Zajímavá matematika

historie – souvislosti – aplikace

Goniometrie

Zdeněk Halas

Katedra didaktiky matematiky
Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze

Obsah

Slovo úvodem

Tento text vznikl původně spojením rozšířených přednášek přednesených v rámci několika *Seminářů z historie matematiky pro vyučující na středních školách* pořádaných Katedrou didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Jak již sám název napovídá, je věnován úplným počátkům disciplíny, kterou dnes nazýváme goniometrie. Text je rozdělen na dvě části.

První část obsahuje některé historicky významné postupy výpočtu hodnot „goniometrických funkcí". Z matematického hlediska jim v antické matematice odpovídají délky tětiv, a tak se zaměřujeme na způsob jejich výpočtu v prvním komplexním dochovaném textu – v Ptolemaiově *Almagestu*. Pro srovnání pak také zmiňujeme texty pozdější, v nichž se vyskytují podobné výpočty (Koperníkovy *Oběhy*).

V Ptolemaiových výpočtech se skrývá jedno omezení – délka tětivy příslušná jednomu stupni je pouze odhadnuta. Odhad je proveden s takovou přesností, že zcela vyhovuje pro vytvoření celé tabulky délek tětiv s přesností na dvě šedesátková místa. Nelze jej však nějakým analogickým způsobem dále zpřesňovat. Toto omezení úspěšně odstranili islámští matematici. Jejich postupy také uvádíme, neboť jsou vhodným doplněním Ptolemaiova textu.

Tuto část uzavírají moderní postupy výpočtu hodnot goniometrických funkcí. Stručně zmiňujeme rozvoje do mocninných řad a řetězové zlomky. Podrobněji se věnujeme jednoduchému algoritmu CORDIC, který je velmi pěknou aplikací součtových vzorců, poskytuje tedy v jistém smyslu jiný pohled na antický postup Ptolemaiův.

Ve druhé části si pokládáme otázku, proč vlastně goniometrie vznikla – čím se lidé zabývali, že jim při řešení těchto problémů vyvstala potřeba matematického aparátu odpovídajícího dnešní goniometrii. Ukážeme, že jedním z klíčových problémů mohla být interpretace výsledků měření délky ročních období, která byla v průběhu staletí zpřesňována. Tato data byla v zásadním rozporu s jednoduchým aristotelovským modelem, kdy se nebeská tělesa měla pohybovat rovnoměrným kruhovým pohybem, přičemž středem této kruhové dráhy by byla Země. Řešení vyžadovalo geometrický model, jehož parametry bylo možno určit pouze s pomocí rozvinutého aparátu pro výpočet délek tětiv, což byl, jak jsme již zmínili, předchůdce dnešní goniometrie.

Přeji všem čtenářům tohoto textu, aby v něm nalezli inspiraci pro svou práci i potěšení z antické matematiky.

Část I
Výpočty hodnot goniometrických funkcí

1 Tabulky funkčních hodnot ve starověku

Již na hliněných tabulkách ze starověké Mezopotámie máme doloženy různé tabulky, například druhých a třetích mocnin, násobení, převrácených hodnot, a další. Takové tabulky jsou odrazem lidské snahy po usnadnění stále se opakujících výpočtů tím, že se provedou jednou provždy a pečlivě se zaznamenají do tabulky.

Ze starověkého Egypta se nám také dochovaly různé tabulky, zajímavé jsou zejména tabulky rozkladů zlomků na součet kmenných zlomků.[1] O těchto tabulkách lze nalézt více informací např. v [Be].

Na Rhindově papyru se nám však také dochovaly úlohy na výpočet sklonu pyramidy, tzv. *seqed*. Geometricky rozumíme pyramidou pravidelný čtyřboký jehlan. Sklon pyramidy seqed je pak poměr poloviny délky jeho podstavné hrany a a výšky v, což je v podstatě kotangens velikosti úhlu φ, který svírají podstava a boční stěna, tedy

$$\text{seqed} = \mathsf{cotg}\,\varphi = \frac{\frac{a}{2}}{v}\,.$$

Díky těmto úlohám (R56–R60) se u egyptské matematiky někdy hovoří o tzv. protogoniometrii. Překlad těchto úloh s komentářem je uveden v [Vy].

2 Řecké tětivy

Goniometrické funkce[2] hrály důležitou roli zejména v astronomii, jak uvidíme ve druhé části tohoto textu. Nejranější doklady jejich užívání v rozvinuté podobě zatím sahají do starověkého Řecka. Řekové používali místo našich goniometrických funkcí délku tětivy danou středovým úhlem o velikosti α. V našem textu ji budeme značit $\mathsf{crd}\,\alpha$, tj. platí

$$\mathsf{crd}\,\alpha = 2R\,\mathsf{sin}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Je pravděpodobné, že jako první sestavil tabulky významný řecký astronom Hipparchos (asi 180–125 př. Kr.). Jeho dílo se nám však dochovalo jen ve zlomcích, a tak jsme odkázáni pouze na pozdější svědectví.

[1] Tj. zlomků s jedničkou v čitateli.
[2] Přesněji se jednalo o jejich předchůdce.

Na Hipparcha vědomě navázal zejména KLAUDIOS PTOLEMAIOS, který Hipparcha mnohokrát zmiňuje a cituje. Z Ptolemaiova díla můžeme usuzovat, že Hipparchos tabulky hodnot $\mathsf{crd}\,\alpha$ opravdu potřeboval, používal je např. při studiu pohybu Měsíce a při dalších astronomických výpočtech.

Společně s přílivem astronomických poznatků ze starověké Mezopotámie se do Řecka dostalo používání šedesátkové soustavy. V Řecku se její náznaky objevily poprvé někdy v polovině třetího století v geografickém díle ERATOSTHENA Z KYRÉNY (276–194 př. Kr.). Toto dílo se nám nedochovalo, k dispozici máme pouze několik úryvků, zejména u Strabóna.

Nejvýznamnějším hellénistickým autorem, jehož astronomické dílo se nám dochovalo, je bezpochyby Klaudios Ptolemaios.

2.1 Klaudios Ptolemaios

O Klaudiovi Ptolemaiovi toho víme poměrně málo. Žil přibližně někdy mezi lety 90–165 a působil v Alexandrii. Podrobněji se lze o něm dočíst např. v [Št]. Byl to velmi plodný autor, jak je patrné ze stručného přehledu jeho díla.

- Almagest
- Kanopská poznámka – předběžné shrnutí parametrů Ptolemaiovy soustavy; cca 9 stran
- Tetrabiblos – astrologická příručka, zajistilo mu proslulost ve středověku
- Geografie – rozsáhlé dílo, obsahuje topografický popis a 27 map; (Súdéta oré: česko-německé pomezí, Ebúron: asi oblast jižně od Brna)
- Optika
- Planetární hypotézy – o vzdálenostech planet
- Příruční tabulky – pro výpočet poloh kosmických těles; obsahuje katalog 180 hvězd
- Fáze nehybných hvězd

Dnes je nejznámější jeho monumentální astronomické kompendium *Almagest* (řecky Μαθηματικὴ σύνταξις, *Mathématiké syntaxis*), jehož vydání [He] čítá 1 154 stran. Toto dílo mělo pro astronomii podobný význam, jako pro geometrii Eukleidovy *Základy*. Celá astronomie je zde budována na základě geocentrické soustavy.

Sám Ptolemaios své dílo nazývá *Mathématiké syntaxis*. Později však bylo také nazýváno *Megalé syntaxis* (Velká skladba, Μεγάλη σύνταξις). Arabští překladatelé tento název změnili na *Megisté syntaxis* (Největší skladba, Μεγίστη σύνταξις), což možná učinili z úcty k tomuto ohromnému dílu. Přepisem do arabštiny pak vzniklo *Al-Magisti*, což dále přešlo do latiny jako *Almagest*.

Pro zajímavost uvádíme zkrácenou verzi obsahu první ze třinácti knih *Almagestu*.

Obsah první knihy, jak je shrnut v jejím úvodu:

1. Předmluva.
2. O řazení vět.
3. Že se nebe pohybuje po sféře.
4. Že i Země jako celek je kulatá.
5. Že Země je středem nebe.
6. Že Země je vůči vesmíru jako bod.
7. Že se Země nepohybuje.
8. Že na nebi jsou dva druhy primárních pohybů.
9. O postupné výstavbě.
10. O délce tětiv v kružnici.
11. Tabulka tětiv v kružnici.
12. O oblouku mezi slunovraty.
13. Úvod pro sférické důkazy.
14. O obloucích mezi rovníkem a ekliptikou.
   ...

Vidíme, že Ptolemaios v úvodní kapitole vypracoval tabulky délek tětiv – jsou to nejstarší dochované tabulky tohoto typu. S největší pravděpodobností však nebudou první. Je téměř jisté, že Hipparchos (2. stol. př. Kr.) a Menelaos (1. stol. po Kr.) také používali podobné tabulky. Nejspíše tedy navazoval na práci dřívějších astronomů.

Idea tětivy pochází nejspíše od Hipparcha. Délky tětiv byly později nahrazeny polovičními délkami, což odpovídalo našemu sinu. Poprvé to máme doloženo u indického matematika Áryabhaṭy (499 po Kr.), jemuž se budeme věnovat později.

Z obsahu první knihy je patrné, že Ptolemaios neuvádí pouze tabulku, ale také podrobný návod na její sestavení.

2.2 Ptolemaiova goniometrie

V první knize Almagestu je vybudována rovinná goniometrie, a to včetně pečlivých důkazů. Celý postup slouží k výpočtu tabulky délek tětiv, kterou Ptolemaios uvádí s krokem půl stupně. Tato tabulka slouží v ostatních kapitolách jako pomocný aparát pro astronomické výpočty.

Jak už bylo zmíněno, Ptolemaios pracuje s délkami tětiv na rozdíl od našich sinů. Samotnou kružnici dělí na 360 stejných úseků, její průměr na 120 úseků.[3]

Délku tětivy dané středovým úhlem o velikosti α budeme značit $\mathsf{crd}\,\alpha$. Náš sinus je vlastně polovinou délky tětivy příslušející dvojnásobnému úhlu vydělenou poloměrem, platí tedy vztah

$$\mathsf{crd}\,\alpha = 2R\,\mathsf{sin}\,\frac{\alpha}{2}\,,$$

kde R je v našem případě rovno 60.

Všechny výpočty jsou v *Almagestu* prováděny přímo v poziční šedesátkové soustavě. Ptolemaios systematicky pracuje s přesností na dvě šedesátková místa, takže může uvádět vždy pouhá tři čísla oddělená mezerou bez dalšího označení, a přesto nemůže dojít k žádnému nedorozumění. Tento původní způsob zápisu zachováváme. Například údaj 70 32 3 znamená $70+\frac{32}{60}+\frac{3}{60^2}$. V případě, že by na některé pozici měla být nula, píše Ptolemaios malý kroužek, který je patrný i na přiložené ukázce. Tento kroužek však nelze považovat za právoplatného předchůdce nuly, neboť slouží výhradně k označení „prázdné“ pozice v šedesátkovém zápisu.

Transformace Ptolemaiových údajů do současného označení tedy probíhá následujícím způsobem. Vezmeme-li si například rovnost

$$\mathsf{crd}\,72^\circ = 70\ 32\ 3\,,$$

tak pro nás znamená na levé straně:

$$\mathsf{crd}\,72^\circ = 120\cdot\mathsf{sin}\,36^\circ = 120\cdot 0,587\,785\,252\dots = 70,534\,230\,275\dots$$

a na straně pravé (přesnost je omezena na dvě šedesátková místa):

$$70\ 32\ 3 = 70+\frac{32}{60}+\frac{3}{60^2} = 70,534\,166\dots\,.$$

Jelikož má strana pravidelného šestiúhelníku (středový úhel 60°) stejnou délku jako poloměr kružnice jemu opsané ($R = 60$), dostáváme základní poznatek, z něhož Ptolemaios vychází:

$$\mathsf{crd}\,60^\circ = 60\,.$$

[3] Tyto úseky samozřejmě neodpovídají úsekům, na něž je rozdělena samotná kružnice, jejíž členění odpovídá dnešnímu dělení plného úhlu na 360°. Pro názornost se budeme proto u údajů, které se váží k členění kružnice, držet současného označení; místo pouhého čísla 60 tak budeme psát 60°. Používání členění na 360 a 120 úseků je dědictvím mezopotámské astronomie, podobně jako počítání v šedesátkové soustavě.

Při tomto označení a za těchto předpokladů odvozuje několik vět, které jsou teoretickým základem výpočtu tabulky délek tětiv příslušných středovým úhlům o velikostech od 0° do 180° s krokem $\frac{1}{2}^{\circ}$. Tato tabulka je také součástí Almagestu, ukázka z ní je na obrázku níže.

Celé budování teoretického aparátu, na němž je tvorba tabulky délek tětiv založena, je rozděleno do šesti kroků.

