Matematická analýza I

Cvičení 1 (4. 10. 2016)

Definice absolutní hodnoty. Řešení nerovnic s absolutními hodnotami. Geometrická interpretace řešení nerovnice $|x+1|<3$.

Komplexní čísla a operace s nimi, absolutní hodnota, reálná a imaginární část.
Algebraický, goniometrický a exponenciální tvar, $e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$. Vlastnosti exponenciály v komplexním oboru, kosinus a sinus jako reálná a imaginární část exponenciály.
Důkaz Moivreovy věty a souvislost s exponenciálním tvarem (zatím pouze pomůcka pro zapamatování), binomická rovnice, kvadratická rovnice.

Důkazové techniky:
- důkaz přímý,
- nepřímý ($\neg B \implies \neg A$),
- sporem ($\neg(A \wedge \neg B)$, příklad: důkaz iracionality čísla $\sqrt{2}$),
- důkaz matematickou indukcí (binomická věta $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$).

Součet prvních n členů geometrické posloupnosti, souvislost s rozklady $1+x^n$ a odvození (bez užití matematické indukce).

Transformace grafu, význam jednotlivých parametrů v předpisu funkce $\frac{y-a}{b} = f(\frac{x-c}{d})$, aplikace na příklad $y = 2\sin 3(x - \frac{\pi}{3}) + 1$.

Domácí úkol na 11. 10. 2016

Odkazy na příklady míří vždy do seznamu „Pavlíková“:
(`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Pavlikova/Pavlikova-MA1.pdf`)

Pavlíková, 2. Komplexní čísla: př. 3, 4c, 5, 8c

Znázorněte v Gaussově rovině všechna komplexní čísla $z = x + y\mathrm{i}$ taková, že
a) $|z|<1$ b) $|z|>1$ c) $|z-(2-\mathrm{i})|=1$
d) $|z-\mathrm{i}|+|z+\mathrm{i}|=1$ e) $|z-\mathrm{i}|+|z+\mathrm{i}|=2$ f) $|z-\mathrm{i}|+|z+\mathrm{i}|=4$
g) $z+\bar{z}=1$ (vyjádřete z a $\bar{z}$ pomocí x a y)

Odvoďte: $\forall a, x \in \mathbb{R}, x>0$ a $a>0, a \neq 1$: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

Pavlíková, 3. Důkazy: př. 10a, b, c, d, f; 11

Pavlíková, 4. Funkce a jejich vlastnosti: př. 1a, b, c, d; 5b, c, d

Pavlíková, 5. Cyklometrické funkce: př. 1a, b, c, d; 4a, c, e

Cvičení 2 (11. 10. 2016)

Opakování, úlohy v návaznosti na domácí úkol.

Pojem funkce, vlastnosti funkcí, funkce periodická, sudá/lichá, prostá, inverzní.

Definice funkcí sinus a kosinus, odvození některých jejich hodnot a součtových vzorců.

Domácí úkol na 18. 10. 2016

Pavlíková, 4. Funkce a jejich vlastnosti: př. 1f, i, p, q;   2b, c, d;   6a, b, c, d;   7

Pavlíková, 5. Cyklometrické funkce: př. 5a, c, d

Seznámit se s odvozením součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus.

Odvoďte součtové vzorce pomocí Moivreovy věty.
(Je to vlastně jen „pomůcka pro zapamatování“, neboť sama Moivreova věta je odvozena pomocí součtových vzorců…)

Odvoďte: $\sin\dfrac{\pi}{3\cdot 2^n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{3}}}}}$ (n odmocnin, $n \in \mathbb{N}$)
[Návod: určete délku strany pravidelného 6úhelníku, 12úhelníku, 24úhelníku, …]

Tomiczek, cv. 3.8 (dokažte trojúhelníkovou nerovnost)

Fibonacciova posloupnost

Je zadána rekurentně $F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Leonardo Pisánský (zvaný Fibonacci) vydal 1202 knihu Liber abaci, v níž je následující úloha (upraveno): Máme pár dospělých králíků. Kolik párů králíků budeme mít po n měsících, pokud se králíci množí dle následujících pravidel:
- každému dospělému páru se každý měsíc narodí jeden pár
- králíci dospívají po jednom měsíci, poprvé tedy rodí až druhý měsíc po narození
- králíků neubývá (nehynou ani je nikdo neodnáší)

