

# Geometrie I

SBÍRKA ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ

Jana Hromadová, Zdeněk Halas

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Sazba textu: Jiří Frantál

Sbírka vznikla v rámci projektu:

*Podpora zkvalitnění přípravy učitelů matematiky, fyziky a informatiky na MFF UK, 2020*

# 1 Afinní prostor

**Úloha 1.1** Určete, zda  $A_n = (A, V_n, f)$  tvoří afinní prostor, jestliže

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{R}^2, \\ V_n &= \mathbb{R}^2, \\ \forall X, Y \in A : f(X, Y) &= Y - X = (y_1 - x_1, y_2 - x_2) = \vec{u} \in V. \end{aligned}$$

**Úloha 1.2** Určete, zda  $A_n = (A, V_n, f)$  tvoří afinní prostor, jestliže

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{R}^n, \\ V_n &= \mathbb{R}^n, \\ \forall X, Y \in A : f(X, Y) &= Y - X = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n) = \vec{u} \in V. \end{aligned}$$

**Úloha 1.3** Určete, zda  $A_n = (A, V_n, f)$  tvoří afinní prostor, jestliže

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{R}^3, \\ V_n &= \mathbb{R}^3, \\ \forall X, Y \in A : f(X, Y) &= Y - X = (y_2 - x_1, y_3 - x_2, y_1 - x_3) = \vec{u} \in V. \end{aligned}$$

**Úloha 1.4** Určete, zda  $A_n = (A, V_n, f)$  tvoří afinní prostor, jestliže

$$\begin{aligned} A &= \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; x_2 > 0\}, \\ V_n &= \mathbb{R}^2, \\ \forall X, Y \in A : f(X, Y) &= \left(x_1 - y_1 + \log \frac{x_2}{y_2}, x_1 - y_1 - \log \frac{x_2}{y_2}\right) = \vec{u} \in V. \end{aligned}$$

**Úloha 1.5** Určete, zda  $A_n = (A, V_n, f)$  tvoří afinní prostor, jestliže

$$\begin{aligned} A &= \left\{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2; \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{16} = 1\right\}, \\ V_n &= \mathbb{R}, \\ \forall X, Y \in A : f(X, Y) &= x_2 - y_2 = \vec{u} \in V. \end{aligned}$$

*Řešení.*

1.1 Ověříme 1. vlastnost z definice afinního prostoru ( $f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z)$ ).

$$X, Y, Z \in A$$

$$X = [x_1, x_2]$$

$$Y = [y_1, y_2]$$

$$Z = [z_1, z_2]$$

$$f(X, Y) + f(Y, Z) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2) + (z_1 - y_1, z_2 - y_2) = (z_1 - x_1, z_2 - x_2) = f(X, Z)$$

Ověříme 2. vlastnost z definice afinního prostoru (je-li  $P \in A$ ,  $P = [p_1, p_2]$ , pak  $\forall X \in A$  lze jednoznačně přiřadit vektor  $\vec{u} = \overrightarrow{PX}$ ;  $\forall \vec{u} \in V \exists! X$  tak, že  $\vec{u} = \overrightarrow{PX}$ ).

$$\vec{u} = \overrightarrow{PX} = (x_1 - p_1, x_2 - p_2) \longrightarrow \underbrace{\begin{matrix} u_1 = x_1 - p_1 & x_1 = u_1 + p_1 \\ u_2 = x_2 - p_2 & x_2 = u_2 + p_2 \end{matrix}}_{\text{jednoznačné vyjádření}}$$

Ke každému vektoru  $\vec{u} \in V$  tedy existuje právě jeden bod  $X \in A$  tak, že  $\vec{u} = f(P, X)$ , zobrazení  $f$  má tedy i 2. vlastnost z definice afinního prostoru.

Trojice  $(A, V_n, f)$  je tedy afinní prostor.

1.2 Postup stejný jako v příkladu 1.

1.3  $A$  je neprázdná množina,  $V$  vektorový prostor. Ověříme 1. vlastnost z definice afinního prostoru ( $f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z)$ ).

$$\begin{aligned} L &: (y_2 - x_1, y_3 - x_2, y_1 - x_3) + (z_2 - y_1, z_3 - y_2, z_1 - y_3) \\ &= (z_2 - x_1 + y_2 - y_1, z_3 - x_2 + y_3 - y_2, z_1 - x_3 + y_1 - y_3) \\ P &: (z_2 - x_1, z_3 - x_2, z_1 - x_3) \end{aligned}$$

$L \neq P \implies$  nejedná se o afinní prostor.

1.4 Ověříme 1. vlastnost z definice afinního prostoru. Využijeme přitom vlastnost logaritmu

$$\log \frac{x_2}{y_2} + \log \frac{y_2}{z_2} = \log \frac{x_2}{z_2}.$$

$$\begin{aligned} f(X, Y) + f(Y, Z) &= \left( x_1 - y_1 + \log \frac{x_2}{y_2} + y_1 - z_1 + \log \frac{y_2}{z_2}, x_1 - y_1 - \log \frac{x_2}{y_2} + y_1 - z_1 - \log \frac{y_2}{z_2} \right) \\ &= \left( x_1 - z_1 + \log \frac{x_2}{z_2}, x_1 - z_1 - \log \frac{x_2}{z_2} \right) = f(X, Z) \end{aligned}$$

Ověříme 2. vlastnost z definice afinního prostoru.

Uvažujme  $P = [p_1, p_2]$ , kde  $p_2 > 0$ .

$$f(P, X) = \left( p_1 - x_1 + \log \frac{p_2}{x_2}, p_1 - x_1 - \log \frac{p_2}{x_2} \right)$$

Zvolme  $\vec{u} \in V$ ,  $\vec{u} = (u_1, u_2)$ , a hledejme  $X \in A$  tak, aby platilo  $f(P, X) = \vec{u}$ .

$$\begin{aligned} u_1 &= p_1 - x_1 + \log \frac{p_2}{x_2} \\ u_2 &= p_1 - x_1 - \log \frac{p_2}{x_2} \end{aligned}$$

Sečtením, resp. odečtením rovnic získáme

$$\begin{aligned} 2p_1 - 2x_1 &= u_1 + u_2, \\ 2 \log \frac{p_2}{x_2} &= u_1 - u_2. \end{aligned}$$

Odtud ekvivalentními úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2p_1 - u_1 - u_2}{2}, \\ x_2 &= p_2 \cdot 10^{\frac{u_2 - u_1}{2}}. \end{aligned}$$

$\implies \exists! X \implies$  zobrazení  $f$  splňuje i 2. vlastnost.

Trojice  $(A, V_n, f)$  tedy tvoří dvojrozměrný afinní prostor.

- 1.5 Obecně platí, že dimenze množiny bodů je rovna dimenzi vektorového prostoru. Body  $A$  tvoří křivku, tj. jednorozměrný objekt.  $V = \mathbb{R}$  je jednorozměrný vektorový prostor. Ověříme 1. vlastnost z definice afinního prostoru.

$$X, Y, Z \in A$$

$$X = [x_1, x_2]$$

$$Y = [y_1, y_2]$$

$$Z = [z_1, z_2]$$

$$f(X, Y) + f(Y, Z) = x_2 - y_2 + y_2 - z_2 = x_2 - z_2 = f(X, Z)$$

Ověříme 2. vlastnost z definice afinního prostoru.

$$\vec{u} = \vec{PX}$$

$$P = [p_1, p_2]$$

$$X = [x_1, x_2]$$

$$f(P, X) = p_2 - x_2$$

Vektor  $\vec{u}$  je jednodimenzionální.

$$\vec{u} = (u)$$

$$u = p_2 - x_2$$

$$x_2 = p_2 - u$$

$$x_1 = \pm \sqrt{\frac{114 - 9x_2^2}{16}}$$

$\implies$  vyjádření není jednoznačné, dvěma různým bodům přiřadí stejný vektor.

Trojice  $(A, V_n, f)$  netvoří afinní prostor.

□

## 2 Lineární soustava souřadnic

**Úloha 2.1** V afinním prostoru  $A_2$  je dán trojúhelník  $ABC$ . Zvolte pomocí vrcholů  $A, B, C$  lineární soustavu souřadnic, určete souřadnice bodů  $A, B, C, S_{BC}, T$  (těžiště).

**Úloha 2.2** V afinním prostoru  $A_2$  je dán rovnoběžník  $ABCD$ . Určete souřadnice jeho vrcholů ve zvolené lineární soustavě souřadnic.