1. Určí se hodnota $\mathsf{crd}\,72^{\circ}$ a $\mathsf{crd}\,36^{\circ}$. Z geometrické konstrukce pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku a užitím Pýthagorovy věty se dostane

$$\mathsf{crd}\,72^{\circ} = 70\ 32\ 3 \qquad \mathsf{crd}\,36^{\circ} = 37\ 4\ 55.$$

2. Ptolemaiova věta – základ pro odvození součtového vzorce $\mathsf{crd}\,(\alpha+\beta)$.
   Pro libovolný tětivový čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$|AB|\cdot|CD| + |AD|\cdot|BC| = |AC|\cdot|BD|\,.$$

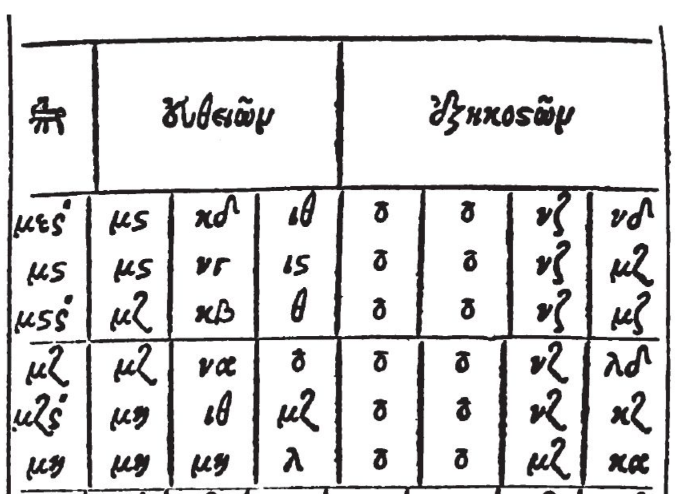
3. Vztah pro $\mathsf{crd}\,(\alpha-\beta)$ – lze tedy odvodit $\mathsf{crd}\,12^{\circ} = \mathsf{crd}\,(72^{\circ}-60^{\circ})$.

4. Vztah pro $\mathsf{crd}\,\frac{\alpha}{2}$ – odtud se odvodí $\mathsf{crd}\,6^{\circ}$, $\mathsf{crd}\,3^{\circ}$, $\mathsf{crd}\,\frac{3}{2}^{\circ}$ a $\mathsf{crd}\,\frac{3}{4}^{\circ}$.

5. Odhad pro $\mathsf{crd}\,1^{\circ}$, odtud pak $\mathsf{crd}\,\frac{1}{2}^{\circ}$:

$$\mathsf{crd}\,1^{\circ} = 1\ 2\ 50 \qquad \mathsf{crd}\,\frac{1}{2}^{\circ} = 0\ 31\ 25$$

6. Sestavení tabulky s krokem $\frac{1}{2}^{\circ}$ s pomocí odvozených vztahů.



Ukázka z Ptolemaiovy tabulky, vydání [Gr] z roku 1538.

2.3 Konstrukce tabulky délek tětiv

V této podkapitole rozvedeme jednotlivé kroky Ptolemaiovy vedoucí k sestavení tabulky délek tětiv. Celá konstrukce je poměrně přehledná. Nejprve vypočteme stranu pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku, čímž získáme hodnoty $\mathsf{crd}\,72^\circ$ a $\mathsf{crd}\,36^\circ$. Následně odvodíme Ptolemaiovu větu, která vlastně (moderně řečeno) vystupuje v roli součtového vzorce pro funkci $\mathsf{crd}\,\alpha$. Odtud pak odvodíme modifikaci tohoto „součtového vzorce“ pro $\mathsf{crd}\,(\alpha-\beta)$ a $\mathsf{crd}\,\frac{\alpha}{2}$. Tyto vztahy už pak umožňují vhodnou kombinací známých hodnot dopočítat velké množství hodnot jiných, jak je uvedeno v přehledu výše.

Jednotlivé kroky Ptolemaiova postupu budeme prezentovat v modernizované a upravené podobě, abychom usnadnili jeho transformaci do současné školské matematiky.

Než se podíváme na samotný Ptolemaiův postup, učiníme k němu několik poznámek z hlediska současné školské matematiky. Z výše uvedených shrnutí je zřejmé, že jeho jádrem jsou součtové vzorce pro funkce sinus a kosinus (u délky tětivy přitom postačuje součtový vzorec jediný). Stačí znát alespoň jednu hodnotu a všechny ostatní pak lze pomocí součtových vzorců dopočítat. Zajímavou aplikací součtových vzorců na výpočet hodnot goniometrických funkcí je algoritmus CORDIC, o kterém pojednáme níže.

Je-li možno na základě jedné hodnoty dopočítat s pomocí součtových vzorců všechny hodnoty funkcí sinus a kosinus, jsou tak vlastně jednoznačně zadány a součtové vzorce lze vzít za základ jejich definice. Teoretickým základem je k tomu následující věta.

Věta. *Existuje právě jedna dvojice funkcí $s(x)$ a $c(x)$, které splňují na celém $\mathbb{R}$ soustavu funkcionálních rovnic*

$$s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y)\,,$$

$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)$$

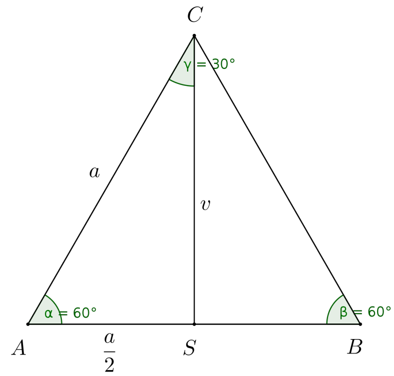
a podmínku

$$\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1\,.$$

Poslední podmínka (limita) je nutná kvůli spojitosti. Vezmeme-li totiž jednu hodnotu, tak postupným půlením příslušného argumentu a kombinací vzniklých menších argumentů pomocí sčítání a odčítání dostaneme jen některé racionální násobky argumentu původního. K rozšíření na všechna reálná čísla tedy potřebujeme limitní proces (přesněji spojitost).

Pokud jsou součtové vzorce odvozovány izolovaně, bez upozornění na jejich ohromný potenciál pro výpočet dalších hodnot, tak se ztrácí něco podstatného z jejich matematické podstaty.

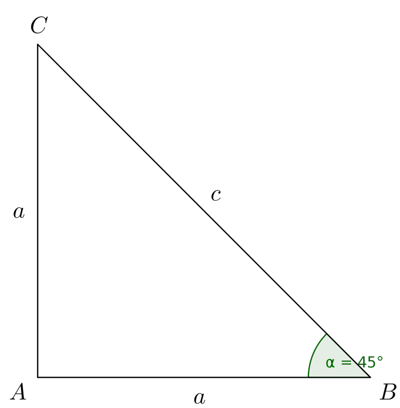
Ve školské matematice jsou většinou odvozovány následující hodnoty goniometrických funkcí. Základem je rovnostranný trojúhelník ABC.



Odtud přímo můžeme psát:

$$\cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},$$
$$\sin\gamma = \sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},$$
$$\sin\alpha = \sin 60^\circ = \frac{v}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\cos\gamma = \cos 30^\circ = \frac{v}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

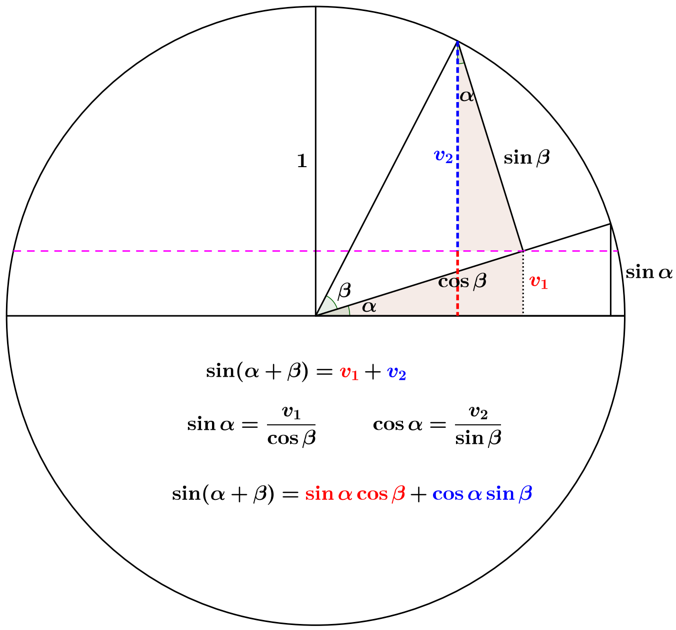
Podobně na základě pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka

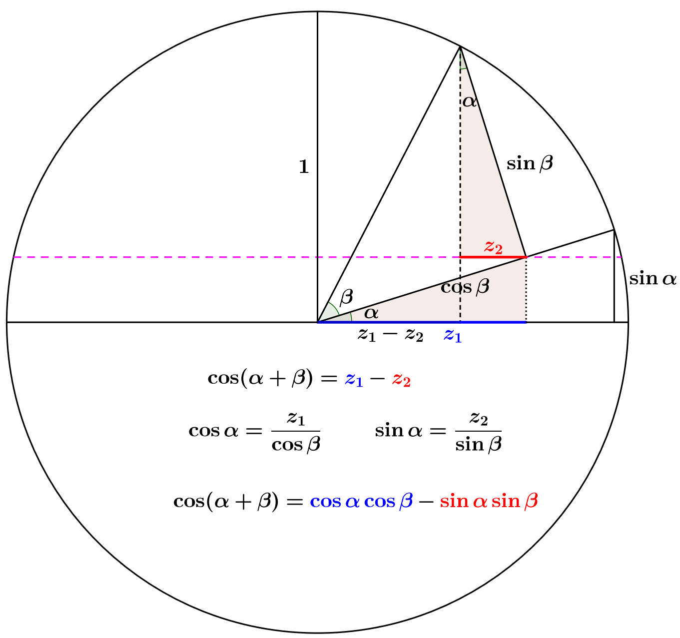


ihned dostáváme:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}\cdot a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

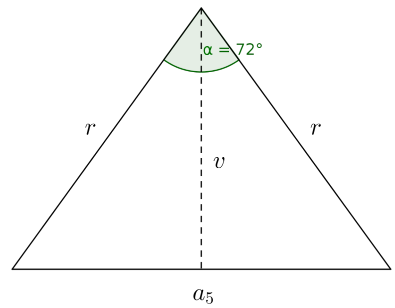
Samotné odvození součtového vzorce pro funkci sinus a kosinus je zřejmé z následujících obrázků.





2.3.1 Pravidelný pětiúhelník a desetiúhelník

Nyní vypočteme délku strany a_5 pravidelného pětiúhelníku, abychom získali hodnotu $\mathsf{crd}\,72°$. S použitím dnešní goniometrie by se jednalo o snadný úkol, stačilo by vhodným způsobem použít funkci sinus v trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří dva sousední vrcholy pravidelného pětiúhelníku a střed kružnice opsané:

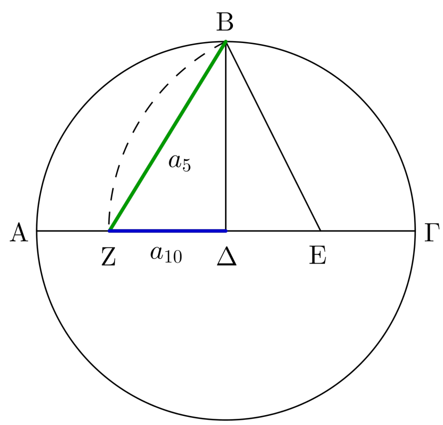


$$\sin 36^\circ = \frac{\frac{a_5}{2}}{r},$$

tj.

$$a_5 = 2r \sin 36^\circ.$$

Chceme-li však určit délku strany pravidelného pětiúhelníku pouze s pomocí elementární geometrie, budeme muset vyjít z jeho konstrukce. Ta je běžnou součástí školské matematiky, zaznamenánu ji máme nejen v *Almagestu*, ale také ve větě IV,11 Eukleidových *Základů*.



Uvažujme kružnici se středem Δ a o poloměru ΔΓ, jehož střed označme E. Bod Z zkonstruujme tak, aby ležel na průměru AΓ a zároveň EZ = EB. Potom úsečka ΔZ má délku rovnou straně pravidelného desetiúhelníku a BZ pravidelného pětiúhelníku.

