Lineární algebra I
Osnova cvičení

Základní literatura k předmětu:

[Be] Bečvář J.: *Lineární algebra.* Matfyzpress, Praha, 2010.

Podmínky udělení zápočtu:
Budeme psát 2 písemné práce (v polovině a na konci semestru), v součtu je nutné z nich získat alespoň 8 bodů (z 10 možných). Počet získaných bodů se zohledňuje u zkoušky.

1 Cvičení 3. 10. 2017

1.1 Grupy a pole

Grupa: definice ([Be], str. 45). Pole: definice ([Be], str. 18).

Pole $(T, +, \cdot)$ je vlastně množina se dvěma binárními operacemi, kde

- $(T, +)$ je komutativní grupa,
- $(T \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutativní grupa,
- a obě operace jsou svázány distributivními zákony.

Příklady:

1. Ukažte, že $(\mathbb{Z}, +)$ je komutativní grupa.
2. Ukažte, že $(\mathbb{Q}, +)$ je komutativní grupa.
3. Ukažte, že $(\mathbb{R}, +)$ je komutativní grupa.
4. Ukažte, že $(\mathbb{C}, +)$ je komutativní grupa.

5. Rozhodněte, zda $(\mathbb{Z}, \cdot)$ je komutativní grupa.
6. Rozhodněte, zda $(\mathbb{Q}, \cdot)$ je komutativní grupa.
7. Rozhodněte, zda $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutativní grupa.
8. Ukažte, že $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutativní grupa.
9. Ukažte, že $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutativní grupa.

10. Rozhodněte, zda $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je pole.
11. Rozhodněte, zda $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je pole.
12. Ukažte, že $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ je pole.
13. Ukažte, že $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je pole.

14. * Rozhodněte, zda množina $\mathbb{R}^3$ všech uspořádaných trojic reálných čísel se sčítáním po složkách tvoří komutativní grupu.
(tj. $\mathbb{R}^3 = \{[a, b, c];\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $\quad \forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} : [a, b, c]+[d, e, f] = [a+d, b+e, c+f]$)

1.2 Komplexní čísla

Doporučuji knihu:
Calda E.: *Komplexní čísla.* Série Matematika pro gymnázia, Prometheus, Praha, 1994.

Zavedení komplexních čísel, problém se zavedením imaginární jednotky jakožto řešení rovnice $x^2 + 1 = 0$, princip permanence a definice operací (sčítání, násobení) na $\mathbb{C}$. Odčítání a dělení komplexních čísel ($a - b = a + (-b)$, $a : b = a \cdot b^{-1}$), dělení pomocí komplexně sdruženého čísla s jmenovatelem. Komplexní čísla jako uspořádané dvojice reálných čísel a jejich grafická reprezentace.

Algebraický tvar komplexního čísla, Gaussova rovina = rovina komplexních čísel. Goniometrický tvar nenulového komplexního čísla, absolutní hodnota a argument.

Moivreova věta – odvození pomocí součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus.

Věta 1. Pro každá dvě (nenulová) komplexní čísla $r_1\,(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$, $r_2\,(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$ platí:

$$[r_1 \cdot (\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)] \cdot [r_2 \cdot (\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)] = r_1 r_2 \cdot \big(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)\big)\,.$$

Z věty 1 lze snadno odvodit matematickou indukcí následující důsledek.

Věta 2. Pro každou komplexní jednotku $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi\,.$$

Pozorování: násobení komplexních jednotek se chová podobně, jako násobení exponenciál: $e^{\mathrm{i}\alpha} \cdot e^{\mathrm{i}\beta} = e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}$. V Matematické analýze II bude dokázáno (pomocí Taylorových rozvojů), že skutečně

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\,.$$

Každé nenulové komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ lze tedy vyjádřit ve tvaru $z = r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}$, kde $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, který se nazývá *exponenciální tvar komplexního čísla*.

Rozhodněte, jak je to s jednoznačností tohoto vyjádření. (Otázka jednoznačnosti je stejná jako u goniometrického tvaru, její ujasnění je důležité např. při řešení binomické rovnice.)

Příklady:

1. Najděte v $\mathbb{C}$ opačný a inverzní prvek k nenulovému komplexnímu číslu $a + b\mathrm{i}$.
2. Najděte algebraický tvar komplexního čísla $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{-25}$. Využijte Moivreovu větu.
3. Najděte algebraický tvar komplexního čísla $\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)^{-8}$. Využijte Moivreovu větu.
4. Najděte kořeny kvadratické rovnice $x^2 + x - 1 = 0$.
5. Najděte kořeny kvadratické rovnice $x^2 + x + 1 = 0$.
6. Pokud má kvadratická rovnice *s reálnými koeficienty* komplexní kořen $a + b\mathrm{i}$, $b \neq 0$, pak její druhý kořen je nutně $a - b\mathrm{i}$ (je tedy s prvním kořenem komplexně sdružený). Ukažte, proč tomu tak je.
7. Najděte kořeny binomických rovnic: $z^3 = 1$, $z^2 = -4$, $z^3 = 8$. Pokuste se o tři způsoby řešení: a) pomocí algebraického tvaru komplexního čísla; b) pomocí goniometrického tvaru komplexního čísla a Moivreovy věty; c) pomocí rozkladu binomu.
8. Vyjádřete komplexní číslo $2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6}\right)$ v algebraickém tvaru. Následně se pokuste výsledek převést zpět do goniometrického tvaru.

1.3 Soustavy lineárních rovnic I

- Proč řešit soustavy lineárních rovnic? Zabývají se jimi matematikové i dnes?
- Soustavy lineárních rovnic jako základ lineární algebry.

Metoda sčítací (adiční), substituční, komparační (porovnávání stran), grafická. Zápis soustavy pomocí matic.

Příklady:

1. Napište lineární soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, která nemá řešení.
2. Napište lineární soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, která má více než jedno řešení. (Kolik jich pak má?)