**Úloha 2.3** V afinním prostoru  $A_3$  je dána krychle  $ABCDEFGH$ . Určete souřadnice jejích vrcholů vzhledem k lineárním soustavám souřadnic určených repéry

a)  $\mathcal{R} = \langle A; B - A, D - A, E - A \rangle,$

b)  $\mathcal{S} = \langle F; D - F, G - F, H - F \rangle,$

c)  $\mathcal{T} = \langle D; E - D, H - D, G - D \rangle.$

**Úloha 2.4** V afinním prostoru  $A_3$  je dán rovnoběžnostěn  $ABCDEFGH$ . Určete souřadnice jeho vrcholů vzhledem k lineárním soustavám souřadnic určených repéry

- a)  $\mathcal{R} = \langle A; B - A, D - A, E - A \rangle$ ,  
 b)  $\mathcal{S} = \langle F; D - F, G - F, H - F \rangle$ ,  
 c)  $\mathcal{T} = \langle D; E - D, H - D, G - D \rangle$ .

**Úloha 2.5** Je dán afinní prostor  $A_2 = (A, V, f)$ , kde

$$A = \mathbb{R}^2,$$

$$V = \mathbb{R}^2,$$

$$\forall X, Y \in A : f(X, Y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2) = \vec{u} \in V.$$

Určete souřadnice bodů  $B = [2, 3]$ ,  $C = [-3, 5]$ ,  $D = [0, -1]$ ,  $E = [0, 0]$  vzhledem k lineárním soustavám souřadnic určených repéry

- a)  $\mathcal{R} = \langle [1, 1]; (1, 2), (0, 1) \rangle$ ,  
 b)  $\mathcal{S} = \langle [2, -1]; (2, 2), (1, -1) \rangle$ .

**Úloha 2.6** Určete souřadnice bodů  $K = A + (3\vec{u} + \vec{v})$ ,  $L = A + (\vec{u} + 2\vec{v}) \in A_4$  vzhledem k lineární soustavě souřadnic určené repérem  $\mathcal{R} = \langle P; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \rangle$ , kde

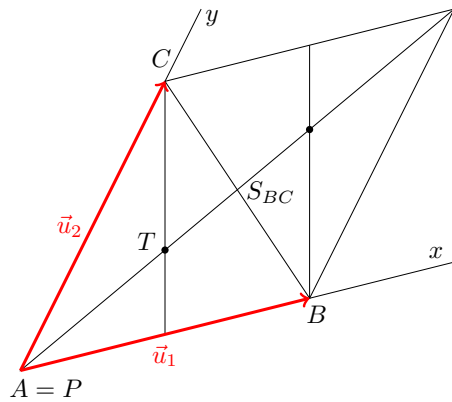
$$A = P + (\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3),$$

$$\vec{u} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_3,$$

$$\vec{v} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_4.$$

*Řešení.*

2.1



$$\mathcal{R} = \langle A; B - A, C - A \rangle$$

$$A = [0, 0] \text{ počátek}$$

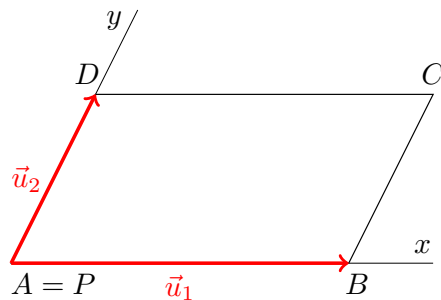
$$B - A = b_1(B - A) + b_2(C - A)$$

$$B = A + b_1(B - A) + b_2(C - A)$$

$$B = [b_1, b_2]$$

$$A [0, 0] \quad B [1, 0] \quad C [0, 1] \quad S_{BC} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad T \begin{bmatrix} \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

2.2



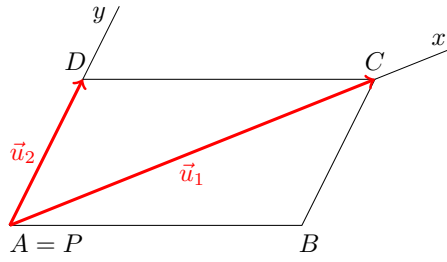
$$\mathcal{R} = \langle A; B - A, D - A \rangle$$

$$A = [0, 0] = P$$

$$B = [1, 0]$$

$$C = [1, 1]$$

$$D = [0, 1]$$



$$\mathcal{R} = \langle A; C - A, D - A \rangle$$

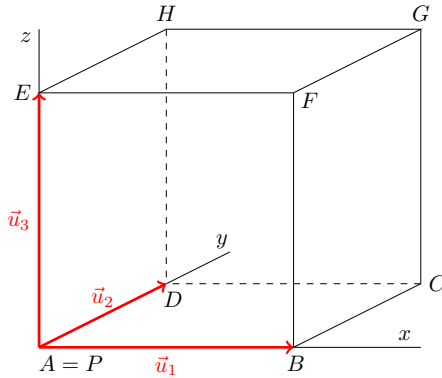
$$A = [0, 0] = P$$

$$B = [1, 0]$$

$$C = [0, 1]$$

$$D = [1, -1]$$

2.3 a)



$$B - A = b_1(B - A) + b_2(D - A) + b_3(E - A)$$

$$B = A + b_1(B - A) + b_2(D - A) + b_3(E - A)$$

$$B = [b_1, b_2, b_3]$$

$$A = [0, 0, 0] = P$$

$$E = [0, 0, 1]$$

$$B = [1, 0, 0]$$

$$F = [1, 0, 1]$$

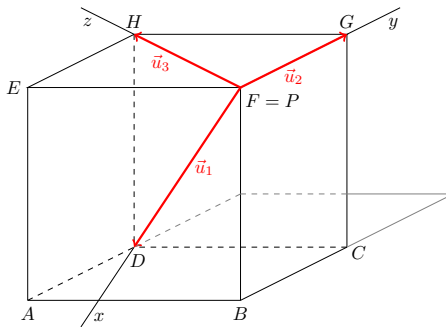
$$C = [1, 1, 0]$$

$$G = [1, 1, 1]$$

$$D = [0, 1, 0]$$

$$H = [0, 1, 1]$$

b)



$$A = [1, -1, 0]$$

$$E = [0, -1, 1]$$

$$B = [1, 0, -1]$$

$$F = [0, 0, 0] = P$$

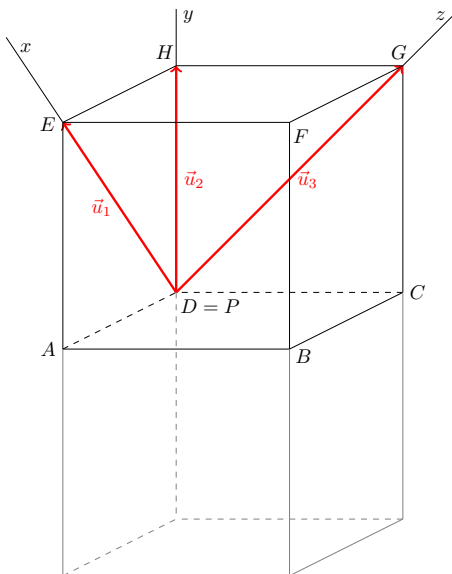
$$C = [1, 1, -1]$$

$$G = [0, 1, 0]$$

$$D = [1, 0, 0]$$

$$H = [0, 0, 1]$$

c)



$$A = [1, -1, 0]$$

$$E = [1, 0, 0]$$

$$B = [1, -2, 1]$$

$$F = [1, -1, 1]$$

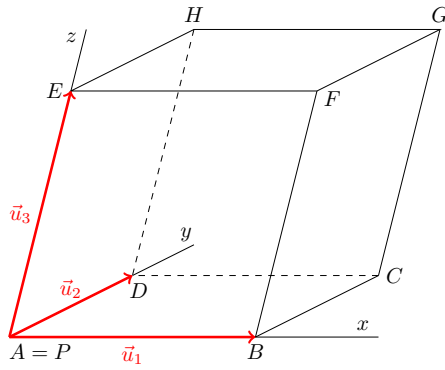
$$C = [0, -1, 1]$$

$$G = [0, 0, 1]$$

$$D = [0, 0, 0] = P$$

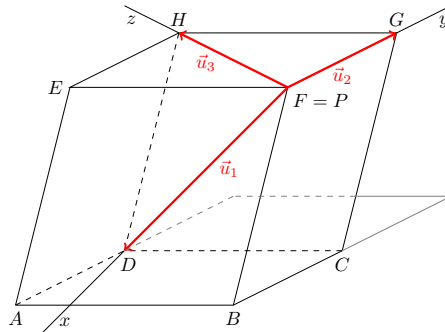
$$H = [0, 1, 0]$$

2.4 a)



