. *Nechť f je omezená reálná funkce na $\langle a, b\rangle$. Potom platí*

$$m(b-a) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(b-a)$$

pro každé dělení D, kde $m = \inf_{\langle a,b\rangle} f$, $M = \sup_{\langle a,b\rangle} f$.

DŮKAZ plyne okamžitě z nerovností $m \leq m_i \leq M_i \leq M$, platných pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.

DEFINICE 6.6. Nechť f je reálná omezená funkce na $\langle a, b\rangle$. Číslo $\sup s(f, D)$ ($\inf S(f, D)$), kde supremum (infimum) se bere přes všechna dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, se nazývá *dolním* (*horním*) *Riemannovým integrálem* funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$ a označuje se

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \quad \left(\overline{\int_a^b} f(x)\, dx\right).$$

POZNÁMKA 6.4. Podle lemmatu 6.1. je množina všech dolních součtů i množina všech horních součtů omezená, a proto jak dolní, tak horní integrál je (konečné) reálné číslo.

DEFINICE 6.7. Nechť f je reálná funkce, omezená na $\langle a, b\rangle$. Jestliže je její dolní integál rovný hornímu, pak jejich společnou hodnotu nazveme *Riemannovým integrálem* funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$ a značíme jej

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Je-li f komplexní funkce omezená na $\langle a, b\rangle$, pak řekneme, že *má Riemannův integrál* přes interval $\langle a, b\rangle$ právě když jej mají obě funkce $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ a pokládáme podle definice

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\, dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\, dx.$$

Nadále budeme slovo Riemannův vynechávat.

PŘÍKLAD 6.12. Pro konstantní funkci $f(x) = 2$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $\int_a^b f(x)\, dx = 2(b-a)$, neboť pro každé dělení D je $s(f, D) = S(f, D) = 2(b-a)$, a tedy také její horní i dolní integrál jsou rovny $2(b-a)$.

PŘÍKLAD 6.13. Dirichletova funkce d definovaná předpisem

$$d(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ racionální, } x \in \langle a, b \rangle, \\ 0 & x \text{ iracionální, } x \in \langle a, b \rangle \end{cases}$$

nemá na $\langle a, b \rangle$ integrál, neboť pro každé dělení D je $s(d, D) = 0$ a $S(d, D) = b - a \neq 0$ (pro $a < b$).

LEMMA 6.2. *Je-li f reálná omezená funkce na $\langle a, b \rangle$ a D' je zjemnění dělení D tohoto intervalu, pak je*

$$s(f, D') \geq s(f, D),$$
$$S(f, D') \leq S(f, D).$$

DŮKAZ provedeme například pro dolní součty. Přitom to stačí dokázat pouze ve speciálním případě, kdy dělení D' dostaneme z dělení D přidáním jednoho bodu, například $\tilde{x} \in (x_{k-1}, x_k)$. Potom místo sčítance $m_k(x_k - x_{k-1})$ v $s(f, D)$ jsou v $s(f, D')$ dva sčítance $\tilde{m}(\tilde{x} - x_{k-1})$ a $\bar{m}(x_k - \tilde{x})$, kde $m_k = \inf\limits_{\langle x_{k-1}, x_k \rangle} f$, $\tilde{m} = \inf\limits_{\langle x_{k-1}, \tilde{x} \rangle} f$, $\bar{m} = \inf\limits_{\langle \tilde{x}, x_k \rangle} f$. Protože je zřejmě $\tilde{m} \geq m_k$, $\bar{m} \geq m_k$, je $\tilde{m}(\tilde{x} - x_{k-1}) + \bar{m}(x_k - \tilde{x}) \geq m_k[(\tilde{x} - x_{k-1}) + (x_k - \tilde{x})] = m_k(x_k - x_{k-1})$, a tedy je tvrzení dokázáno, neboť ostatní sčítance jsou v obou dolních součtech stejné.

LEMMA 6.3. *Pro libovolná dvě dělení D_1 a D_2 intervalu $\langle a, b \rangle$ je*

$$s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$$

pro libovolnou reálnou funkci f, omezenou na $\langle a, b \rangle$.

DŮKAZ. Nechť D' je společné zjemnění dělení D_1 a D_2. Takové určitě existuje – stačí vzít za jeho dělící body všechny dělící body obou dělení. Podle lemmat 6.1. a 6.2. pak máme

$$s(f, D_1) \leq s(f, D') \leq S(f, D') \leq S(f, D_2).$$

DŮSLEDEK 6.1. *Pro libovolnou reálnou funkci f omezenou na $\langle a, b \rangle$ je*

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\, dx \leq \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\, dx.$$

LEMMA 6.4. *Omezená reálná funkce f má na $\langle a, b\rangle$ integrál tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení D_ε tohoto intervalu, pro které platí*

$$S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{$*$}$$

DŮKAZ. Jestliže integrál existuje, pak je podle definice supremem dolních součtů a infimem horních součtů. Proto ke každému $\varepsilon > 0$ existují taková dělení D'_ε a D''_ε, pro něž platí

$$0 \le S(f, D'_\varepsilon) - \int_a^b f(x)\,dx < \varepsilon/2, \quad 0 \le \int_a^b f(x)\,dx - s(f, D''_\varepsilon) < \varepsilon/2.$$

Vezmeme-li za D_ε společné zjemnění obou těchto dělení, dostaneme podle lemmatu 6.2.

$$0 \le S(f, D_\varepsilon) - \int_a^b f(x)\,dx < \varepsilon/2, \quad 0 \le \int_a^b f(x)\,dx - s(f, D_\varepsilon) < \varepsilon/2.$$

Sečtením těchto nerovností dostaneme $(*)$. Nechť naopak existuje D_ε splňující $(*)$. Máme dokázat, že horní integrál se rovná dolnímu. Platí

$$s(f, D_\varepsilon) \le \int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx \le \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx \le S(f, D_\varepsilon),$$

a tedy

$$\varepsilon > S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) \ge \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx - \int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx \ge 0$$

pro každé $\varepsilon > 0$. Pak ale musí být $\int_{\underline{a}}^b f(x)\,dx = \int_a^{\overline{b}} f(x)\,dx$.

VĚTA 6.6 (postačující podmínka existence integrálu). *Je-li f reálná nebo komplexní funkce, která ja spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak má na $\langle a, b\rangle$ integrál.*

DŮKAZ stačí provést pro reálnou funkci, neboť pro komplexní funkci stačí aplikovat tento výsledek na reálnou a imaginární část a užít definice

6.7. Ukážeme, že reálná funkce f, která je spojitá na $\langle a, b\rangle$ splňuje podmínku lemmatu 6.4. Nechť $\varepsilon > 0$ je kladné číslo. Poněvadž je f spojitá na $\langle a, b\rangle$, je tam podle Cantorovy věty (věta 5.8.) stejnoměrně spojitá, a tedy existuje $\delta > 0$ tak, že $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(b-a)$ pro každá $x', x'' \in \langle a, b\rangle$ a $|x' - x''| < \delta$. Volme D_ε tak, aby $\nu(D_\varepsilon) < \delta$. Protože je f spojitá na každém dělícím intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ dělení D_ε, je (věta 5.6.) $m_i = f(\xi_i)$, $M_i = f(\eta_i)$ pro nějaká $\xi_i, \eta_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Pak je $|\eta_i - \xi_i| < \delta$ a

$$0 \leq M_i - m_i = f(\eta_i) - f(\xi_i) < \varepsilon/(b-a),$$

a tedy také

$$S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) <$$

$$\frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Poznámka 6.5. Jak ukazuje následující příklad, není spojitost nutnou podmínkou pro existenci integrálu.

Příklad 6.14. Ukažme, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \langle -1, 0), \\ 1 & x \in \langle 0, 1\rangle \end{cases}$$

má integrál na $\langle -1, 1\rangle$ rovný 1. Ukážeme, že funkce splňuje podmínku lemmatu 6.4. K tomu stačí volit D_ε tak, aby $\nu(D_\varepsilon) < \varepsilon$ a 0 byla například k-tým jeho dělícím bodem. Pak je totiž

$$S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) = x_k - x_{k-1} < \varepsilon.$$

Abychom dokázali, čemu je její integrál roven, stačí si uvědomit, že pro dělení D' mající 0 za dělící bod je $s(f, D') = 1$. Pro libovolné dělení D je na druhé straně $s(f, D) \leq 1$, neboť je lze doplnit nulou na dělení předchozího typu, a dolní součet se přitom nezmenší. Je tedy $\sup s(f, D) = 1$.