2 Cvičení 10. 10. 2017

2.1 Komplexní čísla II

Opakování z předchozího cvičení – problematické příklady, alternativní řešení.

2.2 Soustavy lineárních rovnic II

Soustavy, které mají nekonečně mnoho řešení, nemají řešení. Homogenní soustavy. Řešení soustav pomocí matic, vektorový zápis řešení.

1. $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$

2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$

4. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Řešení
1. $(2, -2, \frac{3}{4}, \frac{1}{2})$, 2. $(1, -1, 1, 3)$, 3. $(-1, 1, 0, 0) + t\,(1, -1, 1, 0)$, 4. $\emptyset$,
5. $(3, 0, 0, -2) + t_1\,(-4, 1, 0, 2) + t_2\,(-3, 0, 1, 2)$

3 Cvičení 17. 10. 2017

- Soustavy lineárních rovnic – řešení pomocí matic
- Operace s maticemi, příklady 1–18 (odpolední skupina pouze 1–16)
- Prvky součinu matic, příklad 1.

4 Cvičení 24. 10. 2017

4.1 Matice

- Operace s maticemi: všechny příklady z tohoto souboru.
  Probírali jsme: maticové rovnice, komutující matice, Hadamardův a Kroneckerův součin.
- Třídy matic: všechny příklady z tohoto souboru.
- Prvky součinu matic: všechny příklady z tohoto souboru.

4.2 Vektorové prostory

- Definice vektorového prostoru ($(V,+)$ komutativní grupa, obě pseudodistributivity, pseudoasociativita, $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$), definice vektoru (prvek VP).
- Ověření, že $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ je vektorový prostor.
- Vektorové prostory (papír rozdaný na cvičení), příklady 1 až 5: doma rozhodnout, zda množiny (s daným sčítáním a násobením skalárem z daného pole) tvoří vektorový prostor.

Příklady vektorových prostorů a jejich podprostorů.
U podprostorů stačí ověřit uzavřenost vzhledem ke sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem (ostatní vlastnosti se totiž dědí z původního prostoru).

Rozmyslete si, proč následující struktury tvoří vektorový prostor.

- Příklad VP: množina všech ***vázaných vektorů*** v rovině (v prostoru) se společným počátkem (součet vektorů pomocí doplnění na rovnoběžník).
  [Tvoří VP, vázané vektory jsou jen geometrickým znázorněním aritmetických VP (uspořádaných dvojic/trojic), součtu pomocí doplnění na rovnoběžník také odpovídá součet usp. dvojic po složkách, podobně si odpovídá i násobení skalárem.]
- Příklad VP: množina všech ***uspořádaných*** n***-tic*** prvků z pole T (sčítání po složkách, násobení skalárem po složkách).
- Příklad VP: samotné pole T nad polem T. (Je to vlastně speciální případ n-tic prvků, $n = 1$.)
- Příklad VP: množina všech ***matic*** typu $m \times n$ (standardní sčítání matic a násobení skalárem). Na matice se můžeme dívat jako na uspořádané $(m \cdot n)$-tice prvků pole T.
  Podprostory tohoto VP (stačí ověřit uzavřenost) jsou například: čtvercové matice, horní trojúhelníkové matice, dolní trojúhelníkové matice, matice diagonální, skalární, symetrické, antisymetrické.
- Příklad VP: množina všech nekonečných ***posloupností*** prvků z pole T.
  Podprostory tohoto VP (stačí ověřit uzavřenost) jsou například: posloupnosti „s nulami na daných místech“, posloupnosti konvergentní, posloupnosti nulové – konvergující k nule.
- Příklad VP: množina všech ***funkcí*** definovaných na dané množině.
  Podprostory tohoto VP (stačí ověřit uzavřenost) jsou například: funkce omezené, spojité – $\mathcal{C}([a,b])$, diferencovatelné na daném intervalu, riemannovsky integrovatelné na intervalu $[a,b]$ – $\mathcal{R}([a,b])$.
- Příklad VP: množina všech ***polynomů*** nad $\mathbb{R}$, případně nad $\mathbb{C}$ či jiným polem.
  Podprostory tohoto VP (stačí ověřit uzavřenost) jsou například: polynomy stupně nejvýše n (pro pevně dané n), polynomy nabývající v daném bodě hodnotu 0.

5 Cvičení 31. 10. 2017

5.1 Imatrikulace (dopolední skupina)

- Uctěte prosím odpadlou lineární algebru minutou ticha.
- Co přesně znamená slovo *imatrikulace* a z čeho je odvozeno?

Domácí cvičení: pokuste se vypočítat vše z kapitolky 5.4.

5.2 Vektorové prostory – opakování

Řešení příkladů z rozdaného papíru, příklady 1 až 4 – vektorové prostory a podprostory.

Třídy matic, příklad 4: matice A, B, D jsou skutečně antisymetrické, neboť v $\mathbb{Z}_2$ je $1 = -1$ (tj. 1 je prvkem opačným sám k sobě), vyhovují tedy podmínce z definice antisymetrické matice: $a_{ij} = -a_{ji}$. Proto na hlavní diagonále v tomto případě nemusejí být jen nuly, ale mohou tam být i jedničky.

Podobné chování lze pozorovat v okruzích $\mathbb{Z}_4$ (protože $2 = -2$), $\mathbb{Z}_6$ (protože $3 = -3$), …

5.3 Počítání ve vektorových prostorech

Poslední axiom vektorového prostoru $(V, +, T, \cdot)$ zní: $\forall \vec{u} \in V: \quad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.
Platí analogické tvrzení pro nulový prvek číselného pole T?

Dokázali jsme následující tvrzení.

- $\forall \vec{u} \in V: \quad 0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$.
- $\forall \vec{u} \in V: \quad (-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$.
- $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V,\ \forall a \in T: \quad a \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = a \cdot \vec{u} - a \cdot \vec{v}$.