Označíme-li poloměr kružnice r, dostaneme z Pýthagorovy věty aplikované na trojúhelník BΔE

$$\mathrm{EB} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = r\,\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Odtud potom plyne

$$r\,\frac{\sqrt{5}}{2} = \mathrm{EB} = \mathrm{EZ} = a_{10} + \frac{r}{2},$$

tj.

$$a_{10} = r\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Opět z Pýthagorovy věty aplikované na trojúhelník BΔZ obdržíme vztah

$$a_5^2 = a_{10}^2 + r^2 = r^2 \left[\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 + 1 \right] = r^2 \, \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1 + 4}{4} = r^2 \, \frac{5-\sqrt{5}}{2} \,,$$

tedy

$$a_5 = r \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \,.$$

Pro $r = 60$ dostaneme[4]

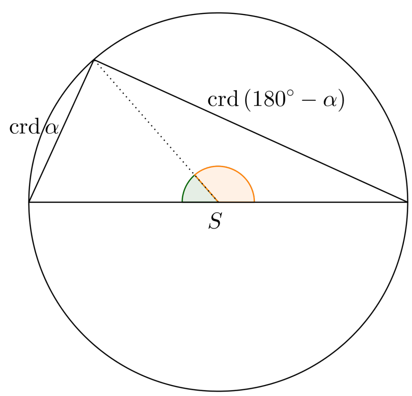
$$\mathsf{crd}\, 72^\circ = 70{,}534\,230 \cdots \approx 70\ 32\ 3 \,.$$

Z Thalétovy věty plyne, že trojúhelník nad přeponou je pravoúhlý. Platí v něm tedy Pýthagorova věta

$$\mathsf{crd}^{\,2} \alpha + \mathsf{crd}^{\,2} (180^\circ - \alpha) = 120^2 \,.$$

Ke každé hodnotě $\mathsf{crd}\,\alpha$ lze tedy dopočítat hodnotu komplementární:

$$\mathsf{crd}\,(180^\circ - \alpha) = \sqrt{120^2 - \mathsf{crd}^{\,2} \alpha} \,.$$



2.3.2 Ptolemaiova věta

Jelikož známe hodnotu $\mathsf{crd}\, 60^\circ = 60$, budeme moci vypočíst $\mathsf{crd}\,(72^\circ - 60^\circ) = \mathsf{crd}\, 12^\circ$.[5] K tomu však potřebujeme odvodit vztah, který by zastoupil roli dnešních součtových vzorců – Ptolemaiovu větu[6].

[4] Z pohledu současné goniometrie jsme vypočetli hodnotu $\sin 36^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

[5] Jazykem dnešní goniometrie se jedná o výpočet $\sin(36^\circ - 30^\circ) = \sin 6^\circ$.

[6] Sám Ptolemaios tuto větu označuje jako „velmi užitečné lemmátko“ (λημμάτιον εὔχρηστον πάνυ), neboť v jeho konstrukci plní spíše funkci pomocnou.

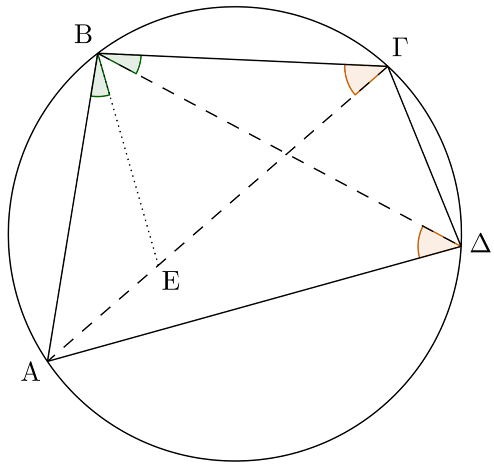
Věta (Ptolemaiova). *V každém tětivovém čtyřúhelníku* $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ *platí:*

$$\mathrm{AB} \cdot \Gamma\Delta + \mathrm{A}\Delta \cdot \mathrm{B}\Gamma = \mathrm{A}\Gamma \cdot \mathrm{B}\Delta\,,$$

neboli

$$ac + bd = ef\,,$$

kde a, b, c, d *jsou postupně délky jeho stran a* e, f *délky úhlopříček.*



Sestrojme na úhlopříčce $\mathrm{A}\Gamma$ bod E tak, aby byl úhel ABE roven úhlu $\Delta\mathrm{B}\Gamma$ (označeny zeleně). Také oranžově označené úhly jsou si rovny, neboť se jedná o obvodové úhly příslušné témuž oblouku. Trojúhelníky $\mathrm{EB}\Gamma$ a $\mathrm{AB}\Delta$ jsou tedy podobné, tj.

$$\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{E}\Gamma} = \frac{\mathrm{B}\Delta}{\mathrm{A}\Delta}\,,$$

neboli

$$\mathrm{A}\Delta \cdot \mathrm{B}\Gamma = \mathrm{E}\Gamma \cdot \mathrm{B}\Delta\,.$$

Také trojúhelníky ABE a $\Delta\mathrm{B}\Gamma$ jsou podobné (úhly BAE a $\mathrm{B}\Delta\Gamma$ příslušejí témuž oblouku $\mathrm{B}\Gamma$), získáme tedy rovnost

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EA}} = \frac{\Delta\mathrm{B}}{\Gamma\Delta}\,,$$

neboli

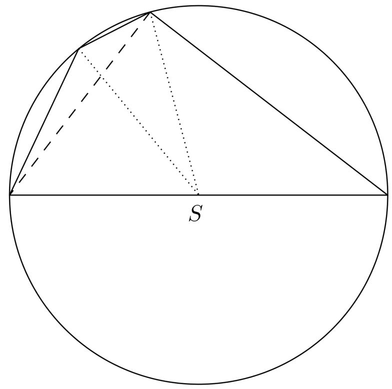
$$\mathrm{AB} \cdot \Gamma\Delta = \mathrm{EA} \cdot \Delta\mathrm{B}\,.$$

Součtem obou výsledných nerovností získáme

$$\mathrm{AB} \cdot \Gamma\Delta + \mathrm{A}\Delta \cdot \mathrm{B}\Gamma = (\mathrm{AE} + \mathrm{E}\Gamma) \cdot \mathrm{B}\Delta = \mathrm{A}\Gamma \cdot \mathrm{B}\Delta\,,$$

což je tvrzení věty. □

Aplikaci Ptolemaiovy věty ilustruje následující obrázek.



2.3.3 Tětiva odpovídající jednomu stupni

Nalezení odhadu pro $\mathsf{crd}\,1^\circ$ je z historického i matematického hlediska velmi významné. Viděli jsme, že z odvozené hodnoty $\mathsf{crd}\,12^\circ$ lze pomocí formule pro $\mathsf{crd}\,\frac{\alpha}{2}$ získat $\mathsf{crd}\,\frac{3}{2}^\circ$ a $\mathsf{crd}\,\frac{3}{4}^\circ$, ne však $\mathsf{crd}\,1^\circ$. Bylo by potřeba provést trisekci úhlu, a tak Ptolemaios hledá raději dostatečně dobrou aproximaci.

Základem hledání dolního a horního odhadu je nerovnost (platí pro $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$)

$$\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\mathsf{crd}\,\alpha}{\mathsf{crd}\,\beta} > \frac{\alpha}{\beta}\,,$$

která byla v té době známa, používali ji například Aristarchos, Eukleidés či Archimédés. Lze ji přepsat ve tvaru

$$\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\mathsf{crd}\,\alpha}{\alpha} > \frac{\mathsf{crd}\,\beta}{\beta}\,. \tag{2.1}$$

Nerovnost (2.1) je poměrně názorná; říká, že se větší oblouk od příslušné tětivy liší více, než je tomu u menšího oblouku. S použitím (2.1) dostaneme

$$\frac{\mathsf{crd}\,\frac{3}{2}^\circ}{\frac{3}{2}} < \frac{\mathsf{crd}\,1^\circ}{1} < \frac{\mathsf{crd}\,\frac{3}{4}^\circ}{\frac{3}{4}}\,.$$

Dosazením známých hodnot $\mathsf{crd}\,\frac{3}{2}^\circ = 1\ 34\ 15$ a $\mathsf{crd}\,\frac{3}{4}^\circ = 0\ 47\ 8$ dostaneme

$$1\ 34\ 15 \cdot \frac{2}{3} < \frac{\mathsf{crd}\,1^\circ}{1} < 0\ 47\ 8 \cdot \frac{4}{3}\,,$$

$$1\ 2\ 50 < \frac{\mathsf{crd}\,1^\circ}{1} < 1\ 2\ 50\frac{2}{3}\,,$$

kde je rozdíl mezi horním a dolním odhadem $\mathsf{crd}\,1^\circ$ tak malý, že při zvolené přesnosti na dvě šedesátinná místa ihned dostáváme $\mathsf{crd}\,1^\circ = 1\ 2\ 50$.[7]

[7] $1\ 2\ 50 = 1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{3600} = 1{,}047\,222\ldots$, přičemž $\mathsf{crd}\,1^\circ = 2 \cdot 60 \cdot \sin\frac{1}{2}^\circ = 1{,}047\,184\ldots$.

2.3.4 Poslední sloupec v Ptolemaiově tabulce

V Ptolemaiových tabulkách je uveden ještě jeden (třetí) sloupec, který obsahuje interpolační údaje, konkrétně hodnoty

$$\frac{\mathsf{crd}\,(\alpha+\frac{1}{2})-\mathsf{crd}\,\alpha}{30}\,.$$

Rozdíly délek tětiv sousedících v tabulce jsou vyděleny 30, přičemž tyto sousední tětivy příslušejí úhlům lišícím se velikostí o půl stupně; jedna třicetina tedy odpovídá naší jedné minutě. Pro zajímavost poznamenejme, že dělení třiceti je v šedesátkové soustavě jednoduché; provede se vynásobením dvěma a posunutím řádové čárky o jedno místo doleva.

Tento interpolační údaj tedy umožňuje alespoň přibližně rozšířit tabulky na hodnoty počítané s krokem 1 minuta. Potřebujeme-li například hodnotu $\mathsf{crd}\,7^\circ\,40'$, nalezneme v tabulkách $\mathsf{crd}\,7^\circ\,30'$ a interpolační údaj – jednu třicetinu rozdílu $\mathsf{crd}\,8^\circ-\mathsf{crd}\,7^\circ\,30'$. Tento údaj vynásobíme deseti a přičteme k $\mathsf{crd}\,7^\circ\,30'$, čímž dostaneme pomocí lineární interpolace přibližnou hodnotu $\mathsf{crd}\,7^\circ\,40'$.

3 Indické tabulky sinů a Áryabhaṭa

V Indii lze zájem o astronomii s jistotou vysledovat už v prvním tisíciletí před Kristem, možná i o něco dříve. Výrazně propracovanější a přesnější se indická astronomie stala někdy kolem 5. stol. př. Kr., kdy se předpokládá příliv poznatků z Babylónie. Přibližně ve 3. a 4. stol. po Kr. se začaly objevovat také řecké vlivy. K dřívějším babylónským aritmetickým schématům se tehdy začínají přidávat řecké postupy založené na geometrii. Indičtí astronomové postupně začali řešit prakticky všechny úlohy jako Řekové, zejména určování polohy Slunce, Měsíce a planet, předpovědi zatmění, nalezení délky stínu gnómónu a další. Výpočty tohoto druhu máme zachovány už v nejstarších dochovaných astronomických dílech *Áryabhaṭíya* a *Pañcasiddhántiká* z přelomu 5. a 6. století. Tyto výpočty vyžadovaly hodnoty goniometrických funkcí, není tedy divu, že prakticky každé astronomické pojednání obsahovalo v nějaké podobě goniometrické tabulky.

Výraznou změnou oproti Řecku je, že indičtí matematici začali používat polovinu délky tětivy, což odpovídalo našim sinům. Žádný komentář se o této změně nedochoval, přesto však není nijak obtížné odhadnout, že k ní vedla nutnost násobení a dělení dvěma při počítání s celými tětivami, což se objevovalo v některých typech výpočtů.

Pro indickou vědu je typické, že mnohé výsledky byly shrnovány do stručných formulí, které usnadňovaly zapamatování. V této formě máme například dochovánu celou gramatiku sanskrtu, která obsahovala 3 976 gramatických pravidel. Tato stručná pravidla zpravidla nejsou běžně srozumitelná, je potřeba předem vědět, jak jsou v nich příslušné informace „zakódovány“.

Do této skupiny textů patří také již zmíněná matematicko-astronomická báseň *Áryabhaṭíya*, kterou ve svých 23 letech sestavil významný a hojně komentovaný matematik

Áryabhaṭa (476–550). Zde také nacházíme snad první dochovanou tabulku hodnot sinů. Celá tabulka je na malé ploše pouhých dvou veršů[8]:

मखि भखि फखि धखि णखि ञखि ङखि हस्झ स्ककि किष्ग श्घकि किघ्व ।
घ्लकि किग्र हक्य धकि किच स्ग झश ङ्व क्ल प्त फ छ कलार्धज्याः ॥१०॥

makhi bhakhi phakhi dhakhi ṇakhi ñakhi ṇakhi hasjha skaki kiṣga śghaki kighva |
ghlaki kigra hakya dhaki kica sga jhaśa ṇva kla pta pha cha kaládhejyáḥ ‖

25+200 24+200 22+200 19+200 15+200 10+200 5+200 100+90+9 90+1+100 100+80+3 70+4+100 100+4+60 |
4+50+100 100+3+40 100+1+30 19+100 100+6 90+3 70+9 5+60 1+50 21+16 22 7, což je polovina tětivy. ‖

(Áryabhaṭíya 1,10)

Zvolený přepis naznačuje strukturu jednotlivých „slov“: pomocí přidaných znamének plus jsou pro názornost oddělena jednotlivá čísla reprezentovaná slabikami v rámci jednoho slova.