6.7. Integrál jako limita integrálních součtů

V tomto oddílu si ukážeme trochu jiný přístup k integrálu. Zmínili jsme se o něm v úvodu k této kapitole. Dá se ukázat, že tento přístup je ekvivalentní s přístupem, užitým v předchozím oddílu.

Definice 6.8. Nechť f je reálná nebo komplexní funkce omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$, D je dělení tohoto intervalu s dělícími body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Označme $N(D)$ množinu n-tic $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ takových, že $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Číslo

$$\sigma(f, D, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

pro $\xi \in N(D)$ se nazývá *Riemannovým integrálním součtem* funkce f příslušným dělení D a n-tici $\xi \in N(D)$. Viz obrázek 6.1.

Definice 6.9. Řekneme, že

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}),$$

jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dělení D s $\nu(D) < \delta$ a pro každou n-tici $\xi \in N(D)$ platí

$$|\sigma(f, D, \xi) - A| < \varepsilon.$$

Pro takto definovaný pojem limity platí následující analogie Heineových vět a B.-C. podmínky, které přenecháváme čtenáři za cvičení:

Cvičení 6.1. Následující podmínky jsou ekvivalentní

(1) $\lim\limits_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi)$ existuje,

(2) pro každou posloupnost dělení D_k s $\nu(D_k) \to 0$ a každou $\xi^{(k)} \in N(D_k)$ existuje vlastní limita $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma(f, D_k, \xi^{(k)})$,

(3) ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každá dvě dělení D_1 a D_2 s $\nu(D_i) < \delta$ a každou $\xi^{(i)} \in N(D_i)$, $i = 1, 2$ platí $|\sigma(f, D_1, \xi^{(1)}) - \sigma(f, D_2, \xi^{(2)})| < \varepsilon$.

Platí-li (2), pak limity všech takových posloupností jsou stejné a jsou rovny $\lim\limits_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi)$. Naopak: je-li $\lim\limits_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A$, jsou všechny limity v (2) rovny A.

Platí (viz například [K1], [D1])

VĚTA 6.7. *Funkce f má na intervalu integrál rovný A tehdy a jen tehdy, je-li* $\lim\limits_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi) = A$.

POZNÁMKA 6.6. Věta 6.7. dává nutnou a postačující podmínku pro existenci integrálu. Tuto podmínku je proto možné vzít za ekvivalentní definici integrálu. Taková definice má své přednosti: hodí se přímo i pro komplexní funkce (ale i pro obecnější funkce) jedné reálné proměnné, neboť se neopírá o vlastnost uspořádání v množině reálných čísel; má také názornější smysl pro různé aplikace. Na druhé straně se pomocí ní obtížněji dokazují některé vlastnosti integrálu. Jiné jdou zase dokazovat pomocí ní jednodušeji, a proto ji někdy také použijeme.

POZNÁMKA 6.7. V definicích 6.8. a 6.9. se nikde nepoužilo toho, že funkce f musí být omezená. Dalo by se dokázat, že z existence limity $\lim\limits_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D, \xi)$ již plyne omezenost f.

6.8. Vlastnosti integrálu

VĚTA 6.8. *Nechť f a g mají na $\langle a, b\rangle$ integrál. Potom platí*
1) $f + g$ má na $\langle a, b\rangle$ integrál a

$$\int_a^b (f + g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

2) Pro každé číslo c má také funkce $c.f$ integrál na $\langle a, b\rangle$ a je

$$\int_a^b c.f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx.$$

3) Funkce $f.g$ má na $\langle a, b\rangle$ integrál.

DŮKAZ. Je-li D_n posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $\nu(D_n) \to 0$, $\xi^{(n)} \in N(D_n)$, pak je

$$\begin{aligned} \sigma(f + g, D_n, \xi^{(n)}) &= \sigma(f, D_n, \xi^{(n)}) + \sigma(g, D_n, \xi^{(n)}), \\ \sigma(c.f, D_n, \xi^{(n)}) &= c.\sigma(f, D_n, \xi^{(n)}), \end{aligned}$$

odkud dostaneme první dvě tvrzení pomocí příslušných vět o limitách posloupností a cvičení 6.1. a věty 6.7. Poslední tvrzení dokazovat nebudeme. Čtenář najde jeho důkaz například v [D1].

VĚTA 6.9. *Nechť f, g a h jsou reálné funkce, které mají na $\langle a,b\rangle$ integrál. Potom platí*

1) Je-li $h \geq 0$ na $\langle a,b\rangle$, pak

$$\int_a^b h(x)\,dx \geq 0.$$

2) Je-li $f(x) \leq g(x)$ na $\langle a,b\rangle$, je

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

DŮKAZ. 1) plyne z toho, $s(h,D) \geq 0$ pro všechna dělení D a definice integrálu. 2) plyne z 1) pomocí věty 6.8, položíme-li $h = g - f$.

POZNÁMKA 6.8. Implikace $h \geq 0$, $h \not\equiv 0$ na $\langle a,b\rangle$, $\int_a^b h(x)\,dx$ existuje $\Rightarrow \int_a^b h(x)\,dx > 0$ obecně neplatí – viz věta 6.13. dále. Aby platila, stačí navíc požadovat, že h je spojitá na $\langle a,b\rangle$, nebo že je na $\langle a,b\rangle$ kladná (viz například [F2]).

VĚTA 6.10. *Má-li f na $\langle a,b\rangle$ integrál, má také funkce $|f|$ integrál a platí*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

DŮKAZ. Nejdříve dokážeme, že $|f|$ má integrál. Protože f má integrál, existuje podle lemmatu 6.4. ke každému $\varepsilon > 0$ dělení D_ε, že $S(g,D_\varepsilon) - s(g,D_\varepsilon) < \varepsilon$ pro $g = \operatorname{Re} f,\ \operatorname{Im} f$. Poněvadž pro každá $x,y \in \langle x_{i-1},x_i\rangle$ (kde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ jsou dělící body D_ε), platí

$$\begin{aligned} |f(x)| - |f(y)| &\leq |f(x) - f(y)| \leq \\ &\leq |\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Re} f(y)| + |\operatorname{Im} f(x) - \operatorname{Im} f(y)| \leq \\ &\leq \sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} \operatorname{Re} f - \inf_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} \operatorname{Re} f + \sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} \operatorname{Im} f - \inf_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} \operatorname{Im} f, \end{aligned}$$

a tedy také

$$\sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} |f| - \inf_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} |f| \leq$$
$$\leq \sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} \operatorname{Re} f - \inf_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} \operatorname{Re} f + \sup_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} \operatorname{Im} f - \inf_{\langle x_{i-1},x_i\rangle} \operatorname{Im} f.$$

Odtud snadno dostáváme nerovnost

$$S(|f|, D_\varepsilon) - s(|f|, D_\varepsilon) \leq$$
$$\leq S(\operatorname{Re} f, D_\varepsilon) - s(\operatorname{Re} f, D_\varepsilon) + S(\operatorname{Im} f, D_\varepsilon) - s(\operatorname{Im} f, D_\varepsilon) < 2\varepsilon$$

ze které podle lemmatu 6.4. plyne existence $\int\limits_a^b |f|(x)\,dx$.

Požadovaná nerovnost pak plyne ze zřejmé nerovnosti $|\sigma(f, D, \xi)| \leq \sigma(|f|, D, \xi)$, která platí pro každé dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ a každé $\xi \in N(D)$ pomocí věty 6.7.

Poznámka 6.8. Má-li $|f|$ integrál, nemusí jej mít f. Například funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ racionální}, \; x \in \langle 0, 1\rangle, \\ -1 & x \text{ iracionální}, \; x \in \langle 0, 1\rangle \end{cases}$$

nemá na $\langle 0, 1\rangle$ integrál, zatímco $\int_0^1 |f|(x)\,dx = 1$.

Věta 6.11. *Má-li f integrál na $\langle a, c\rangle$ a na $\langle c, b\rangle$, pak má integrál na $\langle a, b\rangle$ a je*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Důkaz. Nechť D_n je posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ s $\nu(D_n) \to 0$.

