Základní příklady z lineární algebry

1 Determinanty

A. Vypočtěte následujcí determinanty. S výhodou použijte Laplaceovu větu.

$$1.\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad 2.\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

[-42; 15]

B. Řešte následující soustavy pomocí Cramerova pravidla $x_j = \dfrac{\det A_j}{\det A}$, kde $\det A_j$ je determinant, který se od determinantu matice soustavy liší tak, že je j-tý sloupec nahrazen sloupcem pravých stran. Pro výpočet příslušných determinantů použijte Sarrusovo pravidlo.

$$3.\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \qquad 4.\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

[K=[1,0]; K=[-1/5,6/5,2/5]]

C. Pomocí reciproké matice najděte matici inverzní.
Reciproká (adjungovaná) matice – ***transponovaná*** matice algebraických doplňků.
Algebraický doplněk k prvku a_{ij} – subdeterminant vzniklý vyškrtnutím řádku a sloupce, ve kterém se tento prvek nachází, tj. i-tého řádku a j-tého sloupce, ***opatřený znaménkem*** $(-1)^{i+j}$.

$$5.\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad 6.\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Soustavy lineárních rovnic

D. Řešte následující soustavy.

$$7.\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad 8.\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

[K=[0,0,0,0]; K=[-4,-2,6,5]]

$$9.\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad 10.\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

[K=[0,-1,1,0]+[(-1,-2/3,2,1)]; K=∅]