Čísla, která nacházíme v těchto dvou verších, jsou *diference* polovin délek tětiv. Áryabhaṭa si bere za základ kružnici, jejíž obvod rozdělil na 21 600 stejných dílků (tj. $60 \cdot 360 = 225 \cdot 96$), jeden dílek tak odpovídá naší jedné minutě. Poloměr této kružnice je pak přibližně 3 438 dílků.

Díky tomu, že se berou jen poloviny tětiv, stačí uvádět hodnoty pouze pro první kvadrant. Tabulka obsahuje 24 čísel; rozdělíme-li tedy první kvadrant na 24 stejných částí, dostaneme $3^\circ\,45'$, čemuž odpovídá 225 Áryabhaṭových dílků.

Abychom dostali Áryabhaṭův sinus např. 15°, musíme sečíst první čtyři čísla, tj. $225 + 224 + 222 + 219 = 890$. Přepočet na náš sinus získáme, když vydělíme tuto hodnotu délkou poloměru, tj.

$$\sin 15^\circ = \frac{890}{3\,438} \doteq 0,25887\,.$$

Níže uvádíme kompletní tabulku vytvořenou na základě Áryabhaṭových veršů. V posledním sloupci jsou pro srovnání naše hodnoty funkce sinus.

Áryabhaṭova tabulka diferencí sinů

[8] Verše jsou psány slabičným písmem dévanágarí, které se čte zleva doprava. Tyto verše využívají notace, kdy každé slabice je přiřazeno číslo, čímž vzniká možnost zápisu čísel, která vypadají jako slova. Ta však v sanskrtu obecně nemají žádný běžný význam.

Pořadí	**Stupně**	**Diference**	**Součet**	**Součet / 3438**	**sinus**
1	$3^\circ 45'$	225	225	0,0654450	0,0654031
2	$7^\circ 30'$	224	449	0,1305992	0,1305262
3	$11^\circ 15'$	222	671	0,1951716	0,1950903
4	15°	219	890	0,2588714	0,2588190
5	$18^\circ 45'$	215	1105	0,3214078	0,3214395
6	$22^\circ 30'$	210	1315	0,3824898	0,3826834
7	$26^\circ 15'$	205	1520	0,4421175	0,4422887
8	30°	199	1719	0,5	0,5
9	$33^\circ 45'$	191	1910	0,5555556	0,5555702
10	$37^\circ 30'$	183	2093	0,6087842	0,6087614
11	$41^\circ 15'$	174	2267	0,6593950	0,6593458
12	45°	164	2431	0,7070971	0,7071068
13	$48^\circ 45'$	154	2585	0,7518906	0,7518398
14	$52^\circ 30'$	143	2728	0,7934846	0,7933533
15	$56^\circ 15'$	131	2859	0,8315881	0,8314696
16	60°	119	2978	0,8662013	0,8660254
17	$63^\circ 45'$	106	3084	0,8970332	0,8968727
18	$67^\circ 30'$	93	3177	0,9240838	0,9238795
19	$71^\circ 15'$	79	3256	0,9470622	0,9469301
20	75°	65	3321	0,9659686	0,9659258
21	$78^\circ 45'$	51	3372	0,9808028	0,9807853
22	$82^\circ 30'$	37	3409	0,9915649	0,9914449
23	$86^\circ 15'$	22	3431	0,9979639	0,9978589
24	90°	7	3438	1	1

4 Přínos islámských matematiků

Arabští matematici znali velmi dobře *Almagest* a některá díla indických matematiků. Také jim byla dobře známa výhoda používání sinu místo délky celé tětivy. Goniometrie sloužila v raných arabských dílech prakticky výhradně astronomii, takže základní goniometrické výsledky nacházíme vesměs v úvodních kapitolách astronomických pojednání. Arabové pozvedli goniometrii (rovinnou i sférickou) na úroveň opravdové matematické disciplíny, např. v al-Battáního přepracovaném vydání *Almagestu* (kolem roku 920).

Astronomické výpočty se prováděly v šedesátkové soustavě, proto byla také nejčastěji používána varianta sinu, kdy se nebrala kružnice jednotková, ale o poloměru 60. Tuto variantu sinu budeme značit Sin. Platí pro něj zřejmý vztah

$$\mathsf{Sin}\,\alpha = \frac{\mathsf{crd}\,\alpha}{2} = 60 \cdot \mathsf{sin}\,\alpha\,,$$

kde $\mathsf{crd}\,\alpha$ bereme v užším smyslu jako délku tětivy kružnice o poloměru 60.

První tabulky sinů, které se nám od Arabů dochovaly (ovšem jen v pozdějším přepracování), sestavil ve svém astronomickém díle *Zíj al-Sindhind*[9] Muhammad ibn Músá al-Chwárizmí (780–850). Obsahovaly šedesátkové tabulky sinů s intervalem 1° s přesností na 3 šedesátinná místa. Al-Chwárizmí zde také implicitně používá kotangens a tangens při řešení úloh na zjišťování výšek pomocí gnómónu a stínu.

Abú'l-Raychán al-Bírúní (973–1048) patřil mezi největší arabské učence. Napsal ohromné množství prací o astronomii (zejména *Qánún al-Mas'údí*), matematice, geografii, indické literatuře a mnoha dalších tématech. Goniometrii se věnoval v díle *Kniha o odvození tětiv v kružnici*.

V tabulkách sinů, které uvádí v *Qánún al-Mas'údí*, bral kružnici s jednotkovým poloměrem; jeho sinus tak přesně odpovídá našemu. Tato změna však přinášela jen malé výhody, protože se astronomické výpočty prováděly v šedesátkové soustavě. Přechod k jednotkové kružnici začal být nevyhnutelný až tehdy, když se začalo upouštět od šedesátkové soustavy a výpočty se prováděly v soustavě desítkové. Přechod k jednotkové kružnici pak znamenal vyhnout se neustálému násobení a dělení šedesáti. V Evropě se sinus, jak jej známe dnes, usadil až zásluhou L. Eulera.

Originálním způsobem se postavil k problému s aproximací $\mathsf{Sin}\,1^\circ$ matematik Al-Samaw'al ibn Yachyá al-Maghribí ve své práci *Odhalení chyb astronomů*. Zde mimo jiné poukazuje na to, že astronomové spoléhají na tětivu příslušnou jednomu stupni, přitom však nikdo nezná přesně její délku. Odhalil, že kořenem tohoto problému je rozdělení kružnice na 360 dílů. Hned také navrhuje řešení: rozdělit kružnici na 240 nebo na 480 dílů. Při rozdělení na 480 dílů totiž odpovídá strana pravidelného vepsaného pětiúhelníka 96 dílům a šestiúhelníka 80 dílům. Odsud se pak snadno určí délka tětivy odpovídající $96 - 80 = 16$ dílům. Postupným půlením pak už snadno dostaneme délku tětivy odpovídající právě jednomu dílu.

4.1 Zpřesňování výpočtů u Arabů

V Ptolemaiově postupu výpočtu hodnot délek tětiv je přesnost omezena přesností odhadu $\mathsf{crd}\,1^\circ$, který je proveden na dvě šedesátinná místa. Zlepšením tohoto odhadu se úspěšně zabývali arabští učenci.

Nejstarší známé zpřesnění odhadu pro $\mathsf{Sin}\,1^\circ$ provedl egyptský astronom Ibn Yúnus. Kolem roku 1007 sestavil velmi dobré tabulky. Pro nalezení přesnějšího odhadu bere známé hodnoty $\mathsf{Sin}\,\frac{9}{8}^\circ$ a $\mathsf{Sin}\,\frac{15}{16}^\circ$, ze kterých získává pomocí lineární interpolace hodnotu $\mathsf{Sin}\,1^\circ$ s přesností na 3 šedesátinná místa (tj. 6 desetinných míst). S touto přesností pak také počítá tabulky sinů s krokem 10 minut.

Ještě větší přesnosti než Ibn Yúnus dosáhl v určování odhadu $\mathsf{Sin}\,1^\circ$ baghdádský astronom Abú'l-Wafá' al-Búzjání (940–998). Jako jeden z prvních se zabýval podrobně

[9] Toto dílo bylo založeno na stejnojmenné dřívější práci, která byla překladem sanskrtského astronomického textu.

a systematicky goniometrickými vzorci. Ve svém díle *Almagest* používal jak délku tětivy, tak i sinus. Mnoho vět, které uvádí, se zabývá vztahy mezi nimi.

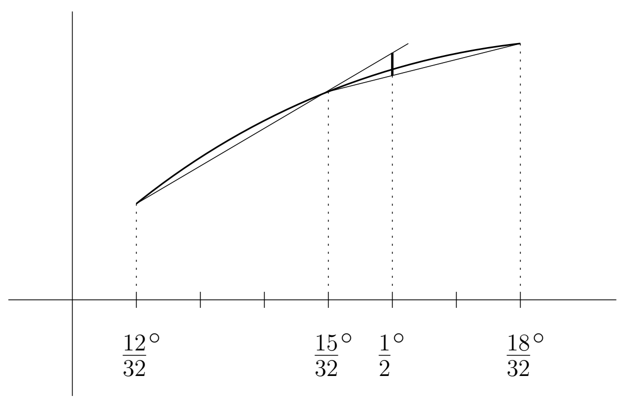
Abú'l-Wafá' navrhl nový způsob určení přesnějšího odhadu pro $\mathsf{Sin}\,\frac{1}{2}^\circ$, čímž opět získal možnost výpočtu mnohem přesnějších tabulek. Pro výpočet $\mathsf{Sin}\,\frac{1}{2}^\circ$ také používá interpolační metodu, přičemž předem vypočte

$$\mathsf{Sin}\,\frac{12}{32}^\circ\,,\quad \mathsf{Sin}\,\frac{15}{32}^\circ\,,\quad \mathsf{Sin}\,\frac{18}{32}^\circ\,,$$

kde

$$12^\circ = 72^\circ - 60^\circ\,,\quad 15^\circ = \frac{30}{2}^\circ\,,\quad 18^\circ = \frac{36}{2}^\circ\,.$$

Horní hranici pro $\mathsf{Sin}\,\frac{1}{2}^\circ$ získá z hodnoty na přímce, která prochází body $\left[\frac{12}{32}^\circ, \mathsf{Sin}\,\frac{12}{32}^\circ\right]$ a $\left[\frac{15}{32}^\circ, \mathsf{Sin}\,\frac{15}{32}^\circ\right]$. Podobně pro horní hranici použije přímku procházející body $\left[\frac{15}{32}^\circ, \mathsf{Sin}\,\frac{15}{32}^\circ\right]$ a $\left[\frac{18}{32}^\circ, \mathsf{Sin}\,\frac{18}{32}^\circ\right]$, jak je naznačeno na obrázku.



Získané hranice pro $\mathsf{Sin}\,\frac{1}{2}^\circ$ jsou přibližně šestkrát užší než Ptolemaiovy. Abú'l-Wafá' tak nakonec dostává hodnotu $\mathsf{Sin}\,\frac{1}{2}^\circ = 0;31,24,55,54,|55$, tj. s přesností na 7 desetinných míst.

4.2 Al-Káší

V Samarkandu byla ve 20. letech 15. stol. zřízena observatoř vybavená nejlepšími přístroji té doby. Tam byly také sestaveny velmi přesné astronomické tabulky Zíj Guragání, které obsahovaly tabulky sinů (s krokem 1 minuty) a tangent, obojí s přesností na 5 šedesátinných míst.

Jamšíd al-Káší (†1429) popisuje v dopise *Rísalat al-watar wa-l-Jayb* (Dopis o tětivě a sinu, kol. r. 1400), jak získat jiným způsobem než Ptolemaios hodnotu $\mathsf{Sin}\,1^\circ$. Ptolemaiův postup pomocí odhadu už totiž nelze výrazně zpřesňovat. Jedná se o úplně jiný přístup, než který navrhl Abú'l-Wafá'.

Původní al-Kášího práce je sice ztracena, jeho postup však máme zaznamenán např. v komentáři k astronomickým tabulkám *Pravidla operací a oprava tabulek*, který sepsal

Marjám Čelebí (kol. r. 1500). V jednom z rukopisů je výslovně řečeno, že tento uvedený postup výpočtu $\mathsf{Sin}\,1^\circ$ pochází od al-Kášího. Čelebího dědeček byl Qádí-záde, který pracoval v Samarkandu podobně jako al-Káší. Sepsal *Traktát o určení sinu jednoho stupně*, v němž je vyložen al-Kášího způsob výpočtu.