	1. měsíc	2. měsíc	3. měsíc	4. měsíc	5. měsíc
1. generace	o	o	o	o	o
2. generace	o	o o	o o o	o o o o	o o o o o
3. generace			o	o o o	o o o o o o
4. generace					o

Program pro výpis členů Fibonacciovy posloupnosti (prvních N členů) v jazyce Python 3, zdarma ke stažení na `https://www.python.org/downloads/`.

```
N = 35  # počet členů

a, b = 1, 1
print(a, end=', ')
print(b, end=', ')

for i in range(2, N):
    a, b = b, a+b
    print(b, end=', ')
```

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465, …

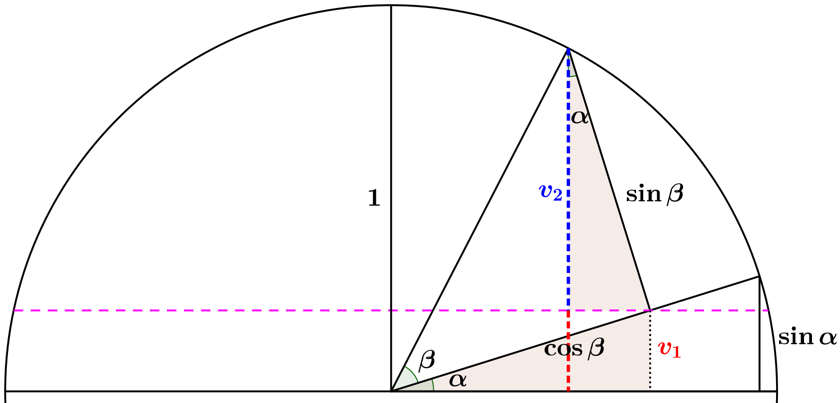
Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:

1. $F_n < 2^n$
2. $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$
3. $F_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$
4. $F_n = \dfrac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$, kde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$

6.* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$ (s a bez použití vzorce pro n-tý člen)

Skutečně:

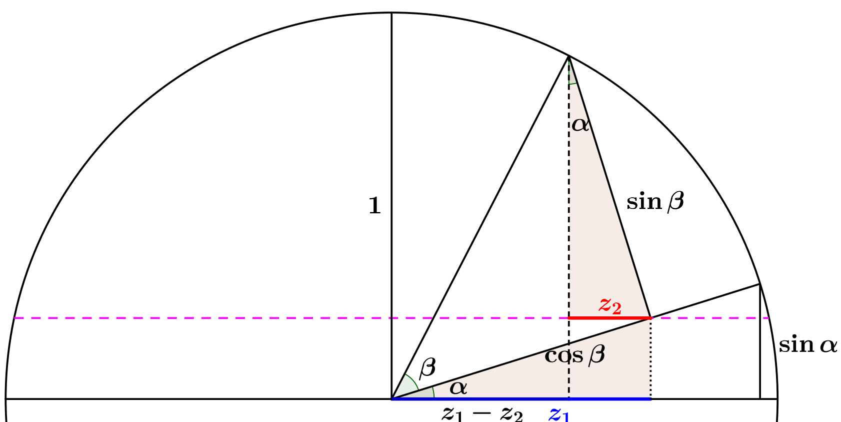
F_n	F_{n+1}	F_{n+1}/F_n	F_n	F_{n+1}	F_{n+1}/F_n
1	2	2	21	34	1,619 047
2	3	1,5	34	55	1,617 647
3	5	1,666 666	55	89	1,618 181
5	8	1,6	89	144	1,617 977
8	13	1,625	144	233	1,618 055
13	21	1,615 384	233	377	1,618 025



$$\sin(\alpha+\beta) = v_1 + v_2$$

$$\sin\alpha = \frac{v_1}{\cos\beta} \qquad \cos\alpha = \frac{v_2}{\sin\beta}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$



$$\cos(\alpha+\beta) = z_1 - z_2$$

$$\cos\alpha = \frac{z_1}{\cos\beta} \qquad \sin\alpha = \frac{z_2}{\sin\beta}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Cvičení 3 (18. 10. 2016)

Počítání s cyklometrickými funkcemi, grafy cyklometrických funkcí.