Rozdíl dvou vektorů $\vec{u} - \vec{v}$ je definován jako $\vec{u} + (-\vec{v})$, tj. odečíst vektor znamená přičíst vektor opačný.

5.4 Lineární obal, lineární kombinace

Klíčový fakt – lineární obal množiny M je roven množině všech lineárních kombinací vektorů z této množiny M.

Konkrétní příklady lineárních obalů – najděte lineární obal množiny M.

- $M = \{(1, 3)\}$ $\qquad [M] = \{c \cdot (1, 3);\ \ c \in \mathbb{R}\}$
- $M = \{(1, 3, 2), (0, 1, 2)\}$ $\qquad [M] = \{c_1 \cdot (1, 3, 2) + c_2 \cdot (0, 1, 2);\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$
- $M = \{(1, 3, 2), (2, 6, 4)\}$ $\qquad [M] = \{c \cdot (1, 3, 2);\ \ c \in \mathbb{R}\}$
- $M = \{1, x, x^2\}$ $\qquad [M] = \{a + bx + cx^2;\ \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$
- $M = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ $\qquad [M] = \mathbb{R}[x]$
- Rozhodněte, zda vektor $\vec{u} \in \mathbb{Z}_5^3$ náleží lineárnímu obalu množiny $M \subset \mathbb{Z}_5^3$.
  a) $M = \{(2, 0, 3), (4, 1, 4), (3, 2, 2)\}$, $\vec{u} = (1, 2, 3)$ $\qquad \vec{u} \in [M]$
  b) $M = \{(2, 0, 3), (0, 4, 0), (3, 2, 2)\}$, $\vec{u} = (3, 0, 2)$ $\qquad \vec{u} \in [M]$
  c) $M = \{(2, 0, 3), (0, 4, 0), (3, 2, 2)\}$, $\vec{u} = (1, 1, 1)$ $\qquad \vec{u} \notin [M]$

Řešení příkladu a) Máme rozhodnout, zda $\vec{u} \in [M]$. Z přednášky víme, že $[M]$ je množinou všech lineárních kombinací vektorů z M. Pokud tedy $\vec{u} \in [M]$, musí jej být možno vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z množiny M, tj.

$$\exists\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}_5^3\,; \quad c_1 \cdot (2,0,3) + c_2 \cdot (4,1,4) + c_3 \cdot (3,2,2) = (1,2,3)\,.$$

Sečtením vektorů na levé straně dostaneme

$$(2c_1 + 4c_2 + 3c_3, c_2 + 2c_3, 3c_1 + 4c_2 + 2c_3) = (1,2,3)\,,$$

což můžeme přepsat jako soustavu lineárních rovnic pro neznámé c_1, c_2, c_3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Má-li tato soustava řešení, pak lze vektor $\vec{u}$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z množiny M, tj. $\vec{u} \in [M]$.

Pokud tato soustava řešení nemá, tak vektor $\vec{u}$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z množiny M, tj. $\vec{u} \notin [M]$.

Rychlejší řešení příkladu a)
vychází z Frobeniovy věty: soustava $(\,A\,|\,\vec{b}\,)$ má řešení $\iff$ $h(A) = h(\,A\,|\,\vec{b}\,)$
tj. hodnost matice soustavy = hodnost matice rozšířené

Vektory z množiny M dáme do řádků matice, kterou elementárními úpravami (tj. Gaussovou eliminací) převedeme na matici odstupňovanou. Klíčový je počet nenulových řádků, které zbudou (jedná se o dimenzi lineárního obalu $[M]$). Přidáme-li k těmto vektorům vektor $\vec{u}$, může po Gaussově eliminaci nastat právě jedna z možností:
- počet nenulových řádků se nezměnil $\Longrightarrow$ $\vec{u} \in [M]$,
- počet nenulových řádků se zvýšil o 1 $\Longrightarrow$ $\vec{u} \notin [M]$.

Jiný (jednodušší) pohled na rychlejší řešení příkladu a):
Provádět Gaussovu eliminaci vlastně znamená provádět lineární kombinace vektorů v řádcích matice. Pokud se nám tedy podaří vyeliminovat vektor $\vec{u}$, znamená to, že je vektor $\vec{u}$ lineární kombinací ostatních vektorů v řádcích matice, tj. vektorů množiny M.

Úkol: vyřešte příklady b) a c) oběma způsoby.

6 Cvičení 7. 11. 2017

6.1 Hrátky s lineárním obalem

1. Opakování: vše z kapitolky 5.4.
2. Z kapitolky Lineární obal, báze pokuste se vyřešit úlohy 1 a 2 (tj. vše).
3. Z kapitolky Lineární obal, dimenze pokuste se vyřešit úlohy 1 až 6 (tj. vše).
4. Z kapitolky Báze, souřadnice vektoru vzhledem k bázi pokuste se vyřešit úlohu 1.

6.2 Jak na lineární obal

Hodnost matice

je rovna počtu nenulových řádků, které zbudou po Gaussově eliminaci, jíž matici upravíme na odstupňovaný tvar.

Uvědomme si, že při Gaussově eliminaci vlastně provádíme lineární kombinace vektorů tvořících řádky dané matice.

Jak najít dimenzi lineárního obalu množiny M

Dimenze lineárního obalu $\dim[M]$ je rovna:
- počtu lineárně nezávislých vektorů, které množina M obsahuje,
- hodnosti matice A, jejíž řádky tvoří všechny vektory z množiny M,
- prakticky: počtu nenulových řádků matice A, které „zbudou“ po Gaussově eliminaci.