4.3 Al-Kášího metoda aproximace sin 1°

V době al-Kášího byla velmi dobře známa hodnota (v šedesátkové soustavě)

$$\mathsf{Sin}\,3^\circ = 3; 8, 24, 33, 59, 34, 28, 15\,,$$

což odpovídá (po převedení do desítkové soustavy a po přepočtu na náš sinus) hodnotě $\sin 3^\circ = 0{,}052\,335\,956\,242\,94|4$. Tuto hodnotu lze získat standardním Ptolemaiovým postupem. Pro přehlednost budeme celý postup modernizovat a budeme používat našeho sinu.

Al-Káší vychází z tehdy známého vzorce

$$\sin 3\alpha = 3\,\sin\alpha - 4\,\sin^3\alpha\,,$$

kde za α dosazuje 1°. Přitom $\sin 1^\circ$ bere jako „věc“, která není známa, čímž celý problém převede na řešení kubické rovnice

$$\sin 3^\circ = 3x - 4x^3\,,$$

kde hledá $x = \sin 1^\circ$. Toto přeformulování problému trisekce úhlu na rovnici třetího stupně se podařilo už v 11. století. Celou rovnici pak al-Káší píše ve tvaru

$$3x = 4x^3 + \sin 3^\circ\,,$$

což je základem v podstatě iteračního předpisu

$$x = \frac{4x^3 + \sin 3^\circ}{3}\,, \quad x_0 = \frac{1}{60}\,.$$

Přesněji řečeno, al-Káší hledal neznámou ve formě součtu

$$x = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_9\,,$$

kde jednotlivá a_i reprezentují jednotlivé cifry v šedesátkové soustavě vydělené příslušnou mocninou šedesáti. V al-Kášího postupu je pak například

$$a_2 = \frac{(a_0 + a_1)^3 + \mathsf{Sin}\,3^\circ}{3} - (a_0 + a_1) \approx 0; 0, 49\,.$$

Po devíti takových iteracích tedy obdržel hodnotu

$$\mathsf{Sin}\,1^\circ = 1; 2, 49, 43, 11, 14, 44, 16, |19, 16\,,$$

kde je správných sedm šedesátinných míst (poslední dvě šedesátinná místa by měla být 26, 18). Tato hodnota odpovídá našemu

$$\sin 1^\circ = 0,01745\ 24064\ 3728|2\ 8\,,$$

čímž dosáhl velké přesnosti. Celý postup má oproti předchozím přístupům založeným na omezování hodnoty pomocí lineární interpolace tu velikou výhodu, že stačí znát dostatečně přesně hodnotu $\mathsf{Sin}\,3^\circ$, a poté dostaneme po několika málo iteracích pohodlně $\mathsf{Sin}\,1^\circ$ s požadovanou přesností.

4.4 Al-Kášího metoda aproximace sin 1° – program v Pythonu

Al-Kášího metoda aproximace umožňuje provést výpočet Ptolemaiovy tabulky s libovolnou přesností. Stačí, abychom Ptolemaiovým postupem vypočetli $\sin 3^\circ$ a potom al-Kášího postupem spočítali $\sin 3^\circ$ s požadovanou přesností. Tyto výpočty lze snadno provést na počítači. Na závěr této části tedy přikládáme kompletní program napsaný v jednoduchém programovacím jazyce Python[10].

```
# Výpočet sin 3° podle Klaudia Ptolemaia
# a výpočet sin 1° podle al-Kášího

from decimal import *

N = 49
getcontext().prec = N     # nastavení přesnosti výpočtů

def odmoc(x):             # funkce pro výpočet odmocniny
    a = x
    x = x / Decimal(2)
    for i in range(N+3):
        x = (a + x*x ) / (2*x)
    return x

       # Ptolemaiovy výpočty
sin36 = Decimal(1)/Decimal(2) * odmoc( (Decimal(5) - odmoc(5)) / Decimal(2) )
sin6 = odmoc(3)/Decimal(2) * sin36 - 1/Decimal(2) * odmoc( Decimal(1) - sin36**2 )
sin3 = odmoc( (Decimal(1) - odmoc( Decimal(1) - sin6 **2 )) /Decimal(2) )


       # al-Kášího výpočty
       # odhad sin 1° nejsnáze:  (1 / 2) / 30   (tj. sin 30° / 30)
```

[10] Kompletní prostředí pro psaní a spouštění programů v jazyce Python3 je zdarma k dispozici na stránkách https://www.python.org/downloads/.

```
a =  Decimal(1) / Decimal(60)      # lepší odhad: sin3 / Decimal(3)

for i in range(N // 3 + 3):
    print(i, "\t" , a)
    a = (sin3 + Decimal(4)* a*a*a) / Decimal(3)



       # kontrola pomocí Taylorova rozvoje - vstup ve stupních
def SinTaylor(a):
    pi = Decimal("3.14159265358979323846264338327950288419716939937510")
    a = a * pi / Decimal(180)
    sin = a
    x = a
    k = Decimal(1)
    for i in range(3, N // 2 + 3, 2):
        x = x * a * a * Decimal('-1')
        k = k * Decimal(i-1) * Decimal(i)
        sin = sin + x / k
    return sin

print("kontrola - Taylor:")
print("\t" , SinTaylor(1) )
```

5 Názvy goniometrických funkcí

Přestože je tětiva geometricky názorná, v astronomických výpočtech se většinou uplatňovala polovina délky tětivy. První doklad jejího tabelování máme doložen u významného a hojně komentovaného indického astronoma a matematika Áryabhaṭy[11] (476–550), který nazývá polovinu tětivy *ardha-jya* (nebo zkrácené *jya*), což znamená „polovina tětivy luku“. Tento standardní termín staré indické matematiky pak arabští matematikové přepsali při překladu indických děl do arabštiny jako *jiba* (psáno bez samohlásek *jb*), což však nemá v arabštině žádný význam. Pozdější autoři to tedy začali někdy v 9. století nahrazovat slovem *jaib* („záliv, zátoka“). Když pak ve 12. stol. překládali Robertus Castrensis (Robert z Chesteru, 1145) a Gherardo z Cremony (1175) tyto spisy do latiny, nahradili arabské

[11] Áryabhaṭa patřil mezi velmi významné indické učence. Určil například obvod Země s udivující přesností – jeho údaj je jen o přibližně 100 km menší než současná hodnota. Uvádí také hodnotu $\pi = 3,1416$. Věděl, že to není přesná hodnota (zmiňuje, že se „blíží“); často se mu tak připisuje, že věděl o iracionalitě π, což však není v kontextu indické vědy zcela korektní. Áryabhaṭu dále citují význační arabští matematikové, např. al-Chwárizmí, který jeho dílo *Áryabhaṭía* přeložil kol. roku 820 do arabštiny, což také sehrálo důležitou úlohu na cestě arabských číslic do Evropy.

jaib doslovně latinským ekvivalentem *sinus* („záhyb, oblouk, záliv“).

Název pro kosinus (vlastně zkratka pro latinské *complementarii anguli sinus*, tj. „sinus doplňkového úhlu“) zavedl spolu s názvem kotangens roku 1620 anglický astronom a matematik Edmund Günther (1581–1626) ve svém spisu *Canon Triangulorum*.

Dnes poměrně opomíjený kotangens (opět zkratka pro latinské *complementarii anguli sinus*, tj. „tangens doplňkového úhlu“) se objevil dříve než tangens, v arabské matematice jej zavedl v 9. stol. al-Battání. V Evropě jej znovuobjevil anglický matematik Thomas Bradwardin (1290–1349).

6 G. J. Rhaeticus – pravoúhlý trojúhelník

Georg Joachim Rhaeticus (1514–1574) byl původně profesorem aritmetiky a geometrie. Poté, co musel opustit Lipsko, odešel do Prahy studovat medicínu. Usadil se v Krakově, kde se věnoval medicíně a astronomii.

Rhaeticus je zpravidla spojován s Koperníkem, neboť v roce 1539 Koperníka navštívil a podpořil jej v publikování jeho objevů. Bez něho by patrně Koperníkovo dílo zapadlo.

V roce 1551 vydal spisek *Canon doctrinae triangulorum*, který obsahoval tabulky všech šesti tehdy používaných goniometrických funkcí (sin, cos, tg, cotg, sec, cosec). Rhaeticus v tomto spisku učinil velmi významný krok: goniometrické funkce zavedl pomocí vztahů mezi úhly a stranami v pravoúhlém trojúhelníku, tj. způsobem, kterým se ke goniometrickým funkcím přistupuje dnes na základní škole. Tím opustil kruhové oblouky a tětivy.

V Krakově se kromě medicíny věnoval také astronomii, zvláště sestavování ohromných tabulek goniometrických funkcí *Opus Palatinum de triangulis*. Toto dílo čítá přes 1 400 stran. Obsahuje také teoretickou část, která zahrnuje prakticky celou rovinnou i sférickou trigonometrii.

Necelý rok před svou smrtí k sobě Rhaeticus přijal mladého studenta jménem Lucius Valentinus Otho, který se později stal profesorem v Heidelbergu. Do teoretické části přispěl 340tistránkovým pojednáním o sférických trojúhelnících. Po Rhaeticově smrti se Otho postaral o dokončení celého díla, které vyšlo roku 1596, práce mu tedy zabrala asi dvacet let. Přitom byl finančně podporován Frederikem IV.

7 M. Koperník a jeho nový *Almagest*

Úpravy Ptolemaiova Almagestu a komentáře k němu zůstaly až do doby Koperníkovy základem veškeré evropské astronomie. Sám Koperník své hlavní dílo *De revolutionibus orbium coelestium* (Oběhy nebeských sfér) koncipoval podle *Almagestu*. Toto jeho dílo mělo být jakýmsi novým *Almagestem* vycházejícím však z heliocentrického názoru.

Pro zajímavost a pro srovnání s Ptolemaiovým *Almagestem* uvedeme obsah celé první knihy.

Úvod

1. O tom, že svět je kulatý
2. O tom, že také Země je kulatá
3. O tom, jak Země s vodou tvoří jedinou kouli
4. O tom, že pohyb nebeských těles je rovnoměrný, kruhový, nepřetržitý anebo složený z kruhových pohybů
5. O tom, zda se Země pohybuje kruhovým pohybem, a o jejím místě
6. O nesmírné velikosti nebe vzhledem k velikosti Země
7. Proč se staří domnívali, že Země leží nehybně ve středu světa jako jeho centrum
8. Řešení předložených důvodů a jejich nedostatečnost
9. Zda je možné Zemi přisoudit více pohybů a o středu světa
10. O pořadí nebeských sfér
11. Důkaz o trojnásobném pohybu Země
12. O přímkách, které jsou tětivami kruhu
13. O stranách a úhlech přímostranných rovinných trojúhelníků
14. O sférických trojúhelnících

Kapitoly 12–14 první knihy měly původně tvořit samostatnou druhou knihu, která by obsahovala pomocný matematický aparát. Tato část vyšla tiskem odděleně pod Koperníkovým jménem ještě před publikací celého díla roku 1542 pod názvem *De lateribus et angulis triangulorum, tum planorum rectilineorum, tum sphaericorum* (O stranách a úhlech rovinných přímostranných a sférických trojúhleníků) ve Wittenbergu. O vydání se postaral Georg Joachim Rhaeticus.

Pro nás je teď nejzajímavější 12. kapitola, v níž Koperník uvádí Ptolemaiův postup výpočtu a tabulky. Samotný výklad s důkazy je veden pro tětivy. Potom však poznamenává, že bude v tabulce uvádět jen poloviny tětiv dvojnásobného oblouku. Díky tomu vystačí pouze s kvadrantem a nemusí brát celý půlkruh. Navíc jsou ve výpočtech a v důkazech užitečnější poloviny než celé délky tětiv. Své tabulky uvádí s krokem šestiny stupně, tj. 10 minut.

O volbě průměru kružnice Koperník píše:[12]
Kruh jsme v obecné shodě s matematiky rozdělili na 360 stupňů. Staří autoři brali průměr jako 120 dílů; pozdější autoři, aby se vyhnuli spleti malých čísel při násobení a dělení těchto

[12] Viz [Ko], str. 85–86.

čar, které jsou nesouměřitelné v délkách, ale spíše v mocninách, odkdy se ustálilo používání indických číslic, určili průměr na dvanáctkrát sto tisíc, další na dvacetkrát sto tisíc, jiní určili racionální průměr nějak jinak. Tento způsob číselného označení je dokonalejší než kterýkoli jiný, ať už řecký nebo latinský, protože se dá neobyčejně pohotově použít na výpočty. Proto jsme i my přijali 200 000 dílů průměru jako dostačujících, aby zabránily vydělitelné chybě. To, co navzájem není v poměru jako číslo k číslu, je možné vyjádřit tím, co stojí nejblíže. Následujíce z velké části Ptolemaia, vysvětlíme to v šesti teorémech a v jedné úloze.

Těchto šest vět skutečně odpovídá šesti krokům, ve kterých odvozuje celou teorii Ptolemaios. Pro srovnání si Koperníkovy věty stručně a bez důkazů shrneme.