1) Předpokládejme, že bod c je dělícím bodem dělení D_n pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom dělení D_n indukuje dělení $\tilde{D}_n$ a $\bar{D}_n$ intervalů $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$, a pro $\xi^{(n)} = (\tilde{\xi}^{(n)}, \bar{\xi}^{(n)})$, $\tilde{\xi}^{(n)} \in N(\tilde{D}_n)$, $\bar{\xi}^{(n)} \in N(\bar{D}_n)$ platí

$$\sigma(f, D_n, \xi^{(n)}) = \sigma(f, \tilde{D}_n, \tilde{\xi}^{(n)}) + \sigma(f, \bar{D}_n, \bar{\xi}^{(n)}).$$

Pravá strana má pro $n \to \infty$ limitu $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, a proto ji má také levá strana.

2) Nechť je nyní D_n libovolná posloupnost dělení s $\nu(D_n) \to 0$, $\xi^{(n)} \in N(D_n)$.Vytvořme dělení D'_n přidáním k D_n dělícího bodu c. Může se stát, že $D'_n = D_n$. Je-li $D'_n \neq D_n$, pak je $c \in (x_{k_n-1}, x_{k_n})$, tj. je vnitřním bodem k_n-tého dělícího intervalu dělení D_n.Položme $\eta^{(n)} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k_n-1}, c, c, \xi_{k_n+1}, \dots, \xi_{s_n})$. Podle bodu 1) je pak

$$\sigma(f, D'_n, \eta^{(n)}) \to \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Ale

$$\begin{aligned} &|\sigma(f, D'_n, \eta^{(n)}) - \sigma(f, D_n, \xi^{(n)})| = \\ &= |f(c)(c - x_{k_n-1}) + f(c)(x_{k_n} - c) - f(\xi_{k_n})(x_{k_n} - x_{k_n-1})| \leq \\ &\leq 2 \sup_{\langle a,b\rangle} |f|.\nu(D_n) \to 0, \end{aligned}$$

a tedy posloupnost $\sigma(f, D_n, \xi^{(n)})$ má také limitu $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. Nyní stačí použít cvičení 6.1. a větu 6.7.

Věta 6.12. *Má-li funkce f integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak má integrál na každém intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle \subset \langle a, b\rangle$.*

Důkaz stačí provést pro reálnou funkci. Podle lemmatu 6.4. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje dělení D_ε intervalu $\langle a, b\rangle$, že platí $S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon) < \varepsilon$. Můžeme předpokládat, že α a β jsou dělícími body, neboť jejich eventuálním přidáním bychom dostali zjemnění tohoto dělení, pro které bude platit stejná nerovnost. Dělící body dělení D_ε, které patří do $\langle \alpha, \beta\rangle$ tvoří dělení D'_ε intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, pro které platí $S(f, D'_\varepsilon) - s(f, D'_\varepsilon) \leq S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon)$, neboť výraz napravo se liší od výrazu nalevo o součet nezáporných členů, odpovídajících dělícím intervalům dělení D_ε, která nepatří do D'_ε. Protože ale pravá strana je menší než ε, plyne odtud požadované tvrzení pomocí lemmatu 6.4.

Věta 6.13. *Integrál funkce se nezmění, změníme-li hodnotu funkce v konečném počtu bodů.*

Důkaz. Stačí dokázat, že se nezmění, změníme-li hodnotu funkce v jednom bodě. Obecný případ se dostane tak, že použijeme „konečněkrát” tento speciální případ.

Nechť tedy funkce f má integrál na $\langle a,b\rangle$. Položme

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \langle a,b\rangle \setminus \{c\}, \\ \gamma & x = c, \end{cases}$$

kde c je nějaké číslo z $\langle a,b\rangle$ a γ nějaké reálné nebo komplexní číslo. K důkazu použijeme cvičení 6.1. Nechť D_n je posloupnost dělení $\langle a,b\rangle$, $\nu(D_n) \to 0$, $\xi^{(n)} \in N(D_n)$. Potom výrazy $\sigma(f, D_n, \xi^{(n)})$ a $\sigma(\tilde{f}, D_n, \xi^{(n)})$ se mohou lišit pouze v těch sčítancích, ve kterých se vyskytuje $f(c)$ nebo $\tilde{f}(c)$. Takové sčítance jsou nejvýše dva, neboť mezi čísly $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_{p_n}^{(n)}$ jsou nejvýše dvě čísla rovná c. Tyto sčítance mají tvar

$$f(c)(x_{s_n} - x_{s_n-1}) \text{ resp. } \tilde{f}(c)(x_{s_n} - x_{s_n-1})$$

pro nějaké s_n. Potom ovšem je

$$(*) \qquad 0 \le |\sigma(f, D_n, \xi^{(n)}) - \sigma(\tilde{f}, D_n, \xi^{(n)})| \le 4M\nu(D_n) \to 0,$$

kde $M = \max\{\sup\limits_{\langle a,b\rangle} |f|, \sup\limits_{\langle a,b\rangle} |\tilde{f}|\}$ (čtyři členy, které se ve výrazu v absolutní hodnotě v $(*)$ mohou nezrušit jsme odhadli součtem jejich absolutních hodnot). Poněvadž $\sigma(f, D_n, \xi^{(n)}) \to \int\limits_a^b f(x)\,dx$, má díky $(*)$ stejnou limitu také $\sigma(\tilde{f}, D_n, \xi^{(n)})$, což podle cvičení 6.1. a věty 6.7. dokazuje jak integrovatelnost $\tilde{f}$, tak rovnost jejího integrálu integrálu funkce f.

Poznámka 6.9. Nechť f definována na $\langle a,b\rangle \setminus M$, kde M je konečná množina. Dodefinujeme-li nějakým způsobem f v bodech M, pak integrál z takto dodefinované funkce nezávisí na tom, jak jsme f dodefinovali. Pokud tato dodefinovaná funkce má integrál, můžeme jej prohlásit za integrál původní funkce. Tak můžeme integrovat i funkce, které v konečném počtu bodů z $\langle a,b\rangle$ nejsou definovány.

6.9. Postačující podmínky pro existenci integrálu

Věta 6.14. *Nechť f je omezená a spojitá na $\langle a,b\rangle$ kromě konečně mnoha bodů. Potom má na $\langle a,b\rangle$ integrál.*

Důkaz. Stačí, když větu dokážeme pro případy, kdy f je spojitá a omezená na $(a,b\rangle$ nebo na $\langle a,b)$. Obecný případ pak odtud dostaneme pomocí věty 6.11. Proveďme důkaz pro první případ. Má-li f v bodě a limitu zprava, je důkaz jednoduchý: položíme-li

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a+} f(x) & x = a, \\ f(x) & x \in (a, b\rangle, \end{cases}$$

je $\tilde{f}$ spojitá na $\langle a, b\rangle$ a má integrál podle věty 6.6. Podle věty 6.13. má pak stejný integrál i f. V případě, že f nemá uvedenou limitu, dá důkaz více práce. Stačí jej provést pouze pro reálnou funkci. Nechť $\varepsilon > 0$, $\tilde{a} \in (a, a + \varepsilon/4M)$, kde $M = \sup\limits_{\langle a,b\rangle} |f|$. Potom je f na $\langle \tilde{a}, b\rangle$ spojitá, má tam tedy integrál a existuje takové dělení $\tilde{D}_\varepsilon$ intervalu $\langle \tilde{a}, b\rangle$, že $S(f, \tilde{D}_\varepsilon) - s(f, \tilde{D}_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Nechť $x_1 = \tilde{a} < x_2 < \cdots < x_n = b$ jsou jeho dělící body. Body $x_0 = a < x_1 = \tilde{a} < x_2 < \cdots < x_n = b$ tvoří dělení D_ε intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom je

$$S(f, D_\varepsilon) = S(f, \tilde{D}_\varepsilon) + M_1(x_1 - x_0), s(f, D_\varepsilon) = s(f, \tilde{D}_\varepsilon) + m_1(x_1 - x_0),$$

kde $M_1(m_1)$ je rovno $\sup\limits_{\langle a,\tilde{a}\rangle} f$ $(\inf\limits_{\langle a,\tilde{a}\rangle} f)$.