Formálně zapsáno:

$$\boxed{\dim[M] = \mathrm{h}(A)\,.}$$

Jak zjistit, zda vektor $\vec{u}$ náleží lineárnímu obalu $[M]$

1. Určíme dimenzi lineárního obalu množiny M.
2. Určíme dimenzi lineárního obalu množiny $M \cup \{\vec{u}\}$.
3. Rozhodneme:
   a) Pokud se tyto dimenze rovnají, pak $\vec{u} \in [M]$.
   b) Pokud se tyto dimenze nerovnají, pak $\vec{u} \notin [M]$.

Formálně zapsáno:

$$\boxed{\vec{u} \in [M] \quad \Longleftrightarrow \quad \dim[M] = \dim[M \cup \{\vec{u}\}]\,.}$$

Jak zjistit, zda dvě množiny vektorů generují tentýž vektorový podprostor

Tj. jak zjistit, že

$$[M] = [N]\,.$$

1. Pokud mají být oba podprostory totožné, musí mít rozhodně stejnou dimenzi:

   $$\dim[M] = \dim[N]\,.$$

   Stačí tedy pomocí matic určit $\dim[M]$ a $\dim[N]$. Pokud se rovnají, lze prošetřit, zda jsou oba podprostory totožné.

2. Pokud je navíc $\dim[M \cup N] = \dim[N]$ (nebo $= \dim[M]$), jsou si oba podprostory rovny, tj. $[M] = [N]$.

   Formálně zapsáno:

   $$\boxed{[M] = [N] \quad \Longleftrightarrow \quad \dim[M] = \dim[N] = \dim[M \cup N]\,.}$$

7 Cvičení 14. 11. 2017

Na cvičení probíráno:

- hledání dimenze lineárního obalu,
- zjišťování, zda $\vec{u} \in [M]$,
- zjišťování, zda $[M] = [N]$,
- báze, dimenze, souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi.

7.1 Báze, dimenze, souřadnice

1. Z kapitolky Báze, souřadnice vektoru vzhledem k bázi se pokuste vyřešit úlohy 2 až 5, 8, 9, 12, 13, 14.

2. Rozhodněte, zda je množina $M \subset \mathbb{C}^3$ lineárně závislá či nezávislá.
   a) $M = \{(2-\mathrm{i}, 2+3\mathrm{i}, \mathrm{i}), \quad (3-\mathrm{i}, 4+2\mathrm{i}, 1+2\mathrm{i}), \quad (-2-5\mathrm{i}, -2-7\mathrm{i}, 3-4\mathrm{i})\}$
   b) $M = \{(3-\mathrm{i}, 2+\mathrm{i}, 3\mathrm{i}), \quad (1-\mathrm{i}, 7+2\mathrm{i}, 1+2\mathrm{i}), \quad (3-3\mathrm{i}, -9+16\mathrm{i}, -1+4\mathrm{i})\}$

3. Rozhodněte, zda $[M] = [N]$, kde M i N jsou podmnožiny $\mathbb{Z}_5^3$.
   $M = \{(4,1,2), (2,3,4), (3,2,2)\} \quad N = \{(3,2,3), (1,4,1), (1,4,2)\}$.

7.2 Obsah testu A

- grupy, operace a jejich vlastnosti,
- maticové řešení soustav (a Frobeniova věta o existenci řešení soustavy),
- matice (komutující matice, maticové rovnice, typy matic),
- příklady vektorových prostorů a podprostorů, rozhodování, zda je něco podprostorem,
- lineární obal, báze, dimenze, souřadnice vektoru,
- spojení a průnik podprostorů.

Příklady v testu budou analogické příkladům zadávaným na cvičení.
Test A proběhne 5. prosince 2017.

8 Cvičení 21. 11. 2017

8.1 Báze, dimenze, souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi

Na cvičení řešeny úlohy:

- zda daná množina tvoří bázi daného prostoru,
- určit dimenzi lineárního obalu,
- přetvořit množiny vektorů na bázi (přidáním či odebráním vektorů),
- jaká je báze $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$,
- na LZ polynomů,
- vektor vyjádřit jako LK vektorů dané báze,
- určit souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi (kanonické, B).

Z kapitolky Báze, souřadnice vektoru vzhledem k bázi vyřešte úlohy 6, 10, 11, 14.

8.2 Příprava na test A

1. Rozhodněte, zda je $\diamond$ binární operací na množině M. V kladném případě určete její vlastnosti (včetně zákonů krácení) a rozhodněte, jakou algebraickou strukturu tvoří $(M, \diamond)$.
   a) $M = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $a \diamond b = \frac{1}{a^2} + 2ab + \frac{1}{b^2}$
   b) $M = \mathbb{Z}$, $a \diamond b = a + b + 3$

2. Tvoří struktura $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ těleso?

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} : \quad a \oplus b = a + b + 3\,, \qquad a \odot b = a - 2ab + b\,.$$

3. Jsou dány matice A, B, C nad tělesem $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Určete matici X nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ tak, aby platilo:

$$A \cdot X + 3B^2 = X^T \cdot C\,.$$

4. Najděte všechny matice, které s maticí A nad tělesem $\mathbb{R}$ komutují.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Rozhodněte o lineární závislosti a nezávislosti následujících vektorů vektorového prostoru nad $\mathbb{C}$: $(1+2\mathrm{i}, 1-2\mathrm{i}, 2\mathrm{i})$, $\quad (1-\mathrm{i}, 3+2\mathrm{i}, 1+3\mathrm{i})$, $\quad (5+6\mathrm{i}, -7-\mathrm{i}, -5+3\mathrm{i})$.

6. Rozhodněte, zda množina M generuje vektorový prostor $[N]$:

$$M = \{(2,4,1), (2,1,2), (1,1,0)\} \subset \mathbb{Z}_5^3 \qquad N = \{(1,3,1), (3,2,2), (0,1,3)\} \subset \mathbb{Z}_5^3$$

7. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, vektory u, v, w jsou lineárně nezávislé. Rozhodněte, zda jsou následující vektory lineárně závislé či nezávislé: $u, u - v, v + w$.

8. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{Z}_5$ určete dimenzi prostoru $[M] \subset \mathbb{Z}_5^3$:

$$M = \{(1,2,4), (2,a,3), (0,1,2)\}\,.$$

9. Z následujících vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ vyberte nějakou bázi B prostoru $W = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4]$ a určete jeho dimenzi $\dim W$. Zbývající vektory vyjádřete jako lineární kombinaci prvků báze B a napište jejich souřadnice vzhledem k bázi B.

$$\vec{u}_1 = (1,0,2,-3), \quad \vec{u}_2 = (3,2,1,-5), \quad \vec{u}_3 = (-1,2,1,-2), \quad \vec{u}_4 = (-3,0,2,0)$$

9 Cvičení 28. 11. 2017

9.1 Spojení, direktní součet

Na cvičení jsme dělali:

- opakování k testíku A,
- hledání spojení podprostorů a jeho dimenze,
- hledání průniku podprostorů a jeho dimenze,
- Grassmannovu formuli (věta o dimenzi spojení a průniku).

9.2 Úkol na příště

- Připravit se na test A – vše si řádně zopakovat.
- Z kapitolky Součet vektorových prostorů vyřešte úlohy 1, 2, 3, 4.
- Z kapitolky Součet a průnik vektorových prostorů II vyřešte všechny úlohy, tj. 1 a 2.

9.3 Průvodce po spojení a průniku

Jak najít spojení podprostorů

Jsou-li dány podprostory $V_1 = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r]$ a $V_2 = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s]$, je jejich spojením $V_1 + V_2$ podprostor

$$\boxed{V_1 + V_2 = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots \vec{u}_r,\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_s]}$$

Dimenzi spojení určíme snadno pomocí Gaussovy eliminace (jako u hledání dimenze lineárního obalu).

Jak najít dimenzi průniku podprostorů

Pomocí Gaussovy eliminace určíme dimenzi V_1, V_2 a $V_1 + V_2$. Dimenzi průniku pak snadno dopočítáme z Grassmannovy formule:

$$\boxed{\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) \dim(V_1 \cap V_2)\,.}$$

Jak najít průnik podprostorů

Jsou-li dány podprostory $V_1 = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r]$ a $V_2 = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s]$, pak vektor $\vec{w}$ leží v jejich průniku, leží-li v jednom i druhém podprostoru:

$$\vec{w} \in V_1 \cap V_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{w} \in V_1 \text{ a } \vec{w} \in V_2\,.$$

Každý vektor $\vec{w} \in V_1$ lze vyjádřit pomocí generátorů prostoru V_1, podobně i pro vektor z V_2:

$$\vec{w} \in V_1 \quad \Longrightarrow \quad \vec{w} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_r\vec{u}_r$$

$$\vec{w} \in V_2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{w} = d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + \cdots + d_s\vec{v}_s$$

Vyřešíme tedy homogenní soustavu lineárních rovnic

$$c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_r\vec{u}_r = d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + \cdots + d_s\vec{v}_s\,.$$

Průnik pak určíme pomocí získaných koeficientů (lze si vybrat buď $c_1, \ldots, c_r$ nebo $d_1, \ldots, d_s$), které závisí na parametrech (není-li průnik triviální), tj. např.:

$$V_1 \cap V_2 = \{c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_r\vec{u}_r;\ \text{ pro všechna } c_i \text{, jež jsou řešením soustavy}\}.$$

10 Cvičení 5. 12. 2017

Dnes jsme psali test LA I A, na stránkách jsou výsledky.

10.1 Dopolední skupina (9:00–10:30)

Máme probráno: jak poznat homomorfismus, ověření, že zadané zobrazení je homomorfismus, hledání jádra a obrazu homomorfismu.

Domácí cvičení: z kapitolky Homomorfismy vyřešte úlohu 1.

10.2 Odpolední skupina (15:40–17:10)

Probírali jsme: jak poznat homomorfismus, ověření, že zadané zobrazení je homomorfismus.

Domácí cvičení: z kapitolky Homomorfismy vyřešte úlohu 1 (pouze poznat, zda se jedná o homomorfismus).

10.3 Domácí cvičení (pro obě skupiny)

- Zopakujte si pojem jádro homomorfismu, defekt (dimenze jádra), obraz, hodnost homomorfismu (dimenze obrazu).

  Mějme homomorfismus $f : V \to W$.

- Každé zobrazení (tedy i každý homomorfismus) je určeno hodnotami na definičním oboru. Homomorfismus f je tedy jednoznačně určen, určíme-li obrazy všech vektorů z prostoru V. Není to však nutné. Abychom homomorfismus jednoznačně určili, stačí předepsat obrazy všech prvků báze prostoru V. Proč?
- Proč je jádro homomorfismu $\operatorname{Ker} f$ vektorovým podprostorem prostoru V (a ne pouze podmnožinou)?
- Proč je obraz homomorfismu $\operatorname{Im} f$ vektorovým podprostorem prostoru W (a ne pouze podmnožinou)? Čím je tento podprostor generován?

10.4 Hledání jádra a obrazu homomorfismu

Hledání jádra $\operatorname{Ker} f$ homomorfismu $f : V \to W$

$\operatorname{Ker} f$ je množinou všech vektorů $\vec{x} \in V$, které se zobrazí na nulový vektor: $f(\vec{x}) = \vec{o}$. Je-li tedy homomorfismus zadán svým analytickým vyjádřením, např.

$$f(x, y, z) = (2x - y + 3z, 2z)\,,$$

tvoří jeho jádro všechny vektory $\vec{x} = (x, y, z)$, které se zobrazí na nulový vektor, tj.:

$$(2x - y + 3z, 2z) = (0, 0)\,.$$

Jádro tedy nalezneme vyřešením homogenní soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Hledání obrazu $\operatorname{Im} f$ homomorfismu $f : V \to W$

Jádro je generováno obrazy vektorů báze $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ prostoru V, tj.

$$\boxed{\operatorname{Im} f = [f(\vec{b}_1), \ldots, f(\vec{b}_n)]\,.}$$

Pokud je například $V = \mathbb{R}^3$, je jádro generováno např. obrazy vektorů kanonické báze, takže

$$\operatorname{Im} f = [f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)]\,.$$

Konkrétně: obraz homomorfismu $f(x, y, z) = (2x-y+3z, 2z)$ je roven $\operatorname{Im} f = [(2, 0), (-1, 0), (3, 2)]$.