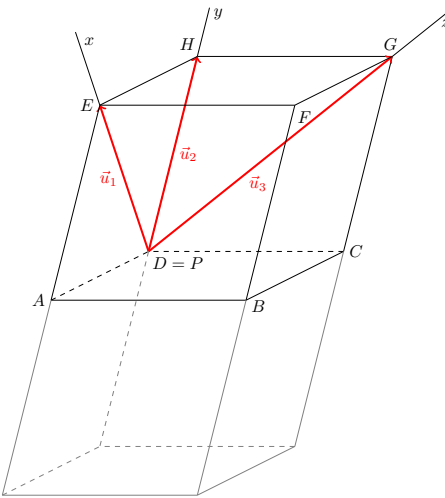
$A = [0, 0, 0] = P$	$E = [0, 0, 1]$
$B = [1, 0, 0]$	$F = [1, 0, 1]$
$C = [1, 1, 0]$	$G = [1, 1, 1]$
$D = [0, 1, 0]$	$H = [0, 1, 1]$

b)



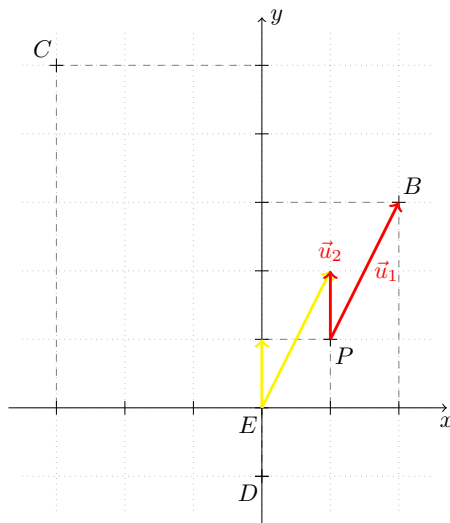
$A = [1, -1, 0]$	$E = [0, -1, 1]$
$B = [1, 0, -1]$	$F = [0, 0, 0] = P$
$C = [1, 1, -1]$	$G = [0, 1, 0]$
$D = [1, 0, 0]$	$H = [0, 0, 1]$

c)



$A = [1, -1, 0]$	$E = [1, 0, 0]$
$B = [1, -2, 1]$	$F = [1, -1, 1]$
$C = [0, -1, 1]$	$G = [0, 0, 1]$
$D = [0, 0, 0] = P$	$H = [0, 1, 0]$

2.5 a)



$$B = P + b_1 \cdot \vec{u}_1 + b_2 \cdot \vec{u}_2$$

$$[2, 3] = [1, 1] + b_1 (1, 2) + b_2 (0, 1)$$

$$2 = 1 + b_1$$

$$3 = 1 + 2b_1 + b_2$$

$$b_1 = 1$$

$$3 = 1 + 2 + b_2$$

$$b_2 = 0$$

$$\underline{\underline{B_{\mathcal{R}} = [1, 0]}}$$

$$C = P + c_1 \cdot \vec{u}_1 + c_2 \cdot \vec{u}_2$$

$$[-3, 5] = [1, 1] + c_1 (1, 2) + c_2 (0, 1)$$

$$-3 = 1 + b_1$$

$$5 = 1 + 2b_1 + b_2$$

$$c_1 = -4$$

$$5 = 1 - 8 + c_2$$

$$c_2 = 12$$

$$\underline{\underline{C_{\mathcal{R}} = [-4, 12]}}$$

$$D = P + d_1 \cdot \vec{u}_1 + d_2 \cdot \vec{u}_2$$

$$[0, -1] = [1, 1] + d_1 (1, 2) + d_2 (0, 1)$$

$$0 = 1 + b_1$$

$$-1 = 1 + 2b_1 + b_2$$

$$d_1 = -1$$

$$-1 = 1 - 2 + d_2$$

$$d_2 = 0$$

$$\underline{\underline{D_{\mathcal{R}} = [-1, 0]}}$$

$$E = P + e_1 \cdot \vec{u}_1 + e_2 \cdot \vec{u}_2$$

$$[0, 0] = [1, 1] + e_1 (1, 2) + e_2 (0, 1)$$

$$0 = 1 + b_1$$

$$0 = 1 + 2b_1 + b_2$$

$$e_1 = -1$$

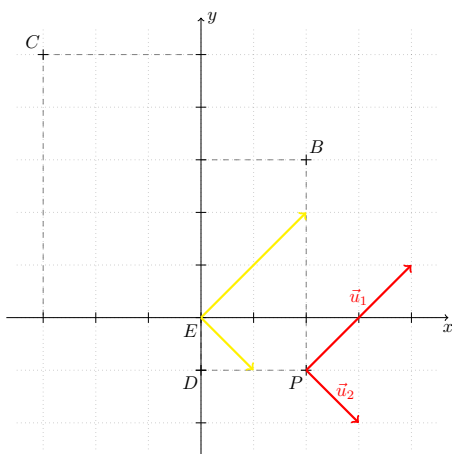
$$0 = 1 - 2 + d_2$$

$$e_2 = 1$$

$$\underline{\underline{E_{\mathcal{R}} = [-1, 1]}}$$



b)



$$B = P + b_1 \cdot \vec{u}_1 + b_2 \cdot \vec{u}_2$$

$$[2, 3] = [2, -1] + b_1(2, 2) + b_2(1, -1)$$

$$2 = 2 + 2b_1 + b_2$$

$$3 = -1 + 2b_1 - b_2$$

$$5 = 1 + 4b_1$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = -2$$

$$\underline{\underline{B_S = [1, -2]}}$$

$$\underline{\underline{C_S = \left[ \frac{1}{4}, -\frac{11}{2} \right]}}$$

$$\underline{\underline{D_S = \left[ -\frac{1}{2}, -1 \right]}}$$

$$\underline{\underline{E_S = \left[ -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2} \right]}}$$

2.6

$$K = P + (\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3) + 3(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3) + (\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_4)$$

$$= P + 5\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3 + \vec{e}_4$$

$$\implies K = [5, 6, -7, 1]$$

$$L = P + (\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3) + (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3) + 2(\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_4)$$

$$= P + 4\vec{e}_1 + 9\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$$

$$\implies L = [4, 9, -3, 2]$$

□

### 3 Transformace lineární soustavy souřadnic

**Úloha 3.1** V afinním prostoru  $A_2$  jsou dány body  $P = [-1, 3]$ ,  $P' = [2, -3]$  a vektory  $\vec{u} = (1, 4)$ ,  $\vec{v} = (5, 2)$ ,  $\vec{u}' = (6, 6)$ ,  $\vec{v}' = (-3, 6)$ . Napište transformaci lineární soustavy souřadnic  $\mathcal{L}$  určené repérem  $\mathcal{R} = \langle P; \vec{u}, \vec{v} \rangle$  na lineární soustavu souřadnic  $\mathcal{L}'$  určenou repérem  $\mathcal{S} = \langle P'; \vec{u}', \vec{v}' \rangle$ .

**Úloha 3.2** V afinním prostoru  $A_2$  jsou dány dvě lineární soustavy souřadnic  $\mathcal{L}$  a  $\mathcal{L}'$  určené repéry  $\mathcal{R} = \langle P; \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$  a  $\mathcal{S} = \langle Q; \vec{d}_1, \vec{d}_2 \rangle$ . Dále jsou dány souřadnice bodu  $P_S = [2, -1]$  a vektorů  $\langle \vec{e}_1 \rangle_{B'}$  = (1, -3),  $\langle \vec{e}_2 \rangle_{B'}$  = (-1, 1) vzhledem k soustavě  $\mathcal{L}'$ .

- Napište transformaci lineární soustavy souřadnic  $\mathcal{L}$  určené repérem  $\mathcal{R}$  na lineární soustavu souřadnic  $\mathcal{L}'$  určenou repérem  $\mathcal{S}$ .
- Určete souřadnice bodu  $D$  vzhledem k soustavě  $\mathcal{L}'$ , je-li  $D_{\mathcal{R}} = [0, 3]$ .
- Napište analytické vyjádření přímky  $p$  vzhledem k soustavě  $\mathcal{L}$ , je-li dáno její analytické vyjádření vzhledem k  $\mathcal{L}'$ , tj.  $p: 2x' - y' + 1 = 0$ .