Pro toto dělení pak je

$$|S(f, D_\varepsilon) - s(f, D_\varepsilon)| =$$
$$|S(f, \tilde{D}_\varepsilon) - s(f, \tilde{D}_\varepsilon) + (M_1 - m_1)(x_1 - x_0)| <$$
$$< \varepsilon/2 + 2M(\tilde{a} - a) < \varepsilon/2 + \frac{2M\varepsilon}{4M} = \varepsilon,$$

odkud podle lemmatu 6.4. plyne existence integrálu $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Věta 6.15. *Nechť je f monotónní a omezená na $\langle a, b\rangle$. Pak má na $\langle a, b\rangle$ integrál.*

Důkaz. Nechť je f například neklesající. Vezměme dělení D_n, které dostaneme tak, že interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na n stejně dlouhých intervalů. Jejich délka pak bude $(b - a)/n$. Potom je

$$S(f, D_n) - s(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\frac{b - a}{n} = \frac{b - a}{n}(f(b) - f(a)),$$

neboť je $m_i = f(x_{i-1})$, $M_i = f(x_i)$. Tento výraz lze udělat menší než libovolné dané $\varepsilon > 0$, vezmeme-li n dost velké. Podle lemmatu 6.4. má f integrál.

6.10. Integrál s proměnnou horní mezí. Newtonův vzorec

Z různých důvodů (viz například věty 6.16. a 6.17. dále) je účelné definovat integrál funkce f od a do b i pro $b \le a$.

Definice 6.9. Pro libovolnou funkci f a $a \in \mathbb{R}$ položme

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Pro $b < a$, $a, b \in \mathbb{R}$ položme

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

pokud integrál na pravé straně existuje ve smyslu definice 6.7.

Věta 6.16. *Nechť a, b, c jsou libovolná reálná čísla a nechť f má integrál na $\langle\alpha, \beta\rangle$, kde $\alpha = \min\{a, b, c\}$, $\beta = \max\{a, b, c\}$. Potom platí*

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$ je

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

pokud aspoň jeden z integrálů existuje.

Důkaz. Pro $a < c < b$ první tvrzení platí podle vět 6.12. a 6.11. V obecném případě se důkaz dostane pomocí těchto vět a definice 6.9. rozborem jednotlivých možností vzájemné polohy bodů a, b, c. Druhé tvrzení plyne okamžitě z definice 6.9.

VĚTA 6.17. *Nechť f má integrál na každém uzavřeném intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$, který je podmnožinou intervalu J. Je-li $c \in J$ libovolný pevný bod, pak funkce*

$$F_c(x) = \int_c^x f(\xi)\,d\xi,\ x \in J$$

má následující vlastnosti

1) *je spojitá na J, $F_c(c) = 0$,*
2) *je-li f spojitá v bodě $x_0 \in J$, pak $F_c'(x_0) = f(x_0)$,*
3) *pro libovolná $c_1, c_2 \in J$ je $F_{c_1}(x) - F_{c_2}(x) = konst = \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx$, $x \in J$.*

DŮKAZ. Integrál $\int_c^x f(\xi)\,d\xi$ existuje pro každá $c, x \in J$ podle předpokladu věty. Nechť je x_0 vnitřním bodem J a $\delta > 0$ je takové, že $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \subset J$. Potom pro $h \in \mathbb{R}$, $|h| < \delta$ je

$$F_c(x_0 + h) - F_c(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi)\,d\xi.$$

Odtud podle vět 6.10. a 6.9. máme $|F_c(x_0 + h) - F_c(x_0)| \le M|h|$, kde $M = \sup\limits_{\langle x_0-\delta,x_0+\delta\rangle} |f|$. Poněvadž limita pravé strany pro $h \to 0$ je rovna 0, je první tvrzení dokázáno (modifikaci pro případ, kdy je x_0 krajním bodem intervalu J přenecháváme čtenáři za cvičení).

Dokažme 2). Předpokládejme opět, že x_0 je vnitřním bodem J (pro krajní bod by se dokazovala existence jednostranné derivace – podrobnosti opět přenecháváme čtenáři). Je

$$\frac{F_c(x_0 + h) - F_c(x_0)}{h} - f(x_0) =$$
$$= \frac{1}{h}\left\{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dx\right\} =$$
$$= \frac{1}{h}\left\{\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0))\,dx\right\}.$$

Poněvadž je f spojitá v bodě x_0, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ $\delta(\varepsilon) > 0$ tak, že $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pro $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$. Podle věty 6.10. je tedy poslední výraz v absolutní hodnotě menší než $\varepsilon|h|/|h| = \varepsilon$. To ale znamená, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{F_c(x_0 + h) - F_c(x_0)}{h} = f(x_0).$$

3) plyne okamžitě z věty 6.16.

Z této věty pomocí věty o derivaci složené funkce (věta 4.4) plyne:

pro f spojitou a $a(x), b(x)$ derivovatelné je pro $\Phi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(z)\,dz$ $\Phi'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$. Dokažte podrobně. Uvažte nejprve případ, kdy je proměnná jen jedna mez.

Dále z této věty plyne věta o existenci primitivní funkce ke spojité funkci:

VĚTA 6.18. *Nechť f je spojitá na intervalu J. Pak má na J primitivní funkci. Pro $c \in J$ je primitivní funkce, která je v bodě c rovná nule dána předpisem*

$$F_c(x) = \int_c^x f(\xi)\,d\xi.$$

Odvodíme nyní v úvodu slíbený Newtonův vzorec pro výpočet Riemannova integrálu pomocí primitivní funkce.

VĚTA 6.19 (Newtonův vzorec). *Je-li f spojitá na $\langle a, b\rangle$ a F je k ní primitivní na $\langle a, b\rangle$, pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

DŮKAZ. Podle předchozí věty je funkce $F_a(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ primitivní k f na $\langle a, b\rangle$. Podle věty 6.1. je pro nějaké $\gamma \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) $F(x) = F_a(x) + \gamma$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Je proto

$$F(b) - F(a) = F_a(b) - F_a(a) = \int_a^b f(x)\,dx - 0 = \int_a^b f(x)\,dx.$$

POZNÁMKA 6.10. Věta 6.19. platí i pro $a > b$, je-li f spojitá na $\langle b, a\rangle$.

PŘÍKLAD 6.15. Najděme integrál $\int_0^2 e^x\,dx$. Poněvadž k funkci e^x je primitivní funkcí funkce e^x, je $\int_0^2 e^x\,dx = e^2 - e^0 = e^2 - 1$.

Příklad 6.16. Spočtěme integrál $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, kde

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \langle -1, 0\rangle, \\ 1 + x^3 & x \in (0, 1\rangle. \end{cases}$$

f je omezená na $\langle -1, 1\rangle$ a spojitá na $\langle -1, 1\rangle$ kromě bodu 0. Podle věty 6.14. má tedy integrál na $\langle -1, 1\rangle$, který je podle vět 6.11. a 6.12. roven

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx.$$

První integrál můžeme počítat pomocí věty 6.19. a dostaneme

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x\,dx = \left[x^2/2\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}.$$

Na druhý integrál Newtonův vzorec přímo použít nemůžeme, ale změníme-li f v bodě 0 na jedničku, čímž se integrál nezmění, dostaneme spojitou funkci na $\langle 0, 1\rangle$ a podle Newtonova vzorce máme

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} (1 + x^3)\,dx = \left[x + x^4/4\right]_{0}^{1} = 1 + 1/4.$$

Je tedy hledaný integrál roven 3/4.

Použili jsme

Označení. Je-li F funkce, pak $[F(x)]_a^b$ označuje $F(b) - F(a)$.

6.11. Integrace per partes a substituční metoda pro určité integrály

Pomocí Newtonova vzorce (věta 6.19) odvodíme z vět 6.3. a 6.4. analogické věty pro určitý (Riemannův) integrál.

Věta 6.20. *Nechť f, f', g, g' jsou spojité na $\langle a, b\rangle$.Potom platí*

$$\int_a^b f(x).g'(x)\,dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)\,dx.$$

Důkaz. Nechť F je primitivní k $f'.g$ na $\langle a, b\rangle$. Potom je $G \equiv f.g - F$ primitivní k $f.g'$ na $\langle a, b\rangle$. Podle věty 6.19. je tedy

$$\int_a^b f(x).g'(x)\,dx = [G(x)]_a^b = [f.g]_a^b - [F]_a^b = [f.g]_a^b - \int_a^b f'.g\,dx.$$

VĚTA 6.21. *Nechť φ má na $\langle\alpha,\beta\rangle$ spojitou derivaci a f je spojitá na $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)$. Potom platí*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{$*$}$$

DŮKAZ. Oba integrály v $(*)$ existují (věta 6.6). Je-li F primitivní k f na $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)$, pak je $F(\varphi(t))$ primitivní k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na $\langle\alpha,\beta\rangle$, a podle Newtonova vzorce platí

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = [F]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = [F\circ\varphi]_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

POZNÁMKA 6.11. Věty 6.20. a 6.21. platí za slabších předpokladů (viz například [I1]).