Součtové vzorce: snadné „odvození“ pomocí Moivreovy věty,
využití součtových vzorců pro odvození všech ostatních vzorců z goniometrie.

Poznámka – klíčová role důkazu ve vyučování na základní a střední škole:
- rozvoj myšlení – naplnění jednoho ze základních cílů vyučování matematice,
- sociální důsledky – autorita a hledání pravdy,
- tvořivé opakování předchozí látky,
- hlubší porozumění – důsledky při vstupu na VŠ,
- student ze SŠ neodchází po 4 letech pouze s matným dojmem, že „někde v tabulkách jsou nějaké vzorce“.

Fibonacciova posloupnost: důkaz některých tvrzení.

Důkazy nerovností indukcí: $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ pro $n \geq 2$.

Supremum a infimum – příklady.

Domácí úkol na 1. 11. 2016

cvičení 25. 10. odpadá kvůli imatrikulacím...

- Pavlíková, série III, 1. Supermum a infimum: příklady 1 až 5 (tj. vše).

- Vypočtěte následující limity posloupností.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+100n+1000}{3n^2+n+2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+(n+1)^2}{(n+3)^2+(n+4)^2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+(2n-1)^3}{(1-3n)^3+n^3}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+12}-\sqrt[3]{n-1}}{2\sqrt{3+2n}+\sqrt[3]{n-1}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-2)^{42}-n^{42}}{n^{41}}$ g) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left[\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{42}-1\right]$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$

- Pavlíková, série III, 2. Limita posloupnosti: 5a, b, c; 6a–f; 7a, b, c, e, f; 8a

Cvičení 4 (1. 11. 2016)

Určování suprem a infim množin.

Počítání limit z minulého domácího úkolu.

Domácí úkol na 15. 11. 2016

Pavlíková, série III, 2. Limita posloupnosti:
všechny příklady 1 až 10;   14b, c, d;   15, 16, 17a, b, c;

Pokuste se vypočítat limitu posloupnosti (za předpokladu, že existuje):

a) $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right), \quad a_1 > 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi, \quad F_1 = F_2 = 1,$ (s a bez použití vzorce pro n-tý člen)

Cvičení 5 (15. 11. 2016)

Počítání limit posloupností z minulého domácího úkolu.

Domácí úkol na 22. 11. 2016

- Pavlíková, série III, 2. Limita posloupnosti:
  všechny příklady 1 až 10; 14b, c, d; 15, 16, 17a, b, c; 18b, c

- Vypočtěte následující limity posloupností. Předpokládejte, že $a \in \mathbb{R}$.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}{n+1}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}}{n+1}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^a \cdot \left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right)$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^a \cdot \left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-\sqrt{n^2-\sqrt{n}}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} n^a \cdot \left(\sqrt{n^3+\sqrt{n}}-\sqrt{n^3-\sqrt{n}}\right)$

- Najděte všechny hromadné body následujících posloupností a $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

a) $a_n = n \cdot \sin \dfrac{\pi n}{4}$ b) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \cdot \cos(\pi n)$

- Pavlíková, série IV, 1. Limita funkce: příklad 1a, b, c, d

Cvičení 6 (22. 11. 2016)

Počítání limit posloupností z minulého domácího úkolu, úvod k limitám funkcí.

Domácí úkol na 29. 11. 2016

- Pavlíková, série IV, 1. Limita funkce: příklady 2, 3, 4

Cvičení 7 (29. 11. 2016)

Limity posloupností – tvar příkladů v zápočtovém testu.
Počítání limit funkcí.