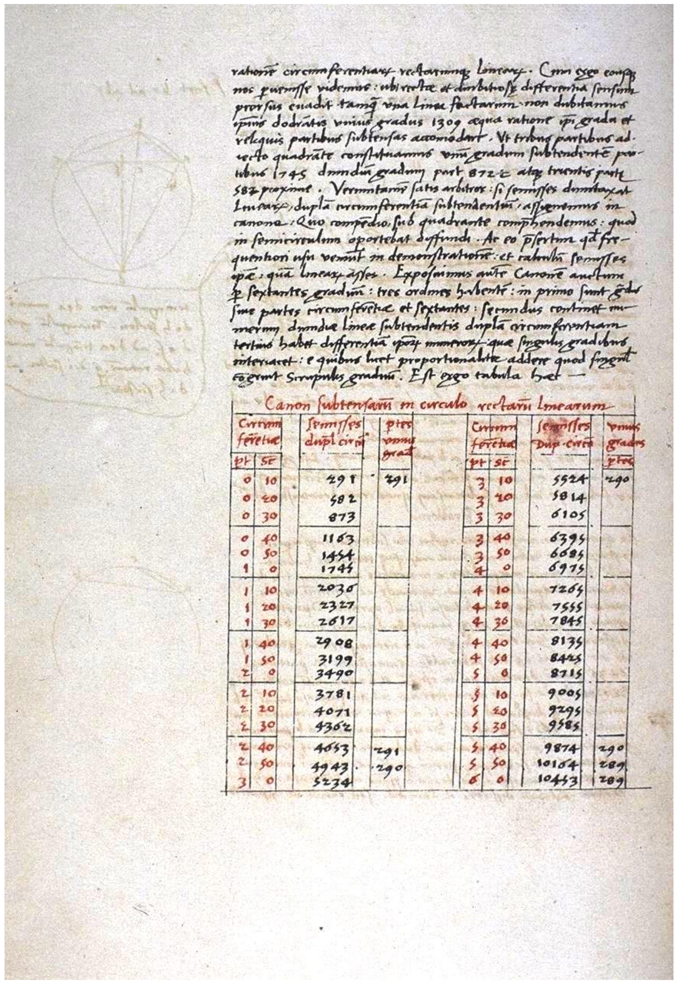
1. Pro daný průměr kruhu je dána i strana pravidelného vepsaného troj-, čtyř-, šesti-, pěti- a desetiúhelníka.
2. Vepíše-li se do kruhu čtyřúhelník, rovná se obdélník sestrojený z úhlopříček těm rovnoběžníkům, které jsou sestrojeny z protilehlých stran. (Ptolemaiova věta)
3. Odsud lze získat vztah pro $\mathsf{crd}\,(\alpha - \beta)$.
4. Odvození vztahu pro $\mathsf{crd}\,\frac{\alpha}{2}$.
5. Odvození vztahu pro $\mathsf{crd}\,(\alpha + \beta)$.
6. Důkaz nerovnosti $\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} > \frac{\mathsf{crd}\,\beta}{\mathsf{crd}\,\alpha}$.

Před uvedením samotných tabulek Koperník podává ještě stručný komentář, jak lze tabulky vytvořit. Poznamenává, že *když vezmeme oblouk AB rovný* $1\ 1/2^\circ$ *a oblouk AC je velký* $3/4^\circ$, *bude tětiva AB těch* 2618 *dílů a tětiva AC* 1309 *dílů, a tak musí být větší než polovina tětivy AB; nelze však pozorovat, že by se od ní lišila, ale poměr oblouků a tětiv už vypadá jakoby stejný. Když jsme tedy došli až tam, kde je rozdíl přímky a oblouku nepostřehnutelný, jako by byli touž čarou, nepochybujeme o tom, že se tětivy, právě tak jako tětiva* $3/4^\circ$, *která je* 1309 *dílů, stejně přizpůsobují k jednomu stupni a k ostatním jeho částem.*[13]

Na obrázku je ukázka z autografu Koperníkových *Oběhů*, na které je začátek jeho tabulky sinů. V prvních dvou sloupcích jsou stupně a minuty (červeně), druhý sloupec obsahuje „poloviční tětivy dvojnásobných oblouků“, tj. čísla, která jsou po posunu řádové čárky o pět míst doleva přesně rovna našim sinům. Všimněme si například sinu jednoho stupně.[14]

[13] Viz [Ko], str. 91–92.

[14] Pro srovnání: $\sin 1^\circ = 0{,}01745\,24\ldots$ Obrázek byl převzat z digitalizované verze zveřejněné na stránkách Jagellonské univerzity v Krakově.



Ukázka autografu Koperníkových *Oběhů*, folio 15 verso.

8 Mocninné řady, řetězové zlomky

Taylorovy rozvoje funkcí do mocninné řady jsou známy velmi dobře. Například máme

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Tato řada konverguje velmi rychle pro x blízká nule. Nepřekvapí tedy, že Taylorovy (příp. Laurentovy) rozvoje nacházejí uplatnění v praxi. Pro zajištění dostatečné rychlosti konvergence na celém základním intervalu se tento interval rozdělí na několik podintervalů a pro každý z nich je v paměti uložen speciální rozvoj vhodný pro příslušný podinterval.

Rozvoje do mocninných řad se tedy pro praktické výpočty vesměs hodí. Napsat Taylorův rozvoj pro funkci tangens je však nepoměrně složitější, než pro funkce sinus a kosinus.

Jinak je tomu s řetězovým zlomkem; pro funkci tangens jej lze napsat poměrně snadno:[15]

$$\operatorname{tg} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}},$$

což se úsporněji píše ve tvaru

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1-}\,\frac{x^2}{3-}\,\frac{x^2}{5-}\,\frac{x^2}{7-}\,\ldots$$

Rozvoje do řetězových zlomků jsou často numericky výhodnější než rozvoje do mocninných řad, řetězové zlomky totiž často konvergují rychleji.

V praxi se používají i jiné aproximace zadané funkce polynomem či racionální funkcí, aproximace Čebyševova a Padého, interpolační vzorce.[16] Ve všech těchto případech však výpočet obsahuje mnoho násobení a dělení, což dříve bývalo náročné na čas i na místo na papíře, resp. v paměti. V dobách počátků výpočetní techniky se tedy musel hledat vhodnější způsob výpočtu goniometrických funkcí, který by vyhovoval možnostem tehdejší výpočetní techniky.

9 CORDIC

V září roku 1959 vyvinul Jack E. Volder v oddělení letecké elektroniky v Convair speciální algoritmus pro výpočet hodnot funkce tangens. Tehdy bylo potřeba nahradit analogový řešič v navigačním počítači bombardéru B-58. Nový algoritmus dostal název CORDIC, tj. Coordinate Rotation on a Digital Computer. Svůj výsledek publikoval ve článku [Vo].

Tento algoritmus byl navržen s ohledem na omezené možnosti tehdejší výpočetní techniky. Potřeboval prakticky pouze sčítání, odčítání a posun desetinné čárky, což jsou operace, které lze provádět velmi snadno a rychle. Pokud tedy procesor nemá zabudováno hardwarové násobení, tak je CORDIC obecně rychlejší než jiné algoritmy. Jinak jsou však mocninné řady a metody založené na načítání z tabulky a následné interpolaci rychlejší.

John Stephen Walther z Hewlett–Packardu tento algoritmus později zobecnil[17] tak, že jej bylo možno použít nejen na výpočet funkčních hodnot goniometrických a hyperbolických funkcí, ale také funkcí exponenciálních, druhé odmocniny, logaritmů a násobení i dělení.

[15] Viz [Pr], str. 91–92.
[16] Podrobněji viz [AS].
[17] Viz [Wa], str. 91–92.

CORDIC byl původně vytvořen pro dvojkovou soustavu, v sedmdesátých letech se pak objevila modifikace pro soustavu desítkovou – většina kapesních kalkulátorů totiž byla konstruována tak, že ve dvojkové soustavě reprezentovala dekadické číslice (BCD, binary coded decimal).

9.1 Podstata algoritmu

Algoritmus CORDIC je založen na použití součtového vzorce pro funkci tangens. Chceme-li pro dané α vypočítat $\mathsf{tg}\,\alpha$, je postup následující.

1. V paměti máme uložena jednou pro vždy čísla α_i taková, že $\mathsf{tg}\,\alpha_i = 10^{-i}$, tj.

$$\mathsf{tg}\,\alpha_0 = 1\,, \quad \mathsf{tg}\,\alpha_1 = \frac{1}{10}\,, \quad \mathsf{tg}\,\alpha_2 = \frac{1}{100}\,, \quad \ldots$$

2. α napíšeme jako součet těchto α_i:

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i$$

Dostaneme tak

$$\mathsf{tg}\,\alpha = \mathsf{tg}\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\right).$$

3. S použitím součtového vzorce

$$\mathsf{tg}\,(\alpha_i + \alpha_j) = \frac{\mathsf{tg}\,(\alpha_i) + \mathsf{tg}\,(\alpha_j)}{1 - \mathsf{tg}\,(\alpha_i) \cdot \mathsf{tg}\,(\alpha_j)}$$

dostaneme výsledek. Konkrétně, označme

$$\mathsf{tg}\,\beta = \frac{y}{x}\,, \quad \mathsf{tg}\,(\beta + \alpha_i) = \frac{y'}{x'}\,,$$

dostaneme

$$\mathsf{tg}\,(\beta + \alpha_i) = \frac{\frac{y}{x} + \mathsf{tg}\,\alpha_i}{1 - \frac{y}{x} \cdot \mathsf{tg}\,\alpha_i} = \frac{y + x\,\mathsf{tg}\,\alpha_i}{x - y\,\mathsf{tg}\,\alpha_i} = \frac{y'}{x'}\,,$$

odkud obdržíme

$$y' = y + x\,\mathsf{tg}\,\alpha_i\,, \quad x' = x - y\,\mathsf{tg}\,\alpha_i\,.$$

Násobení $\mathsf{tg}\,\alpha_i$ je realizováno pouhým posunem desetinné čárky, neboť $\mathsf{tg}\,\alpha_i = 10^{-i}$. Zde je skryta podstata a účinnost tohoto algoritmu. Úplně na závěr celého výpočtu je pak potřeba provést jediné dělení.

9.2 CORDIC – program v Pythonu

Tento algoritmus lze snadno implementovat. Na závěr této části přikládáme jednoduchý program napsaný v programovacím jazyce Python[18], který je určen pro vlastní experimentování s algoritmem CORDIC.

```
# Výpočet tg pomocí CORDIC

alfa = [0.7853981633974483096156608458198757210492923498437764, # arctg 1
0.0996686524911620273784461198780205902432783225043146,      # arctg 1/10
0.0099996666866652382063401162092795485613693525443766,      # arctg 1/100
0.0009999996666668666665238096349205440116209345542680,       # arctg 1/1000
0.0000999999996666666686666666523809524920634911544011,
0.000009999999999666666666686666666665238095238206349,
0.0000009999999999996666666666668666666666665238095238,
0.00000009999999999999966666666666666866666666666665238,
0.000000009999999999999999666666666666666686666666666667,
0.000000000999999999999999999666666666666666666866666667,
0.0000000000999999999999999999996666666666666666666686667]

uhel = float( input("Zadejte úhel (rad): ") )
a = uhel

x = 1;  y = 0;  d = 10;

for i in range(11):
    d = d / 10
    while a >= alfa[i]:
        a = a - alfa[i]
        x = x - d*y
        y = y + d*(x + d*y)

print("tg {} = {:.10}".format(uhel, y/x))
```

[18] Kompletní prostředí pro psaní a spouštění programů v jazyce Python3 je zdarma k dispozici na stránkách https://www.python.org/downloads/.

Část II
Astronomické počátky goniometrie

V této části se zaměříme na jeden konkrétní případ spojení matematiky s praxí. Ukážeme si, jak pozorování nestejné délky ročních období vedlo k vytvoření modelů, jejichž matematické zpracování si vyžádalo vznik nové matematické disciplíny – goniometrie.

10 Počátky goniometrie a pozorování délky ročních období

Zmínku o prvním pozorování nestejné délky ročních období lze nalézt v Simplikiově komentáři k Aristotelovi[19], kde se píše o Metónovi a Euktémonovi[20], kteří už někdy kolem roku 430 př. Kr. věděli o tom, že se doby mezi slunovraty a rovnodennostmi liší. Přehled antických pozorování nestejné délky ročních období nacházíme na jednom papyru známém pod názvem *Eudoxī Ars Astronomica*[21]:

	Jaro	Léto	Podzim	Zima	Rok
Eudoxos	91?	91?	92	91	asi 360 př. Kr.
Démokritos	?	–	91	91	asi 400 př. Kr.
Euktémón	tj. 93	90	90	92	asi 430 př. Kr.
Kallippos	tj. 94	92	89	90	asi 330 př. Kr.