Na co dávat pozor

- V $\mathbb{Z}_5$ lze dělit, inverzní prvky ke všem nenulovým prvkům totiž existují, např.:

$$3\,a = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 4\,, \text{ neboť } 3 \cdot 4 = 2\,.$$

  Stejně se chová každé $\mathbb{Z}_p$, kde p je prvočíslo.
  Argument, že rovnice $3\,a = 2$ nemá řešení, neboť $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ neobsahuje prvek $\frac{2}{3}$, je tedy chybný, neboť $\frac{1}{3}$ v $\mathbb{Z}_5$ označuje inverzní prvek k prvku 3, což je 2, protože $3 \cdot 2 = 1$.

- Je-li zadána operace $\circ$, nevyšetřovat $a + b$, ale $a \circ b$.

- Při vyšetřování vlastností operací nezapomínat na kvantifikátory.

- Při rozhodování, zda množina M generuje podprostor $[N]$ nestačí rovnost dimenzí. (Např. existuje nekonečně mnoho různých vektorových rovin v $\mathbb{R}^3$.)

- Při prošetřování spojení $U + W$ podprostorů U, W se nikde neobjevuje *součet matic* – ten se součtem (spojením) podprostorů nemá nic společného.

- Je-li U podprostor, píšeme $\dim U$. Je-li M pouze množina vektorů, není obecně podprostorem, a není-li podprostorem, pak nemá dimenzi. Tato množina může pouze generovat podprostor, musíme tedy psát $\dim[M]$.

- Sjednocení podprostorů obecně není podprostorem, *nelze* tedy psát $\dim(U \cup W)$.

- Lze však psát $\dim(U + W)$; pojem spojení podprostorů vznikl právě proto, že pouhé sjednocení není podprostorem.

- Otázka: lze psát $\dim[U \cup W]$? A platí rovnost $U + W = [U \cup W]$?

- Průnik je vždy vektorovým podprostorem, lze tedy vždy psát $\dim(U \cap W)$.

- Je-li $\dim(U \cap W) = 0$, není průnik prázdnou množinou, ale $U \cap W = \{\vec{o}\}$.

11 Cvičení 12. 12. 2017

Dnes jsme hledali jádro, obraz, hodnost a defekt homomorfismu. Připomněli jsme si větu o hodnosti a defektu homomorfismu $f : V_n \to W_m$:

$$d(f) + r(f) = n\,.$$

Hledali jsme také předpis homomorfismu, je-li zadán obrazy bázových vektorů.

Domácí cvičení

1. Z kapitolky Homomorfismy vyřešte úlohy 2–7.

2. Z kapitolky Maticová reprezentace homomorfismů se pokuste vyřešit úlohu 1.

Opravný termín pro test A: úterý 19. 12. 2017 7:20 až 8:50 v učebně K3 (2. patro).

Matice homomorfismu (vzhledem ke kanonickým bázím)

Analytické vyjádření homomorfismu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je

$$f(x, y, z) = (2x + 3y - z, 5x - 2y + 3z, 7x + 8y - 9z)\,.$$

Matice tohoto homomorfismu je

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}\,.$$

Ověřte, že platí: $\quad f(x, y, z) = A_f \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ukažte obecně, že lze psát

$$\boxed{f(\vec{u}) = A_f \cdot \vec{u}\,.}$$

11.1 Hledání předpisu homomorfismu

Najděte předpis homomorfismu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jestliže

$$f(2, -3) = (1, 5), \qquad f(1, 2) = (4, -1)\,.$$

Řešení. Hledáme předpis homomorfismu, který má tvar $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Jeho matice je tedy $A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Víme přitom, že

$$f(2, -3) = A_f \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad f(1, 2) = A_f \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Pro neznámé koeficienty a, b, c, d tedy dostáváme vztahy

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}\,,$$

neboli po úpravě

$$\begin{pmatrix} 2a - 3b \\ 2c - 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a + 2b \\ c + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Z rovnosti prvních složek a následně druhých složek dostáváme

$$\begin{aligned} 2a - 3b &= 1 \qquad & 2c - 3d &= 5 \\ a + 2b &= 4 \qquad & c + 2d &= -1\,. \end{aligned}$$

Jelikož se jedná o soustavy, které mají stejné matice, liší se jen pravými stranami, můžeme je řešit současně:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -7 & -7 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = \left(E \,\middle|\, A_f^T\right).$$

První soustava s neznámými a, b má tedy řešení $a = 2$, $b = 1$ (v 1. sloupci za svislou čarou).
Druhá soustava s neznámými c, d má tedy řešení $c = 1$, $d = -1$ (v 2. sloupci za svislou čarou).
Homomorfismus má tedy předpis $f(x, y) = (ax + by, cx + dy) = (2x + y, x - y)$. Jeho maticí je

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\,,$$

což je ***transpozice*** matice, která vznikla při paralelním řešení soustav.

12 Cvičení 19. 12. 2017

Zabývali jsme se maticí přechodu a maticí homomorfismu.

- Klíčový materiál k matici přechodu: MaticePrechodu.pdf
- Poznámky k matici homomorfismu: MaticeHomomorfismu.pdf
- Upravená a doplněná verze shrnutí rozdávaného na cvičení: MatRepreHomTeorie.pdf

Domácí cvičení

1. Z kapitolky Maticová reprezentace homomorfismů vyřešte všechny úlohy, tj. 1 až 9.
2. Z kapitolky Homomorfismy vyřešte úlohu 4 (případně i 5, 6, a 7) pomocí znalosti matice homomorfismu, tj. postupem naznačeným níže.