Domácí úkol na 6. 12. 2016

• Pavlíková, série IV, 1. Limita funkce: příklady 6 až 12
(lze počítat i další limity funkcí: př. 13 až 21)

• Pokuste se samostatně provést důkazy zadané ve skriptu Tomiczek:
- funkce a jejich vlastnosti, od str. 46: cv. 6.3 a 6.4, př. 6.3, cv. 6.5 a 6.6
- vlastnosti spojitých funkcí: str. 56: cv. 6.14, 6.15, 6.16

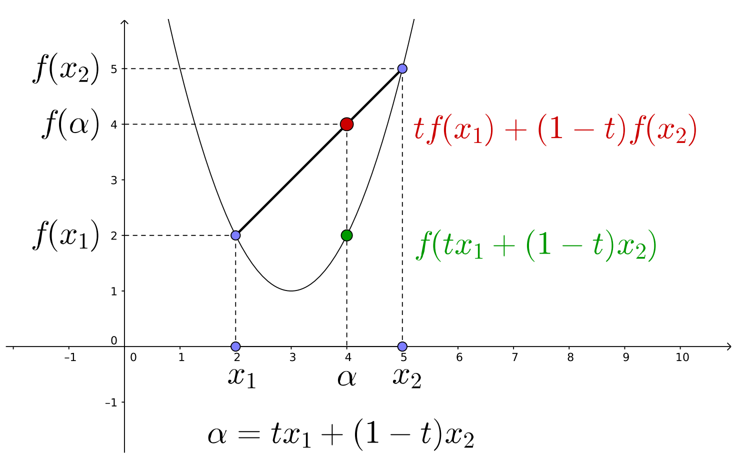
• Vytvořte jeden příklad na limity posloupností, který bude kombinovat všechny klíčové aspekty (rozdíly odmocnin, rychlost růstu posloupností, e). Příklad by neměl vyjít $\pm\infty$ ani 0.

• Metoda půlení intervalu (neboli metoda bisekce) je aplikací Bolzanovy věty o nabývání mezihodnot. Nejděte s její pomocí záporný kořen rovnice $x^2 - 2^x = 0$ s přesností aspoň na 5 desetinných míst.

• Poznámka k definici konvexní funkce:
výraz $tx_1 + (1-t)x_2$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ nabývá pro
$t = 0$ hodnotu x_2,
$t = \frac{1}{2}$ hodnotu $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, tj. jedná se o střed úsečky s krajními body x_1, x_2,
$t = 1$ hodnotu x_1.
Jak parametr t probíhá interval $\langle 0, 1\rangle$, nabývá výraz $tx_1+(1-t)x_2$ hodnoty všech bodů úsečky s krajními body x_1, x_2. Jedná se tedy o parametrické vyjádření této úsečky.

Podobně je tomu s výrazem $tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$: jedná se o úsečku s krajními body $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Smysl nerovnosti $f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ v definici konvexnosti je tedy tento:
„zvolíme-li si libovolný bod úsečky x_1x_2, tak funkční hodnota v něm leží pod příslušným bodem spojnice bodů $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$“.
Neboli spojnice bodů $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ leží nad grafem funkce f.



Cvičení 8 (6. 12. 2016)

Počítání limit funkcí (7–10).

Domácí úkol na 13. 12. 2016

• Pavlíková, série IV, 1. Limita funkce: příklady 11 až 21

• Porozumět definici konvexnosti (viz minulý úkol).
Ze skripta Tomiczek provést cv. 6.5 (str. 46) a cv. 6.14 (str. 56).

Písemná práce MA I A (limity posloupností a limity funkcí) se bude psát na cvičení v úterý: **ranní i odpolední skupina: 20. prosince.**

Cvičení 9 (13. 12. 2016)

Počítání limit funkcí (13–21).

Domácí úkol na 20. 12. 2016

Příprava na písemnou práci – limity posloupností a limity funkcí.

Cvičení 10 (20. 12. 2016)

Domácí úkol na 3. 1. 2017

Hyperbolické funkce

- **Poznámka.**
  \- Funkce $\operatorname{tgh} x$ je na $\mathbb{R}$ definována rovností $\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.
  \- Inverzní funkce k hyperbolickým funkcím $\sinh x$, $\cosh x$, $\operatorname{tgh} x$ se značí $\operatorname{argsinh} x$, $\operatorname{argcosh} x$, $\operatorname{argtgh} x$, čteme *argument sinu hyperbolického*, *argument kosinu hyperbolického*, *argument tangenty hyperbolické* (příp. *argument funkce tangens hyperbolický*).