Z tabulky shrnující tato pozorování je vidět, že Euktémonovo pozorování sice nebylo úplně přesné, přesto však ukázalo, že jaro[22] je nejdelším ročním obdobím. O pozorování Démokritově nemáme záznam úplný. Překvapující je, že vynikající matematik a astronom Eudoxos z Knidu pravděpodobně považoval rozdíly v délce jednotlivých ročních období za

[19] I. L. Heiberg, *Simplicii In Aristotelis De caelo, Commentaria.* Berolini, 1894. Na straně 497, řádek 19 se nachází citát z Eudéma, který se zmiňuje o Metónovi a Euktémonovi.

[20] Metón a Euktémón jsou někdy považováni za zakladatele vědecké astronomie, a to díky pozorování letního slunovratu, které provedli v Athénách roku 432 př. Kr. Jedná se o první datované pozorování v antice.

[21] Vydal jej Fr. Blass roku 1887. Tento papyrus byl napsán v Egyptě mezi lety 193 a 165 př. Kr. Jedná se pravděpodobně o zápisky z přednášek. Ke konci tohoto papyru (sloupce 22 a 23) se nachází údaje o nestejných délkách jednotlivých ročních období u různých autorů. Pak už jen následuje seznam znamení zvěrokruhu a závěrečné poznámky, mezi nimiž si pisatel zaznamenal i pobídku přednášejícího k pilnému studiu, jež má studentům zajistit lepší život: *Namáhejte se, pánové, abyste pak nemuseli žít v námaze.*

[22] Dodejme pro úplnost, že délky ročních období se postupem času pomalu mění; dnes je nejdelším ročním obdobím léto.

chybu měření a rozdělil rok na čtyři stejné díly (podzimu formálně přidal jeden den, aby získal počet 365). Mnohem přesnější pozorování provedl sto let po Euktémonovi Kallippos.

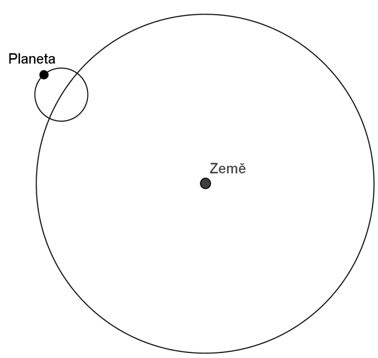
Slavný astronom Hipparchos provedl někdy před rokem 130 př. Kr. vlastní pozorování, která byla velmi přesná:

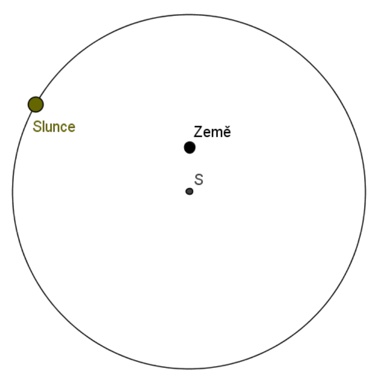
$$\text{jaro} \quad 94\tfrac{1}{2} \qquad \text{léto} \quad 92\tfrac{1}{2} \qquad \text{podzim} \quad 88\tfrac{1}{8} \qquad \text{zima} \quad 90\tfrac{1}{8}\ .$$

Tyto výsledky potvrdil Klaudios Ptolemaios[23] kolem roku 150 po Kr. svým vlastním přesným měřením, při němž odhalil nepatrnou nepřesnost umístění velkého bronzového prstence sloužícího k určování rovnodennosti, který byl umístěn v alexandrijské palaistře. V Ptolemaiově astronomickém kompendiu *Almagest* se nachází rozsáhlá citace Hipparchových výsledků měření a popis modelu, který Hipparchos na základě těchto výsledků vytvořil. Právě v matematickém popisu tohoto modelu nacházíme snad vůbec první použití „goniometrie“. Podobných aplikací pak nacházíme v antické astronomii celou řadu, přičemž právě takovéto astronomické výpočty byly motivem pro vytvoření celého nového odvětví matematiky, které dnes nazýváme goniometrie.

10.1 Volba modelu pohybu Slunce

Stále přesnější pozorování nestejných délek ročních období vedla k potřebě upravit nejjednodušší model pohybu Slunce: pohyb konstantní rychlostí po kružnici, v jejímž středu je Země. Jelikož bylo pro antického člověka těžké si představit, co by Slunce přimělo při svém oběhu snižovat a zvyšovat svou rychlost, případně co by jej mohlo vychýlit z kruhové dráhy, byly nové modely zaměřeny na modifikaci volby středu rovnoměrného kruhového pohybu. Vznikly tak dva modely, o nichž později Apollónios z Pergé kolem roku 200 př. Kr. čistě geometrickou cestou dokázal, že jsou ekvivalentní.



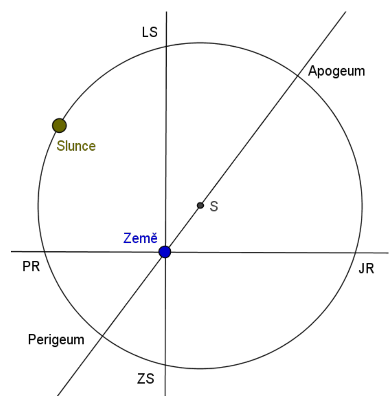


Dva modely pohybu nebeských těles: 1) deferent a epicykl; 2) excentr.

[23] Alexandrijský astronom, autor velkého astronomického kompendia *Almagest* o 13 kapitolách, v němž shrnul, doplnil a systematizoval výsledky práce předchozích generací astronomů. Zdaleka nejvíce navazuje na Hipparcha. O Hipparchových výsledcích ohledně nestejných délek ročních období se dozvídáme právě díky tomu, že je Ptolemaios obsáhle cituje ve svém *Almagestu;* Hipparchově pozorování a teoretickému modelu věnuje kapitolu III.4., viz [T1].

První model, který vznikl nejspíše při popisu pohybu planet[24], ponechal ve středu velké kružnice (tzv. *deferent*) Zemi, po ní se však pohybovala svým středem jiná menší kružnice (tzv. *epicykl*), po níž teprve obíhalo jednou za rok Slunce. Jednalo se tedy o složení dvou rovnoměrných kruhových pohybů.

Druhý model byl založen na posunu středu kruhového pohybu. Slunce se tak pohybovalo konstantní rychlostí po kruhové dráze (nazývané *excentr*), která však měla střed mimo Zemi. Tento střed bylo potřeba nalézt tak, aby byl v souhlasu s pozorovanými údaji. Právě tento model si pro matematickou jednoduchost Hipparchos vybral. Navíc argumentoval tím, že nepovažuje za rozumné popisovat pohyb Slunce pomocí složení dvou pohybů, je-li jej možné popsat pomocí jediného rovnoměrného kruhového pohybu.



10.2 Hledání středu excentru

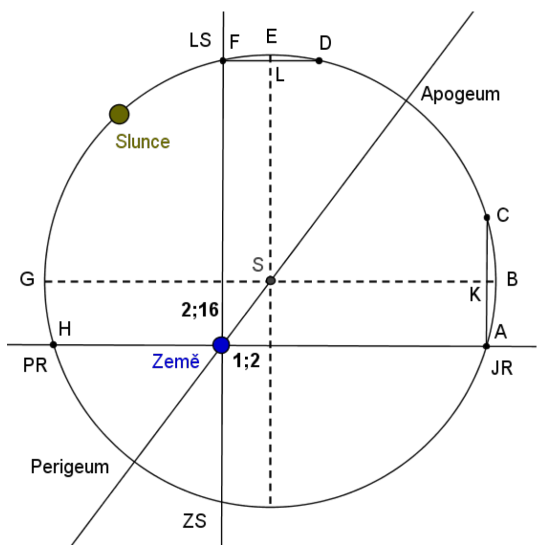
Nalezení středu excentru a jeho vzdálenosti od Země bylo problémem, který se Hipparchovi podařilo vyřešit pouze s využitím tehdy nově vzniklého odvětví matematiky, jež se zabývalo určováním délek tětiv odpovídajících příslušným středovým úhlům (značíme $\mathsf{crd}\,\alpha$, z řec. *chordé,* struna ze střeva). Hipparchos dokonce sestavil jejich tabulku. Ta je první tabulkou, jež přesně odpovídá dnešním tabulkám funkce sinus. Připomeňme, že sinus je vlastně polovinou délky tětivy (v jednotkové kružnici), délka tětivy $\mathsf{crd}\,\alpha$ v jednotkové kružnici je tedy

$$\mathsf{crd}\,\alpha = 2\ \mathsf{sin}\,\frac{\alpha}{2}\,.$$

[24] Řekové je nazývali *planétes asteres* (toulající se hvězdy) díky tomu, že při pozorování ze Země vykazovaly opravdu podivné chování: při svém kruhovém pohybu se občas zastavily a nějakou dobu se pohybovaly opačným směrem (tzv. *retrográdní pohyb*), poté opět pokračovaly ve své dráze. Přesnější pozorování ukázala, že planety při svém pohybu opisují různě veliké smyčky. Popis těchto pohybů bylo možno uspokojivě modelovat složením rovnoměrných kruhových pohybů. Těch však se stále přesnějšími pozorováními přibývalo; právě těmito korekcemi nabyl tento model takové složitosti, že astronomové začali hledat uspokojivější vysvětlení. Postupem času se ukázalo, že Koperníkův heliocentrický přístup a Keplerova elipsa byly dobrým východiskem z krize středověké astronomie.

Vzhledem k této jednoznačné korespondenci můžeme Hipparchovy výpočty pomocí délek tětiv snadno přeformulovat do moderní podoby pomocí dnešní funkce sinus. Celý výpočet uvedeme ve zjednodušené a modernizované podobě, přičemž budeme používat dnešní symboliku, aby se v komplikovaných antických způsobech zápisu neztratila přímá a jednoduchá aplikace sinu. V průběhu výpočtu také uvidíme, proč začala indická a arabská astronomie později místo délky tětivy používat její polovinu, což vedlo přímo k zavedení dnešního sinu (a ostatních goniometrických funkcí).

Celou dráhu Slunce v průběhu roku Hipparchos rozdělil mezníky jednotlivých ročních období: jarní a podzimní rovnodennost (JR a PR), letní a zimní slunovrat (LS a ZS). Tuto dráhu budeme považovat za kružnici o poloměru 60 (dědictví babylónské astronomie). Cílem je najít délky úseček AK a LF, čímž získáme polohu Země vůči středu excentru.



Přepočítáme-li délku trvání jara (94,5 dne, tj. 94,5 dílů z 365) na stupně, obdržíme $94{,}5$ dne $\sim \widehat{AF} \sim 93°9'$, pro léto potom $92{,}5$ dne $\sim \widehat{FH} \sim 91°11'$.

Celkem má tedy úhel odpovídající oblouku $\widehat{AFH}$ od jarní po podzimní rovnodennost velikost $\widehat{AFH} \sim 184°20'$, přímý úhel tak přesahuje o $4°20'$, čemuž odpovídá součet délek oblouků $\widehat{AB}$ a $\widehat{GH}$. Oba tyto oblouky mají stejnou délku, a tak můžeme psát

$$\widehat{AB} + \widehat{GH} = 2\widehat{AB} = \widehat{AC} \sim 4°20'\,.$$

Hledanou délku úsečky AK získáme jako polovinu délky tětivy AC, kterou dnes počítáme přímo pomocí funkce sinus:

$$|AK| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot \mathsf{crd}\,4°20' = 60 \cdot \mathsf{sin}\,2°10' \approx 2\frac{16}{60}\,.$$

Ve výsledcích zachováváme šedesátiny, které jsou odrazem šedesátkové soustavy, v níž Hipparchos počítal.

Podobně získáme délku úsečky LF. Oblouk $\widehat{AF}$ (délka jara) odpovídá úhlu $93°9'$, přesahuje tedy pravý úhel o $3°9'$, což odpovídá součtu délek oblouků $\widehat{AB}$ a $\widehat{EF}$. Protože $\widehat{AB} \sim 2°10'$, dostáváme $\widehat{EF} \sim 59'$. Odtud již snadno dopočítáme délku úsečky LF:

$$2 \cdot |LF| = 60 \cdot \mathsf{crd}\,(2 \cdot 59') = 60 \cdot 2 \cdot \mathsf{sin}\,59' \approx 2\frac{4}{60}\,,$$

neboli $|LF| = 1\frac{2}{60}$.

Výpočet excentricity e (tedy vzdálenosti středu excentru od Země) je díky kolmosti os v Hipparchově modelu přímou aplikací Pýthagorovy věty:

$$e^2 = |AK|^2 + |LF|^2 = \left(2\frac{16}{60}\right)^2 + \left(1\frac{2}{60}\right)^2 \approx 6\frac{12}{60}\,.$$

Po odmocnění odtud dostaneme přibližnou hodnotu $e \approx 2 + \frac{29{,}5}{60}$, po zaokrouhlení $e \approx 2\frac{30}{60} = \frac{60}{24}$, což představuje $\frac{1}{24}$ poloměru excentru (poloměr excentru zvolen 60).