POZNÁMKA 6.12. Díky poznámce 6.10. platí věty 6.20. a 6.21. i pro $b < a$ resp. $\beta < \alpha$.

POZNÁMKA 6.13. Je-li ve větě 6.21. φ navíc ryze monotónní, jsou potom $\varphi(\alpha) = A$ a $\varphi(\beta) = B$ koncové body intervalu $\varphi(\langle\alpha,\beta\rangle)$, a k φ na tomto intervalu existuje inverzní funkce φ^{-1}. Rovnost $(*)$ můžeme pak přepsat ve tvaru

$$\int_{A}^{B} f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(A)}^{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Můžeme tedy při výpočtu $\int_A^B f(x)\,dx$ postupovat formálně takto: za x dosadíme vhodnou funkci $\varphi(t)$, za dx dosadíme $\varphi'(t)\,dt$ a změníme meze integrace: místo A (B) bude $\varphi^{-1}(A)$ $(\varphi^{-1}(B))$.

POZNÁMKA 6.14. Věty 6.20. a 6.21. jsou na první pohled zbytečné. Místo jejich použití by stačilo podle vět 6.3, 6.4, 6.5. spočítat primitivní funkce a použít Newtonův vzorec. Tak se také dá postupovat. Přesto jsou věty 6.20. resp. 6.21. užitečné například při opakovaném použití. Ušetří psaní výrazů, které pro konečný výsledek nejsou potřebné (viz příklad 6.17. dále). Je ovšem třeba dát velký pozor na správnost výpočtu, neboť zatímco u počítání primitivní funkce se derivováním snadno přesvědčíme, zda jsme primitivní funkci určili správně, u určitého integrálu nic takového neexistuje.

Příklad 6.17.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^3 \sin x\,dx =&[x^3(-\cos x)]_0^\pi + \int_0^\pi 3x^2 \cos x\,dx =\\ =&\pi^3 + [3x^2 \sin x]_0^\pi - 6\int x \sin x\,dx =\\ =&\pi^3 + [6x\cos x]_0^\pi - 6\int_0^\pi \cos x\,dx =\\ =&\pi^3 - 6\pi - 6[\sin x]_0^\pi = \pi^3 - 6\pi.\end{aligned}$$

Spočtěte tento integrál tak, že najdete per partes primitivní funkci k $x^3 \sin x$ a použijete Newtonův vzorec.

Poznámka 6.15 (geometrický význam věty 6.21). Jestliže f a φ splňují předpoklady věty 6.21. a φ je navíc ryze monotónní (předpokládejme, že je rostoucí), potom pro každé dělení $D_t : \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ a každou n-tici $\tau \in N(D_t)$ je $D_x : A = \varphi(t_0) < \varphi(t_1) < \cdots < \varphi(t_n) = B$ dělením intervalu $\langle A, B\rangle$ a n-tice $\xi = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, $\xi_i = \varphi(\tau_i)$ patří do $N(D_x)$. Platí dále

$$\begin{aligned}\sigma(f, D_x, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i))(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) =\\ = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tilde\tau_i)(t_i - t_{i-1})\end{aligned}$$

(podle věty o přírůstku funkce). Poslední výraz se málo liší (díky spojitosti φ') od $\sigma((f\circ\varphi)\varphi', D_t, \tau)$ a pro $\nu(D_t) \to 0$ konvergují tyto výrazy k příslušným integrálům, které jsou si rovny. Věta o přírůstku nám říká, že délka i-tého dělícího intervalu dělení D_x je úměrná délce i-tého dělícího intervalu v dělení D_t s koeficientem úměrnosti $\varphi'(\tilde\tau_i)$. Derivace $\varphi'(t)$ udává tedy přibližně změnu délky malého intervalu $\langle t, t+\delta\rangle$ při zobrazení φ, přesněji poměr délky intervalu $\varphi(\langle t, t+\delta\rangle)$ k délce intervalu $\langle t, t+\delta\rangle$.

Příklad 6.18. Nejjednodušší substituce je lineární, tj. $x = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Ukažme že platí: je-li f spojitá na $\langle -\alpha, \alpha\rangle$ a je sudá (lichá), pak

$$\int_{-\alpha}^\alpha f(x)\,dx = 2\int_0^\alpha f(x)\,dx \ (0).$$

Platí totiž

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx.$$

V prvním integrálu provedeme substituci $x = -t$ a dostaneme

$$\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx = -\int_{\alpha}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{\alpha} f(-t)\,dt = \pm\int_{0}^{\alpha} f(t)\,dt,$$

kde plus platí pro sudou a minus pro lichou funkci.

Cvičení 6.2. Nechť f je spojitá na $\mathbb{R}$ a periodická s periodou ω. Potom pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_{a}^{a+\omega} f(x)\,dx = \int_{b}^{b+\omega} f(x)\,dx = \int_{0}^{\omega} f(x)\,dx.$$

Cvičení 6.3. Dokažte, že pro f spojitou na $\langle a, b\rangle$ platí

$$\int_a^b \left(\int_a^{t_1} \dots \left(\int_a^{t_{n-1}} f(\tau)\,d\tau\right) dt_{n-1} \dots\right) dt_1 = \\ = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f(\tau)(b-\tau)^{n-1}\,d\tau.$$

Návod. Pro $n = 2$ per partes na integrál vpravo, pro $n > 2$ indukcí.

6.12. Věty o střední hodnotě

Věta 6.22. *Nechť reálná funkce f má na $\langle a, b\rangle$ integrál. Je-li $m = \inf\limits_{\langle a,b\rangle} f$, $M = \sup\limits_{\langle a,b\rangle} f$, potom existuje $c \in \langle m, M\rangle$, že platí*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = c(b-a).$$

Speciálně je-li f spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$, že

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

c resp. $f(\xi)$ se nazývá střední hodnotou funkce f na $\langle a,b\rangle$.

Důkaz. Platí $m \le f(x) \le M$ pro $x \in \langle a,b\rangle$. Podle věty 6.9. užité na f a konstantní funkce rovné m a M dostáváme

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a),\ m \le \int_a^b f(x)\,dx/(b-a) \le M,$$

a stačí proto položit $c = \int_a^b f(x)\,dx/(b-a)$. V případě spojité funkce stačí užít věty 5.7.

Poznámka 6.16. Věta 6.22. říká, že k dané funkci f existuje taková konstantní na $\langle a,b\rangle$ funkce $\tilde{f}$, že $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx$. Hodnota funkce $\tilde{f}$ leží mezi m a M, nebo je dokonce rovná hodnotě f v nějakém bodě $\xi \in \langle a,b\rangle$.

Trochu obecnější je

Věta 6.23. *Nechť reálné funkce f a g mají na $\langle a,b\rangle$ integrál a g je tam nezáporná (nekladná). Označíme-li $m = \inf_{\langle a,b\rangle} f$, $M = \sup_{\langle a,b\rangle} f$, pak existuje $c \in \langle m,M\rangle$, že*

$$\int_a^b fg\,dx = c\int_a^b g\,dx.$$

Speciálně je-li f na $\langle a,b\rangle$ spojitá, pak existuje takové $\xi \in \langle a,b\rangle$, že

$$\int_a^b fg\,dx = f(\xi)\int_a^b g\,dx.$$

Důkaz. Je-li $g(x) \ge 0$ na $\langle a,b\rangle$, pak z nerovností $m \le f(x) \le M$ dostaneme vynásobením $g(x)$ nerovnosti $mg(x) \le g(x)f(x) \le Mg(x)$, z nichž podle věty 6.9. plyne

$$m\int_a^b g\,dx \le \int_a^b fg\,dx \le M\int_a^b g\,dx.$$

Je-li $\int\limits_a^b g\,dx = 0$, je také $\int\limits_a^b fg\,dx = 0$, a za c lze volit libovolné číslo z $\langle m, M\rangle$. Je-li $\int\limits_a^b g\,dx \neq 0$, stačí volit $c = \int\limits_a^b fg\,dx / \int\limits_a^b g\,dx$. Zbytek přenecháváme čtenáři za cvičení.