- Na základě definice hyperbolických funkcí odvoďte vztahy pro $\sinh 2x$ a $\cosh 2x$.
  (viz Tomiczek, cv. 6.2 na str. 46)

- Vypočtěte limity $$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x}\,.$$
  $$\lim_{x\to 0} (\cosh x)^{\frac{1}{\operatorname{tgh} x\, \sinh x}} \qquad \lim_{x\to 0+} (\sinh x)^{\operatorname{tgh} x}$$

Spojitost a stejnoměrná spojitost

- Ověřte, zda funkce f na zadaných intervalech splňuje předpoklady Weierstrassovy věty. Je funkce f na těchto intervalech omezená? (Načrtněte si graf.)
  a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $J_1 = [-1, 1]$, $J_2 = [0, 1]$, $J_3 = [\frac{1}{n}, 1]$, $n \in \mathbb{N}$,
  b) $f(x) = \dfrac{\log_x 2}{\log_2(x^2 - x - 2)}$, $J = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$,
  c) $f(x) = x \ln x$, $J = [0, 1]$,
  d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x \ln x}$, $J_1 = [0, 1]$, $J_2 = [\frac{1}{7}, 7]$.
- Pomocí Bolzanovy věty rozhodněte, zda má rovnice $\ln x = \cos x$ kořen. V kladném případě nalezněte metodou bisekce prvních 5 cifer jeho desetinného rozvoje.
- Pokuste se samostatně provést cvičení zadaná ve skriptu Tomiczek:
  - funkce a jejich vlastnosti, str. 44: cv. 6.1,
  - vlastnosti spojitých funkcí: str. 57: př. 6.9 a 6.10.
- Načrtněte graf funkce $y = \sin \frac{1}{x}$ a určete
$$\limsup_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \qquad \liminf_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}.$$

Derivace a diferenciál

- Tomiczek, str. 60, cv. 7.1b: dokažte, že derivací sudé funkce je funkce lichá a naopak.
- Napište rovnici tečny v bodě x_0 ke grafu funkce f.
  a) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$,
  b) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$,
  c) $f(x) = \cosh x$, $x_0 = 1$.
- Podle pravidla o derivování inverzní funkce najděte derivace následujících funkcí.
  a) $y = \arcsin x$ b) $y = \operatorname{argsinh} x$ c) $y = \operatorname{argtgh} x$
- Pomocí diferenciálu určete přibližně následující hodnoty.
$$\sqrt{4,2} \quad \sin 3° \quad \ln 1,2 \quad \sqrt[5]{e}$$

Cvičení 11 (3. 1. 2017)

Definice goniometrických a cyklometrických funkcí, limity obsahující hyperbolické funkce. Spojitost, derivace, diferenciál – počítání příkladů z předchozího domácího úkolu.

Domácí úkol na 10. 1. 2017

Vypočítejte následující limity funkcí (bez užití derivací a l'Hospitalova pravidla), případně ověřte výsledky.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x^{\pi}}} \cdot \left(\cos^3\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)\right)^{\frac{1}{\ln \arcsin(2-2\sqrt{1-x})}} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{1+x} - \frac{\pi}{4}\right)^{\operatorname{arccotg} x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\ln\cos 7x)\cdot(1-\cos 3x\ \cos 5x)}{\ln(2+\operatorname{tgh} x\cdot \operatorname{argtgh} x) - \ln 2} \cdot \frac{\operatorname{arctg}(\cosh x)}{\ln\cos 2x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{\operatorname{arctg}^2 x} - e^x\right)\cdot\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}\right)}{\operatorname{argtgh} x\cdot \operatorname{tgh} x \cdot \ln\cos x^2} \cdot \frac{\ln(1+xe^x)\ \sin 2x^3}{\sinh x\cdot \operatorname{argsinh} x} = 1$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1-} x^{1/\arccos^2 x} \cdot \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)^{\frac{1}{\ln(1-x)}} = \sqrt{2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^{x} \cdot (\operatorname{arccotg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = 1$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\cdots\cos nx - 1}{1-\cosh x\cdot\cosh 2x\cdot\cosh 3x\cdots\cosh nx} = 1$

Cvičení 12 (10. 1. 2017)

Poznámky k limitám posloupností.

Vyšetřování průběhů funkcí: $y = x - 2\operatorname{arctg} x$.