**Úloha 3.3** Napište inverzní transformaci k předchozí úloze, tj. transformaci lineární soustavy souřadnic  $\mathcal{L}'$  určené repérem  $\mathcal{S}$  na lineární soustavu souřadnic  $\mathcal{L}$  určenou repérem  $\mathcal{R}$ .

**Úloha 3.4** V afinním prostoru  $A_2$  je dána lineární soustava souřadnic  $\mathcal{L}$  určená repérem  $\mathcal{R} = \langle P; \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$ . Dále jsou dány souřadnice bodů  $Q = [5, -2]$ ,  $T = [2, 1]$  a vektorů  $\vec{u} = (-1, 2)$ ,  $\vec{v} = (2, 4)$  vzhledem k soustavě  $\mathcal{L}$ .

- Napište transformaci lineární soustavy souřadnic  $\mathcal{L}$  určené repérem  $\mathcal{R}$  na lineární soustavu souřadnic  $\mathcal{L}'$  určenou repérem  $\mathcal{S} = \langle Q; \vec{u}, \vec{v} \rangle$ .
- Určete souřadnice bodu  $T$  vzhledem k soustavě  $\mathcal{L}'$ .

**Úloha 3.5** V afinním prostoru  $A_2$  je dán rovnoběžník  $ABCD$  se středem  $O$  a lineární soustava souřadnic  $\mathcal{L}$  určená repérem  $\mathcal{R} = \langle A; B - A, D - A \rangle$ .

- Určete souřadnice bodů  $A, B, C, D, O$  vzhledem k soustavě  $\mathcal{L}$ .
- Určete souřadnice bodů  $A, B, C, D, O$  vzhledem k soustavě  $\mathcal{L}'$ , která je dána repérem  $\mathcal{S} = \langle O; D - O, C - O \rangle$ .
- Napište transformaci lineární soustavy souřadnic  $\mathcal{L}$  určené repérem  $\mathcal{R}$  na lineární soustavu souřadnic  $\mathcal{L}'$  určenou repérem  $\mathcal{S}$ .
- Napište transformaci lineární soustavy souřadnic  $\mathcal{L}'$  určené repérem  $\mathcal{S}$  na lineární soustavu souřadnic  $\mathcal{L}$  určenou repérem  $\mathcal{R}$ .

**Úloha 3.6** V afinním prostoru  $A_3$  je dán rovnoběžnostěn  $ABCDEFGH$  se středem  $O$  a lineární soustava souřadnic  $\mathcal{L}$  určená repérem  $\mathcal{R} = \langle A; B - A, D - A, E - A \rangle$ .

- Určete souřadnice vrcholů rovnoběžnostěnu vzhledem k soustavě  $\mathcal{L}$ .
- Určete souřadnice vrcholů rovnoběžnostěnu vzhledem k soustavě  $\mathcal{L}'$ , která je dána repérem  $\mathcal{S} = \langle C; B - C, D - C, G - C \rangle$ .
- Napište transformaci lineární soustavy souřadnic  $\mathcal{L}$  určené repérem  $\mathcal{R}$  na lineární soustavu souřadnic  $\mathcal{L}'$  určenou repérem  $\mathcal{S}$ .
- Napište transformaci lineární soustavy souřadnic  $\mathcal{L}'$  určené repérem  $\mathcal{S}$  na lineární soustavu souřadnic  $\mathcal{L}$  určenou repérem  $\mathcal{R}$ .

Řešení.

3.1

$$X_{\mathcal{S}} = A \cdot X_{\mathcal{R}} \quad \begin{array}{l} X_{\mathcal{R}} = P + x_1 \vec{u} + x_2 \vec{v} \\ X_{\mathcal{S}} = P' + x'_1 \vec{u}' + x'_2 \vec{v}' \end{array}$$

$$P = [p_1, p_2]_{\mathcal{S}}$$

$$P = P' + p_1 \vec{u}' + p_2 \vec{v}'$$

$$\left. \begin{array}{l} -1 = 2 + 6p_1 - 3p_2 \\ 3 = -3 + 6p_1 + 6p_2 \end{array} \right) / \cdot 2 \quad ) +$$

$$1 = 1 + 18p_1 \longrightarrow \underline{p_1 = 0}, \quad \text{dosadíme do (II): } 3 = -3 + 6p_2 \longrightarrow \underline{p_2 = 1}$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2)_{\mathcal{S}}$$

$$\vec{u} = u_1 \vec{u}' + u_2 \vec{v}'$$

$$\begin{array}{l} 1 = 6u_1 - 3u_2 \quad / \cdot 2 \\ 4 = 6u_1 + 6u_2 \end{array} \quad ) +$$

$$6 = 18u_1 \longrightarrow \underline{\underline{u_1 = \frac{1}{3}}}, \quad \text{dosadíme do (II): } 1 = 2 - 3u_2 \longrightarrow \underline{\underline{u_2 = \frac{1}{3}}}$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2)_{\mathcal{S}}$$

$$\vec{v} = v_1 \vec{u}' + v_2 \vec{v}'$$

$$\begin{array}{l} 5 = 6v_1 - 3v_2 \quad / \cdot 2 \\ 2 = 6v_1 + 6v_2 \end{array} \quad ) +$$

$$12 = 18v_1 \longrightarrow \underline{\underline{v_1 = \frac{2}{3}}}, \quad \text{dosadíme do (II): } 5 = 4 - 3v_2 \longrightarrow \underline{\underline{v_2 = -\frac{1}{3}}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + 0 \\ y' = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + 1 \end{array}}$$

Ověření  $P' = [2, -3]$ :

$$\text{souřadnice } P' \text{ vzhledem k } \mathcal{R}: \begin{array}{l} 2 = -1 + b_1 + 5b_2 \quad / \cdot (-4) \\ -3 = 3 + 4b_1 + 2b_2 \end{array} \quad ) +$$

$$-11 = 7 - 18b_2 \longrightarrow b_2 = 1$$

$$-8 = 4b_1 \longrightarrow b_1 = -2$$

$$P' = [-2, 1]_{\mathcal{R}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies P' \text{ je počátek v } \mathcal{S}$$

3.2 a)

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}} \quad \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S} \quad \begin{array}{l} x' = x - y + 2 \\ y' = -3x + y - 1 \end{array}$$

b)

$$D_S = ?$$

$$D_{\mathcal{R}} = [0, 3]$$

Po dosazení  $D_{\mathcal{R}}$  do transformace lineární soustavy souřadnic z a) dostaneme

$$D_S = [-1, 2].$$

c)

$$p_S : 2x' - y' + 1 = 0$$

Po dosazení za  $x'$  a  $y'$  z a) dostaneme

$$p_{\mathcal{R}} : 2(x - y + 2) - (-3x + y - 1) + 1 = 0,$$

$$5x - 3y + 6 = 0.$$

3.3

$$\begin{array}{l} x' = x - y + 2 \\ y' = -3x + y - 1 \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \begin{array}{l} 3 \cdot (I) + (II) : \\ (I) + (II) : \end{array} \begin{array}{l} 3x' + y' = -2y + 5 \\ x' + y' = -2x + 1 \end{array}$$

$$y = -\frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y' + \frac{5}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}$$

Nebo využijeme inverzní matici.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \det A = 1 - 3 = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

3.4 a) Potřebujeme určit souřadnice bodu  $P$  a vektorů  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  v nové lineární soustavě souřadnic  $\mathcal{L}'$ .

