

MATICOVÁ REPREZENTACE HOMOMORFISMŮ (zcela nejzákladnější teorie v bodech)

- **Matici homomorfismu** $f : V \rightarrow W$ *vzhledem k bázím* B a C , ozn. $A_{f;B,C}$, najdeme dle definice takto:

- I. určíme obrazy vektorů báze B v homomorfismu f ,
- II. určíme souřadnice těchto obrazů vzhledem k bázi C ,
- III. tyto souřadnice napíšeme ve stejném pořadí do sloupců hledané matice.

Pozn. 1: ve sloupcích matice $A_{f;B,C}$ jsou tedy souřadnice $\langle f(\vec{b}_j) \rangle_C$.

Pozn. 2: je-li báze C kanonická, je krok II. triviální.

- **Maticový zápis homomorfismu**

Nechť V , W jsou vektorové prostory nad polem T , dále B , C po řadě báze těchto prostorů, $f : V \rightarrow W$ homomorfismus, $A_{f;B,C}$ matice homomorfismu f vzhledem k bázím B a C ; potom pro každý vektor $\vec{v} \in V$ je

$$\langle f(\vec{v}) \rangle_C^T = A_{f;B,C} \cdot \langle \vec{v} \rangle_B^T$$

- **Matice endomorfismu** f prostoru V *vzhledem k bázi* B je vlastně matice homomorfismu $f : V \rightarrow V$ vzhledem k bázím B , B .

- **Matice přechodu**

Nechť B , C jsou dvě báze téhož vektorového prostoru V ; potom

matice přechodu od báze B k bázi C =

= matice **identického automorfismu** prostoru V vzhledem k bázím B , C .

Pozn. 1: stručně zapsáno: $P_{B,C} = A_{\text{id};B,C}$.

Pozn. 2: krok I. je triviální.

- **Transformace souřadnic**

Nechť B, C jsou dvě báze téhož vektorového prostoru V a $P_{B,C}$ je matice přechodu od báze B k bázi C ; potom pro každý vektor $\vec{v} \in V$ je

$$\langle \vec{v} \rangle_C^T = P_{B,C} \cdot \langle \vec{v} \rangle_B^T.$$

Pozn.: matice přechodu od C k B je matice $P_{B,C}^{-1}$, tj. $P_{B,C}^{-1} = P_{C,B}$.

Proto $\langle \vec{v} \rangle_B^T = P_{B,C}^{-1} \langle \vec{v} \rangle_C^T$.

- **Matice homomorfismu vzhledem k různým bázím**

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad týmž polem T , dále B, L jsou báze U a C, M jsou báze V . Nechť je dán homomorfismus $f : U \rightarrow V$.

Potom pro matice $A_{f;L,M}$ a $A_{f;B,C}$ homomorfismu f vzhledem k vyznačeným bázím platí:

$$A_{f;L,M} = P_{C,M} \cdot A_{f;B,C} \cdot P_{L,B},$$

jak je patrné z následujícího schématu:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xleftarrow{\text{id}} & V & \xleftarrow{f} & U & \xleftarrow{\text{id}} & U \\ M & & C & & B & & L \\ & & P_{C,M} & & A_{f;B,C} & & P_{L,B} \end{array}$$

- **Matice složení homomorfismů**

Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad týmž polem T , dále B, C, D po řadě jejich báze, A_f matice homomorfismu $f : U \rightarrow V$ vzhledem k bázím B, C , dále A_g matice homomorfismu $g : V \rightarrow W$ vzhledem k bázím C, D , potom $A_g \cdot A_f$ je maticí homomorfismu $f \circ g : U \rightarrow W$ vzhledem k bázím B, D .

$$\begin{array}{ccccc} W & \xleftarrow{g} & V & \xleftarrow{f} & U \\ D & & C & & B \\ & & A_g & & A_f \end{array}$$

$$A_{f \circ g} = A_g \cdot A_f$$

Pozn. 1: podrobněji (s vyznačením bází): $A_{f \circ g; B, D} = A_{g; C, D} \cdot A_{f; B, C}$.

Pozn. 2: $(f \circ g)(\vec{v}) = g(f(\vec{v}))$.