Mnohem silnější je následující tzv. *druhá věta o střední hodnotě*:

VĚTA 6.24. *Nechť reálné funkce f a g mají na $\langle a, b\rangle$ integrál. Je-li g na $\langle a, b\rangle$ monotónní, pak existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$, že platí*

$$\int\limits_a^b fg\,dx = g(a)\int_a^\xi f\,dx + g(b)\int_\xi^b f\,dx.$$

DŮKAZ provedeme za dodatečného předpokladu, že f, g, g' jsou spojité na $\langle a, b\rangle$ (v obecném případě viz například [I1]). Nechť $F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$. Potom podle vět 6.20 a 6.23. máme

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int\limits_a^b F(x)g'(x)\,dx =$$

$$= F(b)g(b) - F(\xi)\int\limits_a^b g'(x)\,dx =$$

$$= g(b)\int\limits_a^b f(x)\,dx - g(b)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx =$$

$$= g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

kde $\xi \in \langle a, b\rangle$. (Z monotonie g plyne, že g' zachovává na $\langle a, b\rangle$ znaménko, a tedy jsme mohli použít větu 6.23.)

DŮSLEDEK 6.2. *Nechť f a g splňují předpoklady věty 6.24. a g je navíc nezáporná (nekladná) na $\langle a, b\rangle$.*

Pro g neklesající na $\langle a,b\rangle$ pak existuje $\eta \in \langle a,b\rangle$, že platí

$$\int\limits_a^b fg\,dx = g(b)\int_\eta^b f(x)\,dx \quad \left(\int\limits_a^b fg\,dx = g(a)\int_a^\eta f(x)\,dx\right).$$

Pro g nerostoucí na $\langle a,b\rangle$ pak existuje $\zeta \in \langle a,b\rangle$, že platí

$$\int\limits_a^b fg\,dx = g(a)\int_a^\zeta f(x)\,dx \quad \left(\int\limits_a^b fg\,dx = g(b)\int_\zeta^b f(x)\,dx\right).$$

Důkaz provedeme pro g nezápornou a neklesající, ostatní případy přenecháváme čtenáři za cvičení. Položme

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in (a,b\rangle, \\ 0 & x = a. \end{cases}$$

Potom je $\tilde{g}$ opět neklesající, a podle věty 6.24. existuje $\eta \in \langle a,b\rangle$, že

$$\int\limits_a^b f\tilde{g}\,dx = \tilde{g}(a)\int_a^\eta f(x)\,dx + \tilde{g}(b)\int_\eta^b f(x)\,dx =$$
$$= g(b)\int_\eta^b f(x)\,dx.$$

Podle věty 6.13. je ale $\int\limits_a^b f\tilde{g}\,dx = \int\limits_a^b fg\,dx$.

Poznámka 6.16. Věty 6.22. – 6.24. se nazývají *větami o střední hodnotě integrálního počtu* a jsou užitečné při odhadech integrálů. Přitom věta 6.24. dává obecně lepší odhad, než věty 6.22. a 6.23. Je-li například g nerostoucí a nezáporná na $\langle a,b\rangle$, f má na $\langle a,b\rangle$ integrál, pak podle věty 6.23. dostáváme

$$\left|\int\limits_a^b fg\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f||g|\,dx \le g(a)\int\limits_a^b |f|\,dx.$$

Podle věty 6.24. máme

$$\left| \int\limits_a^b fg\,dx \right| = \left| g(a) \int_a^\eta f\,dx \right| = g(a) \left| \int_a^\eta f\,dx \right| .$$

Zřejmě je $|\int_a^\eta f\,dx| \le \int_a^\eta |f|\,dx \le \int\limits_a^b |f|\,dx$.

PŘÍKLAD 6.19. Ukažme, že funkce

$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt,\ x \in \langle 0, \infty)$$

má vlastní limitu pro $x \to +\infty$.

Ukážeme, že F splňuje pro $x \to +\infty$ B.–C. podmínku. Pro $0 < a < b < +\infty$ je

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Funkce $g(t) = 1/t$ je na $(0, +\infty)$ kladná a nerostoucí, $f(t) = \sin t$ je tam spojitá. Podle důsledku 6.2. je pro nějaké $\eta \in \langle a, b\rangle$

$$\int\limits_a^b \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{a} \int_a^\eta \sin t\,dt.$$

Protože je pro libovolná $a, \eta \in \mathbb{R}$ $|\int_a^\eta \sin t\,dt| \le 2$ (ověřte), dostáváme odhad

$$\left| \int\limits_a^b \frac{\sin t}{t}\,dt \right| \le \frac{2}{a},\ b > a > 0.$$

To je ale pro $a > 2/\varepsilon$, $b \ge a$ menší než ε.

Dalo by se dokázat, že $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,dt = +\infty$.

CVIČENÍ 6.4. Nechť f má na $\langle x_0, x\rangle$ spojitou derivaci $f^{(n+1)}$. Opakovaným užití vzorce $f(b) - f(a) = \int\limits_a^b f'(\tau)\,d\tau$ odvoďte vzorec

$$f(x) = \mathcal{T}_n(x, x_0, f) + \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t_1} \cdots \int_{x_0}^{t_{n-1}} \left(\int_{x_0}^{t_n} f^{(n+1)}(\tau)\,d\tau \right) dt_n \dots dt_1.$$

Vyjádřete integrál v tomto vzorci pomocí cvičení 6.3. Pomocí věty 6.23. odvoďte konečně Lagrangeův tvar zbytku v Taylorově vzorci. Dá se takto odvodit obecný tvar zbytku (viz věta 5.24), v němž funkce φ má spojitou a nenulovou derivaci na $\langle x_0, x\rangle$.

6.13. Zobecněný Riemannův integrál

Z definice 6.7. je vidět, že Riemannův integrál mají pouze omezené funkce a pouze přes omezený interval (a to ještě daleko ne všechny). To je bohužel velmi úzká třída funkcí. Proto se zavádějí různá zobecnění integrálu. Jedno z nich ukazuje následující

DEFINICE 6.10. I. Nechť funkce f má integrál na každém intervalu $\langle a, \beta\rangle$ pro každé $\beta \in \langle a, b)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $b > a$. Nechť existuje vlastní limita $\lim\limits_{\beta \to b-} \int_a^\beta f(x)\,dx = A \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Potom číslo A nazýváme *zobecněným Riemannovým integrálem* funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$.

II. Nechť funkce f má integrál na každém intervalu $\langle \alpha, b\rangle$ pro každé $\alpha \in (a, b\rangle$, $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b > a$. Nechť existuje vlastní limita $\lim\limits_{\alpha \to a+} \int_\alpha^b f(x)\,dx = B \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).Potom číslo B nazýváme *zobecněným Riemannovým integrálem* funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$.

III. Nechť J je libovolný interval v $\mathbb{R}$ s koncovými body $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$. Nechť existují body $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, $x_i \in (a, b)$ tak, že funkce f má na každém z intervalů $\langle a, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, … ,$\langle x_k, b\rangle$ zobecněný Riemannův integrál ve smyslu I. nebo II. rovný A_1,A_2, … ,A_{k+1}. Potom číslo $\sum_{i=1}^{k+1} A_i$ nazýváme zobecněným integrálem funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$.

Dá se ukázat, že tato definice je korektní, tj. má-li f integrál ve smyslu dvou z bodů I., II., III., pak jsou si tyto integrály rovny a integrál ve smyslu III. nezávisí na dělících bodech $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Z věty 6.17. také plyne, že má-li f integrál na $\langle a, b\rangle$ ve smyslu definice 6.7, pak jej má i ve smyslu definice 6.10. a oba integrály jsou si rovny.

Pro takto definovaný integrál platí věty 6.8. (části 1,2), 6.9, 6.10, 6.17.