$$P = [0, 0]_{\mathcal{R}} \quad P = [p_1, p_2]_{\mathcal{S}}$$

$$P = Q + p_1 \cdot \vec{u} + p_2 \cdot \vec{v}$$

$$[0, 0] = [5, -2] + p_1(-1, 2) + p_2(2, 4)$$

$$\begin{array}{l} 0 = 5 + p_1 + 2p_2 \\ 0 = -2 + 2p_1 + 4p_2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} / \cdot 2 \\ / \cdot (-2) \end{array} \right) + \quad \left. \begin{array}{l} / \cdot (-2) \\ / \cdot (-2) \end{array} \right) +$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 = 8 + 8p_2 \longrightarrow p_2 = -1 \\ 0 = -12 + 4p_1 \longrightarrow p_1 = 3 \end{array} \right\} \underline{\underline{P = [3, -1]_{\mathcal{S}}}}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0)_{\mathcal{R}} & \vec{e}_1 &= (x_1, x_2)_{\mathcal{S}} & \vec{e}_1 &= x_1 \cdot \vec{u} + x_2 \cdot \vec{v} \\ (1, 0) &= x_1(-1, 2) + x_2(2, 4) \\ \left. \begin{aligned} 1 &= -x_1 + 2x_2 & / \cdot 2 \\ 0 &= 2x_1 + 4x_2 & / \cdot (-2) \end{aligned} \right\} + \\ \left. \begin{aligned} 2 &= 8x_2 & \longrightarrow x_2 = \frac{1}{4} \\ -2 &= 4x_1 & \longrightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \vec{e}_1 = \underline{\underline{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)_{\mathcal{S}}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 &= (0, 1)_{\mathcal{R}} & \vec{e}_2 &= (y_1, y_2)_{\mathcal{S}} & \vec{e}_2 &= y_1 \cdot \vec{u} + y_2 \cdot \vec{v} \\ (0, 1) &= y_1(-1, 2) + y_2(2, 4) \\ \left. \begin{aligned} 0 &= -y_1 + 2y_2 & / \cdot 2 \\ 1 &= 2y_1 + 4y_2 & / \cdot (-2) \end{aligned} \right\} + \\ \left. \begin{aligned} 1 &= 8y_2 & y_2 = \frac{1}{8} \\ 1 &= 4y_1 & y_1 = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \vec{e}_2 = \underline{\underline{\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)_{\mathcal{S}}}} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

b)

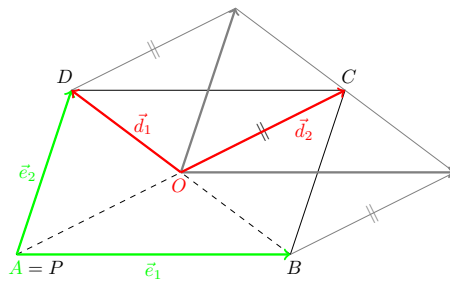
$$T = [2, 1]_{\mathcal{R}}$$

$$T = \underline{\underline{\left[\frac{9}{4}, -\frac{3}{8}\right]_{\mathcal{S}}}}$$

3.5. a) neřešená úloha

b) neřešená úloha

c)



$$\mathcal{R} = \langle A; B - A, D - A \rangle = \langle A; \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$$

$$\mathcal{S} = \langle O; D - O, C - O \rangle = \langle O; \vec{d}_1, \vec{d}_2 \rangle$$

$$O = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]_{\mathcal{R}} = [0, 0]_{\mathcal{S}}$$

(později ověřím výpočtem)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$\langle A \rangle_{\mathcal{S}}$        $\langle \vec{e}_1 \rangle_{\mathcal{S}}$        $\langle \vec{e}_2 \rangle_{\mathcal{S}}$

$$\begin{aligned} x' &= -x + y \\ y' &= x + y - 1 \end{aligned}$$

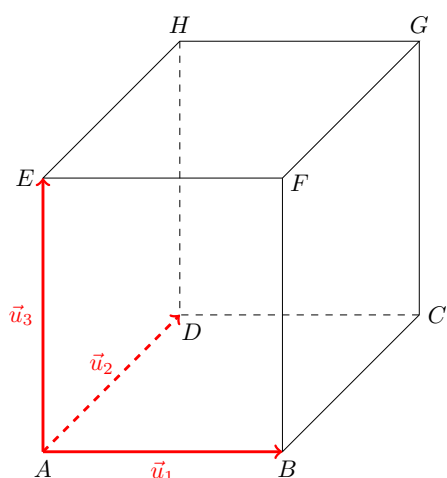
Ověření pro střed  $O$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow O = [0, 0]_{\mathcal{S}}$$

d) neřešená úloha

3.6.



$$\begin{array}{ll} A = [0, 0, 0]_{\mathcal{R}} & C = [1, 1, 0]_{\mathcal{R}} \\ \vec{u}_1 = (1, 0, 0)_{\mathcal{R}} & \vec{d}_1 = (0, -1, 0)_{\mathcal{R}} \\ \vec{u}_2 = (0, 1, 0)_{\mathcal{R}} & \vec{d}_2 = (-1, 0, 0)_{\mathcal{R}} \\ \vec{u}_3 = (0, 0, 1)_{\mathcal{R}} & \vec{d}_3 = (0, 0, 1)_{\mathcal{R}} \end{array}$$

a) Jaké jsou souřadnice  $A$ ,  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$ ,  $\vec{u}_3$  vzhledem k  $\mathcal{L}$ ?

Obecně:  $A = C + p'_1 \vec{d}_1 + p'_2 \vec{d}_2 + p'_3 \vec{d}_3$

$$[0, 0, 0] = [1, 1, 0] + p'_1 (0, -1, 0) + p'_2 (-1, 0, 0) + p'_3 (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p'_1 = 1 \\ p'_2 = 1 \\ p'_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = [1, 1, 0]_{\mathcal{S}}$$

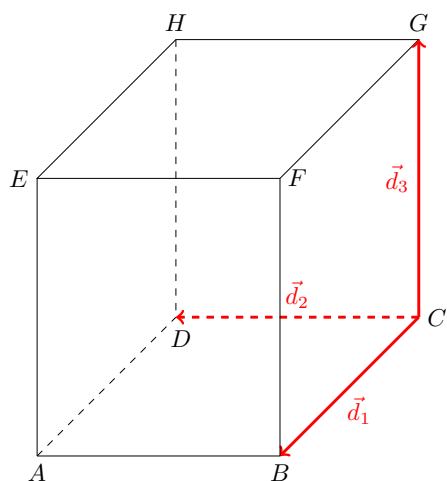
$$\vec{u}_1 = (0, -1, 0)_{\mathcal{S}} \quad \vec{u}_2 = (-1, 0, 0)_{\mathcal{S}} \quad \vec{u}_3 = (0, 0, 1)_{\mathcal{S}}$$

↓

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

↓

$$\begin{array}{l} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1 \\ z' = z \end{array}$$



b)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

□

## 4 Lineární kombinace bodů

**Úloha 4.1** Pomocí lineární kombinace bodů odvoďte vztah pro výpočet středu úsečky  $AB$ .

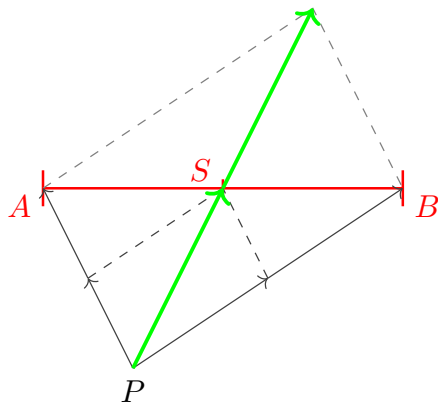
**Úloha 4.2** Pomocí lineární kombinace bodů odvoďte vztah pro výpočet těžiště  $\triangle ABC$ .

**Úloha 4.3** Pomocí lineární kombinace bodů vyjádřete body přímky  $AB$ , polopřímky  $AB$ , polopřímky  $BA$  a úsečky  $AB$ .

**Úloha 4.4** Jsou dány tři nekolineární body  $A, B, C \in A_2$ . Pomocí lineární kombinace bodů vyjádřete body poloroviny  $ABC$ , úhlu  $CAB$  a body uvnitř  $\triangle ABC$ .

*Řešení.*

4.1



$$\begin{aligned} S &= P + \frac{1}{2}(A - P) + \frac{1}{2}(B - P) \\ &= P + \frac{1}{2}((A - P) + (B - P)) \end{aligned}$$

$P$  je libovolné, můžeme tedy zvolit i  $P = A$ .