Získali jsme tak všechny parametry modelu pohybu Slunce, který stál přímo u zrodu předchůdce dnešní goniometrie.

Část III
Goniometrie v 16. až 18. století

koncem 16. století se goniometrie mění od základů
François Viète a mnoho dalších – postupný vznik algebry
výpočty se mechanizují, ztrácejí svou náročnost

11 François Viète

právo, politika; matematice se věnoval ve volném čase
Viète sám odvodil mnoho goniometrických vztahů
rozluštil kód
In artem analyticam isagoge – nejznámější, 1591, nejranější dílo o symbolické algebře, zavádí značení prakticky stejné, jako máme dnes
známé veličiny – souhlásky neznámé veličiny – samohlásky (a, e, …)
a, b, c pro známé a x, y, z pro neznámé – zavedl Descartes 1637
Viète zde také podává základní pravidla práce s rovnicemi
byl ještě trošku konzervativní, u svých rovnic zachovává konzistenci dimenzí
M in A aequatur B quadratus místo $ma = b$ bere $ma = b^2$
používal + a –, ale = psal slovně

co se goniometrie týče, Viète napsal 1571 *Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus*
první systematické pojednání v západním světě o řešení rovinných a sférických trojúhelníků
užívá při tom všech 6 goniometrických funkcí
odvozuje zde také např.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

odtud mohl Napier vzít myšlenku logaritmů

11.1 Řešení rovnic vyšších stupňů

Viète vyřešil pro Jindřicha IV. rovnici 45. stupně, když nizozemský velvyslanec byl skeptický ohledně francouzské matematiky
(v Belgické Lovani vyšel seznam předních matematiků a nebyl tam žádný francouzský) – rovnici přinesl a tvrdil, že francouzský matematik s řešením nepřijde

Viète za chvíli našel jedno řešení a druhého dne přinesl dalších 22
zbytek byla řešení záporná – ta nehledal
idea velmi zajímavá, ukázka na kubické rovnici

$$x^3 - 12x + 8 = 0$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha + \sin 3\alpha = 0$$

mělo by si odpovídat: x a $\sin\alpha$
zatím neodpovídá, substituce $x = k\sin\alpha$

$$k^3\sin^3\alpha - 12k\sin\alpha + 8 = 0$$

vynásobme konstantou c:

$$ck^3\sin^3\alpha - 12ck\sin\alpha + 8c = 0$$

porovnáním s

$$4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha + \sin 3\alpha = 0$$

dostáváme soustavu

$$ck^3 = 4 \qquad 12ck = 3 \qquad 8c = \sin 3\alpha$$

Odtud obdržíme vydělením první rovnice druhou $\frac{k^2}{12} = \frac{4}{3}$, tj. $k = 4$. Z druhé rovnice pak $c = \frac{1}{4k} = \frac{1}{16}$. Z poslední rovnice plyne

$$\sin 3\alpha = 8c = \frac{1}{2},$$

řešení jsou tedy

$$3\alpha = 30^\circ + n\cdot 360^\circ,\ \text{tj. } \alpha = 10^\circ + n\cdot 120^\circ, \quad \text{a} \quad 3\alpha = 150^\circ + n\cdot 360^\circ,\ \text{tj. } \alpha = 50^\circ + n\cdot 120^\circ.$$

Dosazením do substituce $x = k\sin\alpha$ pak dostáváme všechny kořeny:

$$x_1 = 4\sin 10^\circ = 0,694\,592\,710\ldots, \qquad x_2 = 4\sin 130^\circ = 3,064\,177\,772\ldots,$$

$$x_3 = 4\sin 250^\circ = -3,758\,770\,483\ldots$$

Tento postup funguje pouze pro rovnice, které mají tři reálné kořeny, tj. rovnice tvaru

$$x^3 + px + q = 0,$$

kde

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$$

(tzv. casus irreducibilis). Kořeny sice lze vypočíst pomocí Cardanových vzorců, ale $\sqrt{D}$ způsobí pro záporná D nepříjemné výpočty v oboru komplexních čísel, přestože jsou všechny tři kořeny reálné.

11.2 Rozvoj π

Viète také zavedl do goniometrie nekonečné procesy, např. jeho nekonečný součin z roku 1593:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Tento první nekonečný proces napsaný jako matematická formule Viète odvodil geometricky, využil přitom rovnosti $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{8} + \cdots$.

Jednodušší je odvození pomocí opakovaného užití vzorce pro $\sin 2\alpha$:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} = 8\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} = \dots,$$

tj.

$$\sin x = 2^n \sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2},$$

odkud po úpravě

$$\sin x = x \cdot \frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \cdot \cos\frac{x}{2^n}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}$$

a po limitním přechodu dostáváme

$$\sin x = x \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \cos\frac{x}{2^n}.$$

Výhodný tvar:

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdot\dots$$

Volbou $x = \frac{\pi}{2}$ dostáváme

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\dots$$

Jelikož $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \frac{\sqrt{2+2\cos x}}{2}$, vznikne dosazením hledaný vztah

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Tato formule poměrně rychle konverguje:

1	2,82...	16	3,141592653|28...
2	3,06...	17	3,1415926535|14...
3	3,1|21...	18	3,1415926535|70...
4	3,1|36...	19	3,14159265358|50...
5	3,14|03...	20	3,14159265358|86...
6	3,141|27...	21	3,141592653589|49...
7	3,1415|13...	22	3,1415926535897|19...
8	3,1415|72...	23	3,1415926535897|74...
9	3,1415|87...	24	3,1415926535897|88...
10	3,14159|14...	25	3,14159265358979|20...
11	3,141592|34...	26	3,14159265358979|29...
12	3,141592|57...	27	3,141592653589793|16...
13	3,1415926|34...	28	3,1415926535897932|20...
14	3,1415926|48...	29	3,14159265358979323|39...
15	3,14159265|23...	30	3,14159265358979323|73...

11.3 Tangentová věta

F. Viète jako první zformuloval kolem roku 1580 tangentovou větu:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Užití při řešení trojúhelníka podle věty sus:

pro daný úhel γ chceme najít zbylé dva úhly α a β

v tabulkách najdeme $\frac{\alpha+\beta}{2}$ a $\frac{\alpha-\beta}{2}$, odtud pak dopočteme α a β

dnes bychom vypočetli c pomocí kosinové věty $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, a poté pomocí sinové věty:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \sin \gamma \quad \text{a} \quad \sin \beta = \frac{b}{c} \sin \gamma$$

Funkce tangens má pěkné vlastnosti, např.:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma,$$

kde α, β a γ jsou vnitřní úhly ostroúhlého trojúhelníku.

12 John Wallis

13 Abraham de Moivre

14 Leonhard Euler

zavedl jazyk funkcí, ten používáme dodnes

ve 30. letech 18. stol. objevil, že goniometrické funkce hrají důležitou roli při řešení diferenciálních rovnic popisujících harmonické vlnění

14.1 Wallisův součin

Euler zacházel s řadou jako s polynomem – polynom lze psát jako součin kořenových činitelů, např.:

$$\sin x = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \cdot \ldots$$

Položme v této rovnosti $x = \frac{\pi}{2}$:

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 16}\right) \cdot \ldots$$

Po úpravě:

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{35}{36} \cdot \ldots = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdot \ldots,$$

odkud dostáváme Wallisův součin

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots}$$

Tento nekonečný součin objevil jako první John Wallis roku 1655 pomocí interpolace. Konvergence je velmi pomalá, hodnotu π s přesností na dvě platná desetinná místa dává až součin 493 činitelů tvaru $\frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$.

Lepší rozvoj dostaneme, když položíme $x = \dfrac{\pi}{6}$:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 18 \cdot \ldots}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot \ldots}$$

Přesnosti na dvě platná desetinná místa dosáhneme už součinem 55 činitelů tvaru $\frac{6n \cdot 6n}{(6n-1)\cdot(6n+1)}$. Přesto však ani tento rozvoj není vhodný pro výpočet π, jak vyplývá z následující tabulky.

platných míst	potřebný počet činitelů – rozvoj $\frac{\pi}{2}$	potřebný počet činitelů – rozvoj $\frac{\pi}{3}$
0	5	(1/2)
1	19	2
2	493	55
3	1 325	147
4	8 477	942
5	295 976	32 886
6	1 201 668	133 519
7	14 655 741	1 628 416

Euler odvodil v roce 1734 rozvoje

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots,$$

U „liché řady“ získáme dvě platná desetinná místa čísla π až součtem 200 členů.

Odvození: srovnáme s Taylorovým rozvojem funkce sinus:

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \cdot \ldots$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

Koeficient u x^2:

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \cdots,$$

odkud okamžitě plyne součet řady pro $\frac{\pi^2}{6}$.

Ve svém článku E20 – *De summatione innumerabilium progressionum* postupuje pomocí aproximace jistého integrálu

Petrohradské akademii předložil 1731

vydáno: Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5, 1738, pp. 91-105

E736 – *De summatione serierum in hac forma contentarum* $a/1+a^2/4+a^3/9+a^4/16+a^5/25+a^6/36+$ *etc.*

Memoires de l'academie des sciences de St.-Petersbourg 3, 1811, pp. 26-42 předloženo už 1779

zde podává několik důkazů, velmi pěkné počítání s logaritmy, mocninnými řadami a integrály

Odvození, které jsme si ukázali, vychází z článku

E63 – *Demonstration de la somme de cette suite* $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \ldots$

Journ. lit. d'Allemange, de Suisse et du Nord, 2:1, 1743, p. 115–127.

14.2 Souvislost funkcí sin a cos s exponenciálou

Euler dále objevil překvapující souvislost mezi funkcemi sin a cos a exponenciální funkcí

$$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

publikoval v Introductio in analysin infinitorum (1748)

toto dílo a autorita Eulera přispěly značnou měrou k usazení komplexních čísel v goniometrii

vztah

$$\mathrm{i}\sin\varphi = \log(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$$

uvedl už 1714 Roger Cotes (1682 – 1716) posmrtně ještě vydáno v souborném díle *Harmonia mensurarum* (1722) píše hodně slovně pracoval na 2. vydání Newtonových *Principií*, ale předčasně zemřel (v 34 letech) tyto objevy přivedly goniometrické funkce do analýzy a stály také u zrodu hyperbolických funkcí

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

Goniometrické funkce se zařadily mezi základní elementární funkce a staly se základním nástrojem pro popis periodických jevů.

Literatura

[AS] ABRAMOWITZ M., STEGUN I. (ed.) *Handbook of Mathematical Functions. With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Dover Publications, New York, 1972.

[Al] ALEKSANDROVA N. V. *Matěmatičeskije těrminy.* Vyssaja škola, Moskva, 1978.

[Be] BEČVÁŘ J., BEČVÁŘOVÁ M., VYMAZALOVÁ H. *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie.* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 23, Prometheus, Praha, 2003.

[Br] BRUMMELEN G. *The Mathematics of the Heavens and the Earth.* PUP, Princeton, 2009.

[Ca] CAJORI F. *A History of Mathematical Notations.* (1. a 2. díl) Dover, New York, 1993.

[Ch] CHABERT J.-L. (ed.) *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip.* Springer–Verlag, Berlin, 1999.

[Ev] EVANS J. *The History and Practice of Ancient Astronomy*, OUP, Oxford, 1998.

[Gr] GRYNAEUS S. (ed.) *Kl. Ptolemaiú Megalés syntaxeós bibl. IΓ.* Editio princeps, Pars I, Basilej, 1538.

[He] HEIBERG J. L. (ed.) *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia volumen I., Syntaxis mathematica.* Pars I, Libros I – VI. Teubner, Lipsko, 1898.

[Ju] JUŠKEVIČ A. P. *Dějiny matematiky ve středověku.* Academia, Praha, 1977.

[Ko] KOPERNIK M. *Obehy nebeských sfér.* Veda, Bratislava, 1973.

[Pr] PRESS W. H. *Numerical Recipes in Pascal. The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[Šp] ŠPELDA D. *Astronomie v antice*, Montanex, Ostrava, 2006.

[Št] ŠTEFL V. *Klaudios Ptolemaios.* Edice Velké postavy vědeckého nebe, svazek č. 15, Prometheus, Praha, 2005.

[T1] TOOMER G. J. *Ptolemy's Almagest.* PUP, Princeton, 1998.

[T2] TOOMER G. J. *The Chord Table of Hipparchus and Early History of Greek Trigonometry.* Centaurus **18**(1973), 6–28.

[Vo] VOLDER J. *The CORDIC Trigonometric Computing Technique.* IRE Transactions on Electronic Computers, **EC-8**(1959), 330–334.

[Vy] VYMAZALOVÁ H. *Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty.* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 31, Český egyptologický ústav, Praha, 2006.

[Wa] WALTHER J. *A Unified Algorithm for Elementary Functions.* Spring Joint Computer Conference Proceedings, **38**(1971), 379–385.