PŘÍKLAD 6.20. Nechť $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $x \in (0,1\rangle$. Potom pro $\alpha \in (0,1\rangle$ je $\int_\alpha^1 f(x)\,dx = [2\sqrt{x}]_\alpha^1 = 2-2\sqrt{\alpha} \to 2$ pro $\alpha \to 0+$. Má tedy tato funkce na intervalu $\langle 0,1\rangle$ zobecněný Riemannův integrál rovný 2. Integrál na $\langle 0,1\rangle$ ve smyslu definice 6.7. zřejmě nemá, neboť na něm není omezená.

PŘÍKLAD 6.21. Podle příkladu 6.19. má funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \in (0,\infty), \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

na $\langle 0,\infty)$ zobecněný integrál.

6.14. Aplikace integrálu

1. Délka křivky v $\mathbb{R}_r$.[10]

Křivkou v $\mathbb{R}_r$ rozumíme spojité zobrazení φ nějakého intervalu $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}_r$. Množinu $\varphi(\langle a,b\rangle)$ nazýváme jejím *geometrickým obrazem.* Někdy se také křivkou nazývá množina $\varphi(\langle a,b\rangle)$ a zobrazení φ se nazývá jejím *parametrickým zadáním.*

Abychom vypočítali *délku* křivky, budeme do ní vepisovat lomené čáry, spočteme součet délek jejich jednotlivých úseček (délku lomené čáry) a budeme zkoumat, jestli

a) při zjemňování dělení se délky lomených čar blíží k nějakému číslu, které bychom nazvali délkou křivky,

b) je-li konečné supremum délek těchto lomených čar. Jestli ano, pak jej nazveme délkou křivky a křivku *rektifikovatelnou.*

Tyto dva přístupy odpovídají dvěma definicím Riemannova integrálu: a) pomocí integrálních součtů, b) pomocí horních a dolních součtů.

Omezíme se na případ *jednoduché křivky třídy* C^1, což znamená, že zobrazení φ zadávající křivku je prosté na $\langle a,b\rangle$, jeho složky $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_r$ jsou spojitě derivovatelné na $\langle a,b\rangle$ a $\varphi' = (\varphi_1',\varphi_2',\dots,\varphi_r') \neq 0$ nebo *jednoduché uzavřené křivky třídy* C^1, což znamená, že zobrazení φ zadávající křivku je prosté na $\langle a,b)$, $\varphi(a) = \varphi(b)$ a jeho složky $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_r$ jsou spojitě derivovatelné na $\langle a,b\rangle$, $\varphi' \neq 0$.

[10] $\mathbb{R}_r = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ (r-krát) je množina uspořádaných r-tic reálných čísel $a = (a_1,a_2,\dots,a_r)$.

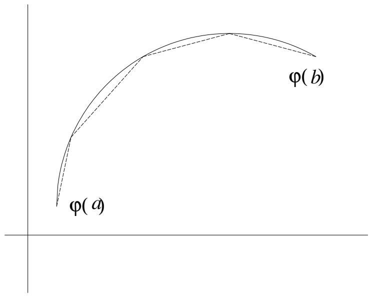
Vepsané lomené čáry jsou definovány následovně: je-li $D : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, položíme

$$\psi^{[i]}(t) = \varphi(t_{i-1}) + \frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}),\ t \in \langle t_{i-1}, t_i\rangle,$$

$i = 1, 2, \dots, n$ a

$$\psi(t) = \psi^{[i]}(t),\ t \in \langle t_{i-1}, t_i\rangle,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

(Každé $\psi^{[i]}$ dává úsečku, spojující body $\varphi(t_{i-1})$ a $\varphi(t_i)$ (viz obrázek 6.3).



Obr. 6.3

Délkou této lomené čáry je přirozené nazvat součet délek jejích úseček, tj.

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{r} (\psi_j(t_i) - \psi_j(t_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{r} (\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1}))^2}.$$

Podle věty o střední hodnotě je $\varphi_j(t_i) - \varphi_j(t_{i-1}) = \varphi_j'(\tau_{ij})(t_i - t_{i-1})$, a tedy $(*)$ se dá zapsat ve tvaru

$$(**) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{r} [\varphi_j'(\tau_{ij})]^2}(t_i - t_{i-1}).$$

Kdyby všechny střední body τ_{ij}, $j = 1, 2. \dots, r$ byly stejné a rovné nějakému $\tau_i \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$, pak by výraz

$$(***) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{r} [\varphi_j'(\tau_i)]^2} (t_i - t_{i-1})$$

byl integrální součet funkce $H(t) = \sqrt{\sum_{j=1}^{r} [\varphi_j'(t)]^2}$ odpovídající dělení D a n-tici $\tau \in N(D)$, a při zjemňování dělení by se blížil integálu $\int\limits_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{r} [\varphi_j'(t)]^2}\, dt$. Obecně jsou ale τ_{ij} pro různá j různá, a proto musíme ukázat, že rozdíl výrazů $(**)$ a $(***)$ konverguje k nule pro $\nu(D) \to 0$. K tomu použijeme nerovnosti

$$(+) \qquad \left| \sqrt{\sum_{j=1}^{r} a_j^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^{r} b_j^2} \right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{r} (a_j - b_j)^2} \le \sum_{j=1}^{r} |a_j - b_j|,$$

která platí pro libovolná $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Druhá nerovnost se snadno dostane umocněním na druhou, první možná čtenář zná z přednášky z lineární algebry (pro jeho pohodlí ji petitem dokazujeme dále). Díky těmto nerovnostem máme

$$|\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{r} [\varphi_j'(\tau_{ij})]^2} (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=1}^{r} [\varphi_j'(\tau_i)]^2} (t_i - t_{i-1})| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{r} |\varphi_j'(\tau_{ij}) - \varphi_j'(\tau_i)|)(t_i - t_{i-1}) \le$$

$$\le r\varepsilon \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = r\varepsilon(b - a)$$

pro $\nu(D) < \delta(\varepsilon)$, zaručující $|\varphi_j'(t) - \varphi_j'(\tilde{t})| < \varepsilon$ pro $|t - \tilde{t}| < \delta(\varepsilon)$. Délka křivky φ je tedy rovna

$$\int\limits_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{r} [\varphi_j'(t)]^2}\, dt.$$

Dá se dokázat, že pro jednoduchou nebo jednoduchou uzavřenou křivku takto definovaná délka nezávisí na parametrizaci. Na druhé straně pro $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0, 4\pi \rangle$ (dvakrát proběhnutá jednotková kružnice se středem v počátku) uvedený integrál je rovem 4π.

Důkaz první nerovnosti v (+). 1) V $\mathbb{R}_r$ zavedeme sčítání $(a + b) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_r + b_r)$, násobení číslem $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_r)$, skalární součin $(a, b) = \sum_{j=1}^{r} a_j b_j$ a normu $\|a\| = \sqrt{(a, a)}$. Potom pro každé $a, b \in \mathbb{R}_r$ a každé $\lambda \in \mathbb{R}$ je

$$0 \le (a - \lambda b, a - \lambda b) = (a, a) - 2\lambda(a, b) + \lambda^2 (b, b).$$

Diskriminant kvadratického trojčlenu (v proměnné λ) na pravé straně musí být nekladný (jinak by tento trojčlen měl dva reálné kořeny, a někde by nabýval záporných hodnot): $(a, b)^2 - (a, a)(b, b) \le 0$, tj.

$$|(a, b)| \le \|a\|\|b\|$$

(tzv. *Cauchy-Buňakovského* nerovnost).

2) Pro normu platí

$$\|a + b\| \le \|a\| + \|b\|$$

(tzv. *Minkovského* nerovnost), neboť

$$\begin{aligned}\|a + b\|^2 = (a + b, a + b) = (a, a) + 2(a, b) + (b, b) \le \\ \le (a, a) + 2|(a, b)| + (b, b) \le (a, a) + 2\sqrt{(a, a)}\sqrt{(b, b)} + (b, b) = (\|a\| + \|b\|)^2.\end{aligned}$$

3) $a = (a - b) + b \Rightarrow \|a\| \le \|a - b\| + \|b\| \Rightarrow \|a\| - \|b\| \le \|a - b\|$. Analogicky odvodíme nerovnost $\|b\| - \|a\| \le \|a - b\|$. Požadovaná nerovnost plyne z posledních dvou nerovností.