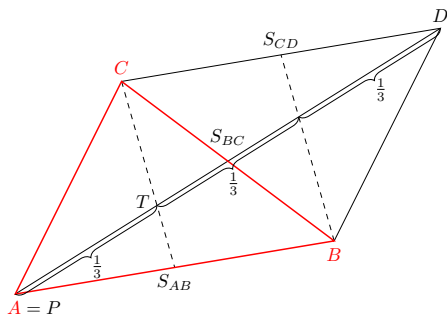
$$\begin{aligned} \implies S_{AB} &= A + \frac{1}{2}(B - A) \\ &= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \end{aligned}$$

4.2

$$\begin{aligned} T &= P + \frac{1}{3}(A - P) + \frac{1}{3}(B - P) + \frac{1}{3}(C - P) \\ &= P + \frac{1}{3}[(A - P) + (B - P) + (C - P)] \end{aligned}$$

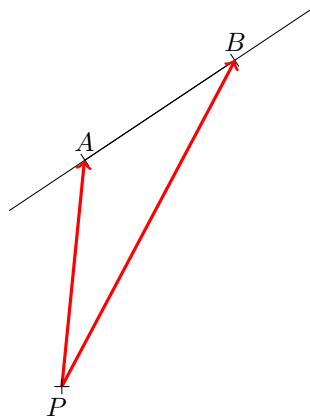
Pro  $P = A$ :

$$\begin{aligned} T &= A + \frac{1}{3}(B - A) + \frac{1}{3}(C - A) \\ &= \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 T &= A + \frac{1}{3} [(C - A) + (B - A)] \\
 &= A + \frac{1}{3} (C - A) + \frac{1}{3} (B - A) \\
 &= \frac{1}{3} A + \frac{1}{3} B + \frac{1}{3} C
 \end{aligned}$$

4.3



Přímka  $AB$ :

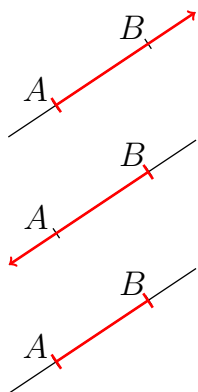
$$\begin{aligned}
 \lambda A + \mu B &= P + \lambda(A - P) + \mu(B - P), \\
 \mu + \lambda &= 1.
 \end{aligned}$$

Za počátek  $P$  zvolíme bod  $A$ , resp. bod  $B$ .

$$\Rightarrow A + \mu(B - A), \text{ resp. } B + \lambda(A - B)$$

$$(\text{a platí: } A + \mu(B - A) = B + \lambda(A - B))$$

Odtud již jasně vidíme, že výsledkem lineární kombinace bodů  $AB$  jsou pouze body přímky  $AB$ .



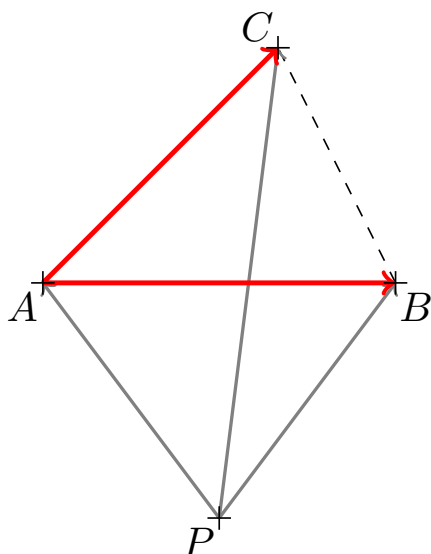
pro  $\mu \geq 0$ : polopřímka  $AB$

pro  $\lambda \geq 0$ : polopřímka  $BA$

pro  $\lambda, \mu \geq 0$  (nebo  $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ ): úsečka  $AB$

(pozn. pro  $\mu \leq 0$ : polopřímka opačná k  $AB$ , tj. ne polopřímka  $BA$ )





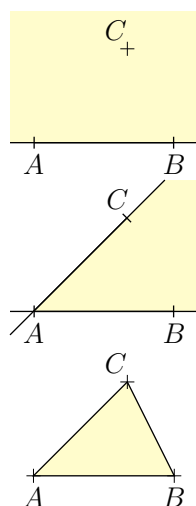
$$\lambda A + \mu B + \nu C = P + \lambda(A - P) + \mu(B - P) + \nu(C - P),$$

$$\lambda + \mu + \nu = 1.$$

Za počátek  $P$  zvolíme  $A$ .

$$\implies A + \mu(B - A) + \nu(C - A)$$

Odtud vidíme, že lineární kombinací získám body roviny  $ABC$ .



pro  $\nu \geq 0$ : polorovina  $ABC$

pro  $\nu, \mu \geq 0$ : úhel  $CAB$

pro  $\lambda, \mu, \nu \geq 0$  (nebo  $\nu \in \langle 0, 1 \rangle \wedge \mu \in \langle 0, 1 - \nu \rangle$ ): trojúhelník  $ABC$

□

## 5 Afinní podprostor, jeho jednoznačné zadání, rovnice

**Úloha 5.1** V afinním prostoru  $A_5$  jsou dány body  $X = [1, 2, -1, 1, 0]$ ,  $Y = [-3, 1, -1, 1, 2]$ ,  $Z = [0, 2, -1, 3, 2]$ ,  $U = [-1, 1, 0, 3, 4]$ ,  $V = [0, 2, -2, -3, -4]$ . Rozhodněte, zda tyto body jednoznačně určují nadrovinu.

**Úloha 5.2** V afinním prostoru  $A_4$  jsou dány body  $B = [4, 3, 5, -6]$ ,  $C = [1, 8, 4, 2]$ ,  $D = [-2, 13, 3, 10]$ . Určete, zda jsou tyto body kolinéární. Pokud ano, napište parametrické vyjádření přímky, na které leží.

**Úloha 5.3** Dokažte, že body  $B = [1, 2, 2]$ ,  $C = [1, 3, 1]$ ,  $D = [2, 4, 0]$ ,  $E = [3, 5, -1]$  z afinního prostoru  $A_3$  jsou komplanární a napište parametrické vyjádření příslušné roviny.

**Úloha 5.4** V afinním prostoru  $A_2$  je dána přímka  $p = \{B, \vec{u}\}$ . Napište její parametrické vyjádření a z parametrického vyjádření odvoďte obecnou rovnici.

a)  $B = [1, 0], \vec{u} = (-1, 4)$

b)  $B = [2, 3], \vec{u} = (1, 0)$

**Úloha 5.5** V prostoru  $A_4$  je dána nadrovina  $A_3$ . Určete její parametrické vyjádření a obecnou rovnici, je-li

$$A_3 = \{B = [0, 1, 0, -1], \vec{u} = (1, 0, 2, -1), \vec{v} = (-1, 2, -1, 0), \vec{w} = (0, 1, -3, 0)\}.$$

**Úloha 5.6** V prostoru  $A_3$  jsou dány body  $B = [1, 2, -1], C = [2, 1, 0], D = [3, 1, -1]$ . Rozhodněte, zda tyto body jednoznačně určují rovinu. Pokud ano, napište její parametrické vyjádření a obecnou rovnici jednak vyloučením parametrů, jednak pomocí determinantu.

**Úloha 5.7** V prostoru  $A_4$  napište obecnou rovnici nadroviny  $\alpha$ , je-li dáno:

$$\alpha = \{B = [2, 1, 0, 1], \vec{u} = (-1, 1, -2, -1), \vec{v} = (1, 0, 2, 2), \vec{w} = (2, -1, 3, 1)\}.$$

**Úloha 5.8** V afinním prostoru  $A_4$  určete parametrické vyjádření přímky

$$p = \{B = [1, 0, 1, 3], \vec{u} = (1, 2, 2, 1)\}$$

a najděte na této přímce body  $C = [?, ?, -3, ?]$  a  $D = [1, ?, ?, ?]$ .

**Úloha 5.9** V prostoru  $A_4$  jsou dány body  $A = [1, 0, 2, 3], B = [2, 1, 0, 1], C = [1, 3, 2, 1], D = [4, -3, -4, 1]$ . Jaký určují podprostor? Napište jeho parametrické vyjádření.

**Úloha 5.10** Určete parametrické vyjádření roviny  $x - 2y + 3z - 5 = 0$  v prostoru  $A_3$ .

**Úloha 5.11** V afinním prostoru  $A_3$  zapište přímku  $p$  jako průnik nadrovin.

$$p: \quad B = [2, 3, 0] \quad C = [1, 5, 2]$$

**Úloha 5.12** V  $A_3$  zapište bod  $B = [2, 1, 3]$  jako průnik nadrovin.

**Úloha 5.13** V afinním prostoru  $A_4$  je dána rovina

$$\alpha = \{B = [1, 2, 3, 4]; \vec{u} = (1, 0, 1, 0), \vec{v} = (1, 2, 0, -1)\}.$$

Určete  $\alpha$  jako průnik nadrovin.