12.1 Hledání předpisu homomorfismu pomocí matice homomorfismu

Úloha: Najděte předpis homomorfismu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jestliže

$$f(2,-3) = (1,5), \qquad f(1,2) = (4,-1)\,.$$

Řešení. Stačí si uvědomit, co je to matice homomorfismu f vzhledem k bázím B a C: je to matice, v jejíchž sloupcích jsou souřadnice obrazů vektorů báze B vzhledem k bázi C. Pokud bychom za bázi B zvolili $B = \{(2,-3), (1,2)\}$, tak bychom mohli ihned napsat matici $A_{f;B,K}$ homomorfismu f vzhledem k bázi B a bázi kanonické, v jejích sloupcích by byly obrazy vektorů báze B, tj.

$$A_{f;B,K} = \begin{pmatrix} f(2,-3) & f(1,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Hledáme analytické vyjádření homomorfismu f, tj. hledáme jeho matici vzhledem ke kanonickým bázím: $A_{f;K,K} = ???$. Tu najdeme snadno pomocí matice přechodu:

$$A_{f;K,K} = A_{f;B,K} \cdot P_{K,B} = A_{f;B,K} \cdot B^{-1}\,.$$

Inverzní matici k matici $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ najdeme snadno pomocí Gaussovy eliminace:

$$\begin{pmatrix} B \,|\, E \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} E \,|\, B^{-1} \end{pmatrix},$$

tj. konkrétně

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right).$$

Inverzní matice je tedy $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$. Matici homomorfismu nyní získáme prostým násobením matic:

$$A_{f;K,K} = A_{f;B,K} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analytické vyjádření hledaného homomorfismu f je tedy

$$f(x,y) = (2x + y,\, x - y)\,.$$

12.2 Úplný vzor vektoru

Úloha: Homomorfismus $f: \mathbb{Z}_3^4 \to \mathbb{Z}_3^3$ je dán předpisem

$$f(x,y,z,w) = (2x+y+z,\ x+2z+w,\ y+z+2w)\,.$$

Určete obraz vektoru $(1,0,2,1)$ a úplný vzor vektoru $(2,1,1)$.

Obraz vektoru $(1,0,2,1)$ vypočteme velmi snadno: dosadíme do analytického vyjádření ($x=1$, $y=0$, $z=2$, $w=1$). Dostaneme tak $f(1,0,2,1)=(1,0,1)$.

Úplný vzor vektoru $(2,1,1)$ je množina všech vektorů $\vec{u}$, které se zobrazí na vektor $(2,1,1)$. Tuto množinu značíme $f^{-1}(2,1,1)$.

Hledáme tedy všechny vektory $\vec{u}$ vyhovující rovnici $f(\vec{u})=(2,1,1)$, kterou můžeme přepsat maticově (pomocí matice A_f homomorfismu f):

$$A_f \cdot \vec{u}^T = (2,1,1)^T\,,$$

neboli

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

což je soustava lineárních rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right),$$

jejíž maticí je matice A_f homomorfismu f a vektorem pravých stran je vektor $\vec{u}$. Řešením této soustavy jsou všechny vektory tvaru $(2+w, 2w, 1+2w, w)$, kde $w \in \mathbb{Z}_3$, množinou všech řešení je tedy lineární množina $(2,0,1,0)+[(1,2,2,1)]$. Úplný vzor vektoru $(2,1,1)$ je tedy:

$$f^{-1}(2,1,1) = (2,0,1,0) + [(1,2,2,1)]\,.$$

Heslovité shrnutí:

- najít *obraz* vektoru — dosadit do analytického vyjádření,
- najít *úplný vzor* vektoru $\vec{b}$ — vyřešit soustavu $\left(A_f \,|\, \vec{b}\right)$.

Souvislosti:

- Najděte jádro homomorfismu f z předchozí úlohy.
- Rozmyslete si, že $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\vec{o})$.
- Rozmyslete si, že $\operatorname{Ker} f = [(1,2,2,1)]$, neboť se při jeho hledání řeší soustava se stejnou maticí jako při hledání úplného vzoru jakéhokoli jiného vektoru, jen pravou stranou je nulový vektor.
- Rozmyslete si, že jsme řešení předchozí úlohy mohli zapsat:

$$f^{-1}(2,1,1) = (2,0,1,0) + \operatorname{Ker} f\,,$$

kde $\operatorname{Ker} f = [(1,2,2,1)]$.
- Rozmyslete si, že pro soustavy lineárních rovnic obecně platí:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{všechna řešení nehomog. soustavy} & = & \text{nějaké jedno řešení nehomog. soustavy} \\ & & +\ \text{všechna řešení homog. soustavy} \end{array}}\,.$$

13 Cvičení 9. 1. 2018

Budeme psát test LA I B.

13.1 Obsah testu B

- Průnik vektorových podprostorů a jeho dimenze, věta o dimenzi součtu a průniku podprostorů,
- rozpoznání, zda je dané zobrazení homomorfismus,
- hledání jádra a obrazu homomorfismu, určení typu homomorfismu,
- hledání úplného vzoru zadaného vektoru,
- skládání homomorfismů (maticově i přímým dosazováním),
- hledání matice přechodu, transformace souřadnic vektorů,
- hledání analytického vyjádření homomorfismu, jsou-li zadány obrazy bázových vektorů,
- hledání matice homomorfismu vzhledem k různým bázím.

Příklady v testu budou analogické příkladům zadávaným na cvičení.
Test B proběhne 9. ledna 2018 přímo na cvičení.

Pro zájemce o opravu testu LA I A je v SISu vypsán termín na čtvrtek 11. ledna 2018 od 17:20.

