# Klasifikace kuželoseček

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Matice kuželosečky: $K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Diskriminant kuželosečky: $\Delta = \det K$

Diskriminant kvadratických členů: $\delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$

$$\operatorname{cotg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

## Regulární kuželosečky $\qquad h(K) = 3, \quad$ tj. $\Delta \neq 0$

$h(A) = 2$: středové ($\delta \neq 0$): $\qquad \delta > 0$ elipsa $\qquad \delta < 0$ hyperbola

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ imaginární elipsa (prázdná množina) $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\delta > 0$

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipsa $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\delta > 0$

3. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ hyperbola $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\delta < 0$

$h(A) = 1$: nestředové ($\delta = 0$)

4. $y^2 - 2px = 0$ parabola $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm p \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm p & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nebo $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm p \\ 0 & \pm p & 0 \end{pmatrix}$ $\delta = 0,\ \Delta < 0$

## Singulární kuželosečky $\qquad h(K) < 3, \quad$ tj. $\Delta = 0$

$\delta \neq 0$: různoběžky ($h(K) = 2$)

1. $x^2 - k^2y^2 = 0$ dvě různoběžky $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\delta < 0$

2. $x^2 + k^2y^2 = 0$ bod $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\delta > 0$ (dvě imag. přímky s reálným průsečíkem)

$\delta = 0$: rovnoběžky

- různé ($h(K) = 2$)

3. $x^2 - r^2 = 0$ dvě různé rovnoběžky $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix}$

4. $x^2 + r^2 = 0$ prázdná množina $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + \end{pmatrix}$ (dvě imaginární rovnoběžky)

- splývající ($h(K) = 1$)

5. $x^2 = 0$ přímka $\begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (dvě splývající rovnoběžky)

## Elipsa, hyperbola

$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$

$\det K = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = c\lambda_1\lambda_2 \qquad \text{a} \qquad \det A = \lambda_1\lambda_2$, tj.

$$c = \frac{\det K}{\det A}$$

Odtud plyne $a, b$.

Souřadnice středu jsou řešením soustavy $\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & -a_{23} \end{array}\right)$.

## Parabola

$\lambda_1 x^2 + 2p'y = 0$

$\det K = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p' \\ 0 & p' & 0 \end{vmatrix} = -\lambda_1 p'^2 \qquad \text{tj.} \qquad p'^2 = \frac{-\det K}{\lambda_1} \qquad p = \frac{p'}{\lambda_1}$

$\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0 \qquad \vec{v}_1 = (\alpha, \beta)$ a $\vec{v}_2$ jsou příslušné vlastní vektory

rovnice osy paraboly: $(\alpha, \beta, 0) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$V$ je průnikem osy a paraboly $\qquad F = V + \frac{1}{2} p \frac{\vec{v}_2}{||\vec{v}_2||}$