**Úloha 5.14** Určete přímku  $p = \{C = [2, 0, 1, 2]; \vec{u} = (3, 1, 1, 0)\}$  jako průnik nadrovin v  $A_4$

*Řešení.*

5.1 Z pěti zadaných bodů vytvořím 4 vektory.

Nadrovina v  $A_5$  je podprostor dimenze  $5 - 1 = 4$ .

Body  $X, Y, Z, U, V$  jednoznačně určují nadrovinu  $\iff$  příslušné vektory jsou LN, tedy hodnost matice sestavené z těchto vektorů musí být 4.

$$(Y - X) = (-4, -1, 0, 0, 2)$$

$$(Z - X) = (-1, 0, 0, 2, 2)$$

$$(U - X) = (-2, -1, 1, 2, 4)$$

$$(V - X) = (-1, 0, -1, -4, -4)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -4 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -8 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$h = 3$  (pouze 3 LN vektory)

↓

body  $X, Y, Z, U, V$  určují podprostor dimenze 3.

5.2 Body  $B, C, D$  jsou kolineární  $\iff$  vektory  $(C - B), (D - B)$  jsou LZ

$$\left. \begin{array}{l} (C - B) = (-3, 5, -1, 8) \\ (D - B) = (-6, 10, -2, 16) \end{array} \right\} (D - B) = 2 \cdot (C - B), \text{ jsou LZ} \implies B, C, D \text{ kolineární}$$

Parametrické vyjádření přímky  $BC$ :

např.  $\underline{X = [4, 3, 5, -6] + t \cdot (-3, 5, -1, 8) \quad t \in \mathbb{R}}$

5.3 Body  $B, C, D, E$  leží v jedné rovině  $\iff$  vektory  $(C - B), (D - B), (E - B)$  určují VP dimenze nejvýše 2.

$$\begin{array}{l} (C - B) = (0, 1, -1) \\ (D - B) = (1, 2, -2) \\ (E - B) = (2, 3, -3) \end{array} \quad \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{array} \right| = -4 - 3 + 4 + 3 = 0$$

$\implies$  vektory  $(C - B), (D - B), (E - B)$  jsou LZ

Vidíme, že nejsou všechny tři vektory násobky téhož vektoru (pak by  $B, C, D, E$  byly dokonce kolineární), tedy určují podprostor dimenze 2 (rovinu).

Parametrické vyjádření roviny  $BCD$ :

např.  $\underline{X = [1, 2, 2] + t \cdot (0, 1, -1) + s \cdot (1, 2, -2) \quad t, s \in \mathbb{R}}$

5.4 a) Parametrické vyjádření:

$$\underline{X = [1, 0] + t \cdot (-1, 4) \quad t \in \mathbb{R}} \longrightarrow \begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 0 + 4t \end{array} \quad t \in \mathbb{R} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 0 + 4t \end{array}} \right) 4 \cdot (I) + (II)$$

Obecná rovnice:  $4x + y = 4 \longrightarrow \underline{4x + y - 4 = 0}$  obecnou rovnici získám  
vyloučením parametru  $t$   
z parametrického vyjádření

b) Parametrické vyjádření:

$$\underline{X = [2, 3] + t \cdot (1, 0) \quad t \in \mathbb{R}} \longrightarrow \begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 3 \end{array} \quad t \in \mathbb{R}$$

Obecná rovnice:  $\underline{y - 3 = 0}$

### 5.5 Parametrické vyjádření:

$$\underline{\underline{X = [0, 1, 0, -1] + t \cdot (1, 0, 2, -1) + s \cdot (-1, 2, -1, 0) + r \cdot (0, 1, -3, 0) \quad t, s, r \in \mathbb{R}}}$$

$$\begin{array}{lcl} x_1 = & t - s & (I) + (IV) : x_1 + x_4 = -1 - s \longrightarrow s = -1 - x_1 - x_4 \\ x_2 = & 1 + 2s + r & (IV) : t = -1 - x_4 \\ x_3 = & 2t - s - 3r & 3 \cdot (II) + (III) : 3x_2 + x_3 = 3 + 2t + 5s \\ x_4 = & -1 - t & 3x_2 + x_3 = 3 + 2(-1 - x_4) + 5(-1 - x_1 - x_4) \end{array}$$

Obecná rovnice:

$$\underline{\underline{5x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 + 4 = 0}}$$

Parametrické vyjádření má každý podprostor, obecnou rovnici má jen nadrovina.

- Parametrické vyjádření není jednoznačné, záleží na volbě bodu a báze.
- Obecná rovnice je až na nenulový násobek jednoznačná.

### 5.6 Aby body $B, C, D$ určovaly rovinu, musí být vektory $(C - B), (D - B)$ LN.

$$\left. \begin{array}{l} (C - B) = (1, -1, 1) \\ (D - B) = (2, -1, 0) \end{array} \right\} \text{ jsou LN} \implies B, C, D \text{ určují rovinu}$$

Parametrické vyjádření:

$$X = B + t(C - B) + s(D - B) \quad t, s \in \mathbb{R} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1 + t + 2s \\ y = 2 - t - s \\ z = -1 + t \end{array} \quad t, s \in \mathbb{R}}$$

Obecná rovnice (vyloučením parametrů):

$$\begin{array}{l} (III) : t = z + 1 \\ (I) + 2 \cdot (II) : x + 2y = 5 - t \longrightarrow x + 2y = 5 - z - 1 \longrightarrow \underline{\underline{x + 2y + z - 4 = 0}} \end{array}$$

Obecná rovnice (pomocí determinantu):

$$\begin{array}{l} (X - B) = (x - 1, y - 2, z + 1) \\ (X - B) = t \cdot (C - B) + s \cdot (D - B) \quad t, s \in \mathbb{R} \end{array}$$

Vektory  $(X - B), (C - B), (D - B)$  jsou LZ  $\implies$  determinant sestavený z těchto vektorů musí být roven nule.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-2 & -1 & -1 \\ z+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(z+1) + 2(y-2) + 2(z+1) + (x-1) = 0$$

$$\underline{\underline{x + 2y + z - 4 = 0}}$$

5.7 neřešená úloha

5.8 neřešená úloha

5.9 neřešená úloha

5.10

$$x - 2y + 3z - 5 = 0$$

Máme 1 rovnici o 3 neznámých – dvě zvolím jako parametry a třetí dopočítám.

$$\begin{array}{l} y = t \\ z = s \end{array} \quad x - 2t + 3s - 5 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 5 + 2t - 3s$$

Parametrické vyjádření:

$$\begin{array}{l} x = 5 + 2t - 3s \\ y = \quad t \quad \quad t, s \in \mathbb{R} \\ z = \quad \quad s \end{array}$$

5.11

$$(C - B) = (-1, 2, 2) \quad p : \quad \begin{array}{l} x = 2 - t \quad \longrightarrow \quad t = 2 - x \\ y = 3 + 2t \quad t \in \mathbb{R} \quad \longleftarrow \\ z = 0 + 2t \quad \longleftarrow \end{array}$$

Potřebuji  $3 - 1 = 2$  nadroviny.

$$\begin{array}{l} y = 3 + 2(x - 2) \quad \longrightarrow \quad \alpha : 2x + y - 7 = 0 \\ z = \quad 2(x - 2) \quad \longrightarrow \quad \beta : 2x + z - 4 = 0 \end{array}$$

Roviny  $\alpha, \beta$  určují celý svazek nadrovin o ose  $p$  ( $\alpha \cap \beta = p$ ). Každé dvě roviny tohoto svazku určují přímkou  $p$ .

Každou rovinu tohoto svazku dostanu jako lineární kombinaci  $\alpha$  a  $\beta$ .

$$\rho : k(2x + y - 7) + l(2x + z - 4) = 0, \quad \text{kde } (k, l) \neq (0, 0)$$

$$\text{např. } \rho : 4x + y + z - 11 = 0$$

5.12 Obecná rovnice nadroviny  $\rho$  v  $A_3$ :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad B \in \rho \implies 2a + b + 3c + d = 0$$

Potřebuji  $3 - 0 = 3$  nadroviny.