PŘÍKLAD 6.22. Nechť je křivka dána parametricky zobrazením

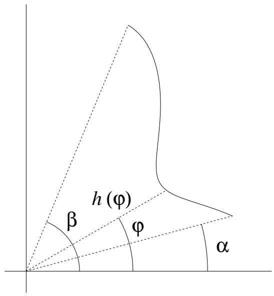
$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Pak se její délka rovná

$$\begin{aligned}a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} |\sin \frac{t}{2}|\, dt = \\ = 4a \int_0^{\pi} \sin y\, dy = 4a[-\cos y]_0^{\pi} = 8a.\end{aligned}$$

Je-li křivka zadána jako graf funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, pak volíme za parametr x a dostaneme pro délku této křivky vzoreček

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$



Obr. 6.4

Zadáme-li křivku v tzv. polárním tvaru $r = h(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle 0, 2\pi \rangle$ (viz obrázek 6.4),

dostaneme $x = h(\varphi) \cos t$, $y = h(\varphi) \sin t$ a pro její délku dostaneme vzoreček

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{h^2(\varphi) + (h'(\varphi))^2}\, d\varphi$$

(proveďte podrobně).

Příklad 6.23. Je-li $r = \varphi$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (kus Archimedovy spirály), pak je délka této křivky rovná

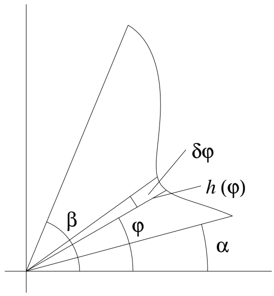
$$\int_{0}^{2\pi} \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi.$$

(Spočtěte tento integrál Eulerovou substitucí.)

2. Plošný obsah rovinných útvarů.

Jak jsme již ukázali v úvodu, má pro f nezápornou na $\langle a, b \rangle$ $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ význam plošného obsahu množiny v $\mathbb{R}_2$ omezené osou x, grafem funkce f a přímkami $x = a$ a $x = b$.

Plošný obsah rovinné množiny omezené paprsky $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ a křivkou zadanou v polárním tvaru funkcí $r = h(\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha, \beta \rangle$ (viz obrázek 6.5) je roven



Obr. 6.5

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} h^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Je totiž plocha malé výseče omezené paprsky φ a $\varphi + \delta\varphi$ a grafem křivky přibližně rovna $\frac{1}{2}h(\varphi).h(\varphi)\delta\varphi$ (jako plocha trojúhelníka o základně $h(\varphi)\delta\varphi$ a výšce $h(\varphi)$). Rozdělíme-li zkoumanou množinu na malé části uvedeného typu a sečteme jejich přibližné plošky, dostaneme integrální součet uvedeného integrálu.

3. Objem rotačního tělesa.

Nechť je dána funkce f nezáporná a spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť V je těleso, které dostaneme otáčením grafu funkce f okolo osy x. Potom jeho objem je roven

$$\pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Tento výsledek dostaneme tak, že těleso V přibližně rozdělíme na tenké válečky o výšce $\triangle x$ a podstavě o poloměru $f(x)$. Objem takového válečku je $\pi f^2(x) \triangle x$. Jejich sečtením dostaneme integrální součet uvedeného integrálu.

4. Fyzikální aplikace.

Dvě takové aplikace (práci síly po přímkové dráze a hmotu tyče) jsme již uvedli v úvodu. Uveďme zde ještě výpočet *těžiště* tyče:

Je-li dáno n hmotných bodů na ose x ležících v bodech o souřadnicích $x_1, x_2, \dots, x_n$ a hmotách $m_1, m_2, \dots, m_n$, pak se souřadnice těžiště této soustavy bodů vypočte podle vzorce

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

Rozdělíme-li hmotnou tyč zaujímající interval $\langle 0, l \rangle$ na malé části body $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = l$, můžeme přibližně jednotlivé dílky považovat za hmotné body o hmotách $m_i = \rho(x_i) \bigtriangleup x_i$ ($\rho(x)$ je lineární hustota hmoty tyče) a ležících v bodech o souřadnicích x_i. Podle výše uvedeného vzorce je souřadnice těžiště této soustavy bodů rovna

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \rho(x_i)(x_i - x_{i-1})}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(x_i)(x_i - x_{i-1})},$$

což se při normě dělení konvergující k nule blíží

$$\frac{\int_0^l x\rho(x)\,dx}{\int_0^l \rho(x)\,dx}.$$

Poznamenejme nakonec, že výše uvedené geometrické příklady se opírají o „názornou" představu plošného obsahu a objemu a zde je neprecizujeme. Podobně rozumnost postupu ve fyzikálních příkladech musí být zdůvodněna fyzikálními argumenty.

6.15. Přibližný výpočet integrálů

Jak jsme viděli, jen poměrně málo integrálů se dá spočítat přesně. Proto velký význam mají přibližné metody výpočtu integrálů a odhady chyb při těchto metodách. Současné počítače tento přibližný výpočet velmi urychlují. Omezíme se zde na stručný výklad některých metod, aby čtenář dostal jistou představu o tom, co asi počítače provádějí.

1. Obdélníková metoda.

Rozdělíme integrační interval $\langle a, b\rangle$ na n stejných částí délky $(b-a)/n = h$. Označíme $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $y_i = f(x_i)$. Nahradíme funkci f funkcí $\tilde{f}$ danou předpisem $\tilde{f}(x) = y_i$ pro $x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Integrál funkce $\tilde{f}$ rovný $h \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ pak dává s jistou přesností integrál původní funkce f. Pro f, která má na $\langle a, b\rangle$ omezenou derivaci ($|f'| \leq M_1$) je chyba v absolutní hodnotě menší nebo rovná $\frac{1}{2}M_1(b-a)h$.

2. Lichoběžníková metoda.

Při stejných označeních jako výše nahradíme funkci f funkcí $\tilde{f}$, která je lineární na každém dělícím intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a rovná f v jeho krajních bodech. Potom je integrál funkce $\tilde{f}$ roven $h(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n)$ a přibližuje integrál funkce f s chybou v absolutní hodnotě menší nebo rovnou $\frac{1}{12}M_2(b-a)h^2$, kde $|f''| \leq M_2$.

3. Simpsonova (parabolická) metoda.

Jako výše rozdělíme interval $\langle a, b\rangle$ na n stejných částí, ovšem jen pro n sudé. Funkci f nahradíme funkcí $\tilde{f}$, která na každém intervalu $\langle x_{2i-2}, x_{2i}\rangle$ má tvar $ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou takové, že $\tilde{f}(x_i) = y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Taková $\tilde{f}$ je určena jednoznačně a její integrál je roven $\frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$ a přibližuje integrál funkce f s přesností v absolutní hodnotě menší nebo rovnou $\frac{1}{180}M_4(b-a)h^4$, kde $|f^{(4)}| \leq M_4$.

Podrobněji o těchto otázkách viz například [I1].

Literatura

[K1-3] Kopáček J.: Matematika pro fyziky I., II., III. SPN, Praha. (Skripta MFF UK.)

[KI-III] Kopáček J.: Matematická analýza pro fyziky I-III. Matfyzpress, Praha, 2002, 2003.

[D1] Jarník V.: Diferenciální počet I., Praha, 1963.

[I1] Jarník V.: Integrální počet I., Praha, 1963.

[D2] Jarník V.: Diferenciální počet II., Praha, 1963.

[F1-2] Fichtěngoľc G. M: Kurs differencialňogo i integralňogo isčislenija I., II., Moskva, 1959.

[P1] Kopáček J. a kol.: Příklady z matematiky pro fyziky I. SPN, Praha (Skripta MFF UK.), Matfyzpress, Praha, 2002.

[D] Děmidovič B. P.: Sbornik zadač i upražněnij po matěmatičeskomu analizu, Moskva, 1977 (český překlad pod názvem Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy vydal Fragment 2003).

Rejstřík

Jiří Kopáček

MATEMATICKÁ ANALÝZA NEJEN PRO FYZIKY (I)

Vydal
MATFYZPRESS
vydavatelství
Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 127. publikaci

Obálku navrhl Petr Kubát

Z připravených předloh v systému TEX
vytisklo Reprostředisko UK MFF
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8

Čtvrté přepracované vydání

Praha 2004

ISBN 80-86732-25-8
ISBN 80-85863-20-0 (1. vydání)
ISBN 80-85863-74-X (2. vydání)
ISBN 80-85863-89-8 (3. vydání)