13.2 Ukázkový test B

1. Určete průnik $U \cap W$ vektorových podprostorů prostoru $\mathbb{Z}_7^3$ a dimenzi tohoto průniku. Dále rozhodněte, zda je součet podprostorů $U + W$ direktní.

   $U = [(1,5,4),(3,1,1)] \subset\subset \mathbb{Z}_7^3 \qquad W = [(6,1,4),(1,1,3)] \subset\subset \mathbb{Z}_7^3$

2. Rozhodněte, zda je zobrazení f homomorfismus.

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4; f(x,y,z) = (x - 3y - z, 0, x + z, 2y)$

   b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; f(x,y,z) = (x - 2y + z, x - 1, 2x - 2y - z)$

   V případě, že je f homomorfismus, určete jeho typ, hodnost a defekt.

3. Určete jádro, obraz, hodnost, defekt a typ homomorfismu f, který vznikne složením homomorfismů f_1, f_2.

   $f_1 : \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^3; f_1(x,y,z,w) = (x + 2y + 2w, 3x + z + 3w, 2x + 3y + 2z)$

   $f_2 : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^4; f_2(x,y,z) = (2x + 3y, x + 2y + z, 3y + 2z, 2x + y + 3z)$

   Dále určete obraz vektoru $(1,2,1,3)$ a úplný vzor vektoru $(1,1,1,0)$.

4. Najděte matici přechodu od báze B k bázi C prostoru $\mathbb{Z}_5^3$, jestliže

   $B = \{(2,3,4),(4,0,3),(2,3,1)\}, \qquad C = \{(2,3,0),(1,2,3),(4,4,1)\}.$

   Dále najděte matici přechodu od báze C k bázi kanonické a matici přechodu od báze kanonické k bázi C. Najděte souřadnice vektoru $\langle\vec{u}\rangle_C$, jsou-li zadány jeho souřadnice vzhledem k bázi kanonické: $\langle\vec{u}\rangle_K = (1,3,2)$.

5. Napište matici homomorfismu $f : \mathbb{Z}_7^3 \to \mathbb{Z}_7^2$ vzhledem k bázím B a C, jestliže

   $f(x,y,z) = (x+2y+3z, 6x+3y), \quad B = \{(3,2,4),(4,2,4),(6,5,6)\}, \quad C = \{(6,3),(2,5)\}.$
   Nakreslete příslušné schéma.

Výsledky ukázkového testu B

1. $U \cap W = [(4,6,5)]$, $\dim(U \cap W) = 1$, není

2. a) $r(f) = 3$, $d(f) = 0$, monomorfismus b) ne

3. $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\operatorname{Ker} f = [(3,2,4,4)]$,

$\operatorname{Im} f = [(1,4,3,1),(0,1,1,1),(0,0,1,2)]$ (očekávám bázi),
nehotová pracovní verze: $\operatorname{Im} f = [(1,4,3,1),(4,0,1,3),(3,4,2,2),(3,3,4,2)]$

$r(f) = 3$, $d(f) = 1$, endomorfismus

$f(1,2,1,3) = (1,2,4,0)$, $f^{-1}(1,1,1,0) = (2,1,3,2) + [(3,2,4,4)]$

4. $P_{BC} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $P_{CK} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $P_{KC} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

Pozor: v testu se může objevit i příklad typu:
Najděte matici (analytické vyjádření) homomorfismu, jsou-li zadány obrazy vektorů.
(Je to sice obsaženo v hledání matice homomorfismu vzhledem k různým bázím, ale raději jsem to explicitně doplnil do kapitolky *Obsah testu B.*)

Na co dávat pozor

- Matice báze obsahuje vektory báze ve svých **sloupcích**. Je-li dána báze $B = \{(1,2),(3,4)\}$, je maticí této báze (tj. vlastně maticí přechodu od báze B k bázi kanonické)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

  Tuto konvenci je nutno dodržovat, jinak vše vychází špatně.[1]

- Není nutné psát $P_{CK} = K^{-1}C$ a vypisovat jednotkovou matici (matici kanonické báze), kterou se pak naoko násobí matice C; úsporné a správné je: $P_{CK} = C$. Rozhodně není třeba naoko počítat matici inverzní k jednotkové matici – je to ztráta času.

- Podobně není třeba psát jednotkovou matici, máme-li napsat matici přechodu P_{KC} (tj. zbytečně zdlouhavě vypisovat $C^{-1}K$). Stručné a správné je: $P_{KC} = C^{-1}$.

- Ve schématu je nutno vyznačovat báze pod jednotlivými prostory:

$$\underset{M}{V} \xleftarrow{\text{id}} \underset{C}{V} \xleftarrow{f} \underset{B}{U} \xleftarrow{\text{id}} \underset{L}{U}$$
$$P_{C,M} \quad A_{f;B,C} \quad P_{L,B}$$

- Úplný vzor – je třeba vyřešit soustavu a řešení pěkně zapsat. Je-li jádro netriviální, pak je řešením lineární množina, tj. úplný vzor má tvar $(1,2,3) + [(4,3,2),(1,3,4)]$.

- Nalézt průnik dvou podprostorů – nestačí nalézt pouze dimenzi tohoto průniku dle Grassmannovy formule, je třeba řešit soustavu. Pozor, po vyřešení soustavy nelze přímo použít čísla, která nám vyšla, jako vektor generující průnik – řešením soustavy jsou koeficienty lineární kombinace vektorů, které generují průnik.

[1] Pokud bychom vše psali do řádků, byly by všechny vztahy transponované; i vektory násobené maticí přechodu by byly řádkové, násobeny by však byly maticí přechodu zprava, nikoli zleva – vše by bylo třeba „obrátit“: $(- - -) \cdot \begin{pmatrix} - - - \\ - - - \\ - - - \end{pmatrix} = (- - -)$.