Volme například:

$$1. \ a = 0, b = 1, c = 1 \implies 1 + 3 + d = 0 \longrightarrow d = -4: \quad \underline{\underline{\alpha : y + z - 4 = 0}}$$

$$2. \ a = 1, b = 0, c = 0 \implies d = -2: \quad \underline{\underline{\beta : x - 2 = 0}}$$

$$3. \ a = 0, b = 0, c = 1 \implies d = -3: \quad \underline{\underline{\gamma : z - 3 = 0}}$$

Roviny  $\alpha, \beta, \gamma$  určují trs nadrovin procházejících bodem  $B$

5.13 Rovina  $\alpha$  má dimenzi 2  $\implies$  potřebuji  $4 - 2 = 2$  nadroviny.

Parametrické vyjádření:

$$\begin{array}{l}
 p : \quad x_1 = 1 + t + s \longleftarrow \\
 \quad \quad x_2 = 2 + 2s \longleftarrow \\
 \quad \quad x_3 = 3 + t \xrightarrow{t, s \in \mathbb{R}} \quad \underbrace{\hspace{2cm}}_{t = x_3 - 3} \\
 \quad \quad x_4 = 4 - s \xrightarrow{\hspace{2cm}} s = 4 - x_4
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow{1} {}^1A_3 : \quad x_1 = 1 + x_3 - 3 + 4 - x_4 \xrightarrow{\hspace{2cm}} \underline{\underline{x_1 - x_3 + x_4 - 2 = 0}} \\
 \xrightarrow{2} {}^2A_3 : \quad x_2 = 2 + 2(4 - x_4) \xrightarrow{\hspace{2cm}} \underline{\underline{x_2 + 2x_4 - 10 = 0}}
 \end{array}$$

5.14 Přímka  $p$  má dimenzi 1  $\implies$  potřebuji  $4 - 1 = 3$  nadroviny.

Parametrické vyjádření:

$$\begin{array}{l}
 p : \quad x_1 = 2 + 3t \longleftarrow \\
 \quad \quad x_2 = + t \xrightarrow{t \in \mathbb{R}} t = x_2 \\
 \quad \quad x_3 = 1 + t \longleftarrow \\
 \quad \quad x_4 = 2
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow{1} {}^1A_3 : \quad \underline{\underline{x_4 = 2}} \\
 \xrightarrow{2} {}^2A_3 : \quad x_1 = 2 + 3x_2 \xrightarrow{\hspace{2cm}} \underline{\underline{x_1 - 3x_2 - 2 = 0}} \\
 \xrightarrow{3} {}^3A_3 : \quad x_3 = 1 + x_2 \xrightarrow{\hspace{2cm}} \underline{\underline{x_2 - x_3 + 1 = 0}}
 \end{array}$$

□

## 6 Vzájemné polohy podprostorů

**Úloha 6.1** V afinním prostoru  $A_n$  určete vzájemnou polohu přímek  $p$  a  $q$ , je-li

- a)  $n = 3$ ,  $p = \{P = [1, 2, 3]; \vec{u} = (2, -2, 4)\}$ ,  
 $q = \{Q = [0, 3, 1]; \vec{v} = (-3, 3, -6)\}$ ,  
b)  $n = 3$ ,  $p = \{P = [0, 0, -1]; \vec{u} = (1, 1, 3)\}$ ,  
 $q = \{Q = [0, -1, 2]; \vec{v} = (2, 3, 3)\}$ ,  
c)  $n = 3$ ,  $p = \{P = [1, 3, -1]; \vec{u} = (2, -4, 3)\}$ ,  
 $q = \{Q = [0, -3, 1]; \vec{v} = (-1, 2, -\frac{3}{2})\}$ ,  
d)  $n = 3$ ,  $p = \{P = [1, 2, -1]; \vec{u} = (0, 1, 3)\}$ ,  
 $q = \{Q = [0, 0, 2]; \vec{v} = (1, -3, 1)\}$ ,  
e)  $n = 4$ ,  $p = \{P = [1, 0, 1, 1]; \vec{u} = (1, 2, 1, 2)\}$ ,  
 $q = \{Q = [-1, 2, 0, 1]; \vec{v} = (0, 3, 1, 1)\}$ ,

v případě různoběžných přímek určete také jejich průsečík.

**Úloha 6.2** V afinním prostoru  $A_n$  určete vzájemnou polohu přímek  $p$  a  $q$ , je-li

$$n = 4, \quad p = \{P = [3, 2, 1, 0]; \vec{u} = (0, a, 1, b); a, b \in \mathbb{R}\},$$

$$q = \{Q = [-2, 4, 4, -1]; \vec{v} = (5, -5, -6, 4)\},$$

v případě různoběžných přímek určete také jejich průsečík.

**Úloha 6.3** V afinním prostoru  $A_n$  určete vzájemnou polohu přímky  $p$  a roviny  $\rho$ , je-li

- a)  $n = 3$ ,  $p = \{P = [1, 4, -3]; \vec{u} = (-1, 3, -4)\}$ ,  
 $\rho = \{R = [3, 3, 0]; \vec{v} = (1, 2, -1), \vec{w} = (3, 1, 2)\}$ ,  
b)  $n = 3$ ,  $p = \{P = [-2, 1, 0]; \vec{u} = (-2, 1, -2)\}$ ,  
 $\rho = \{R = [1, 2, 2]; \vec{v} = (1, 0, 0), \vec{w} = (1, 3, -2)\}$ ,  
c)  $n = 4$ ,  $p = \{P = [0, 1, -3, 1]; \vec{u} = (3, 2, 0, 1)\}$ ,  
 $\rho = \{R = [2, 1, 1, 3]; \vec{v} = (2, 3, 1, 4), \vec{w} = (3, 1, 0, 4)\}$ ,  
d)  $n = 4$ ,  $p = \{P = [0, 1, 0, -1]; \vec{u} = (1, 1, -1, 1)\}$ ,  
 $\rho = \{R = [1, 3, -3, 3]; \vec{v} = (4, 1, 1, 1), \vec{w} = (0, 1, -2, 3)\}$ ,

v případě různoběžné přímky a roviny určete jejich průsečík.

*Řešení.*

6.1 a)

$$\vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{v} \implies \vec{u}, \vec{v} \text{ jsou LZ}$$

Jsou totožné, nebo rovnoběžné různé?

$$(P - Q) = (1, -1, 2)$$

Vyšetříme, zda jsou  $(P - Q)$  a  $\vec{u}$  LZ.

$$2 \cdot (P - Q) = \vec{u} \quad 2 \cdot (1, -1, 2) = (2, -2, 4) \implies \text{jsou LZ} \implies \underline{\underline{p \parallel q \wedge p = q}}$$

b)  $\vec{u}, \vec{v}$  jsou LN  $\implies p, q$  mohou být různoběžné nebo mimoběžné.

$$(P - Q) = (0, 1, -3)$$

Vyšetříme, zda jsou  $(P - Q)$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  LN.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LZ} \implies \underline{p \not\parallel q}$$

Průsečík:

$$\begin{aligned} \underbrace{P - a \cdot \vec{u}}_{X \in p} &= \underbrace{Q + b \cdot \vec{v}}_{X \in q} \\ P - Q &= a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} \\ (0, 1, -3) &= a(1, 1, 3) + b(2, 3, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= a + 2b \\ 1 &= a + 3b \\ -3 &= 3a + 3b \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} 0 &= a + 2b \\ 1 &= a + 3b \\ -3 &= 3a + 3b \end{aligned}} \right) (II) - (I) \implies \underline{b = 1}$$

$$-3 = 3a + 3 \longrightarrow -6 = 3a \longrightarrow \underline{a = -2}$$

$$\underline{\underline{X = P - a \cdot \vec{u} = Q + b \cdot \vec{v} = [2, 2, 5]}}$$

c)  $\vec{u} = -2 \cdot \vec{v} \implies \vec{u}, \vec{v}$  jsou LZ  $\implies p, q$  jsou totožné nebo rovnoběžné různé.

$$\left. \begin{aligned} (P - Q) &= (1, 6, -2) \\ \vec{u} &= (2, -4, 3) \end{aligned} \right\} \text{LN} \implies \underline{\underline{p \parallel q \wedge p \neq q}}$$

d)  $\vec{u}, \vec{v}$  LN  $\implies p, q$  jsou různoběžné nebo mimoběžné.

$$(P - Q) = (1, 2, -3)$$

Vyšetříme, zda jsou  $(P - Q)$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  LN.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -19 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LN} \\ &\implies \underline{\underline{p, q \text{ jsou mimoběžné}}} \end{aligned}$$

e)  $\vec{u}, \vec{v}$  LN  $\implies p, q$  jsou různoběžné nebo mimoběžné.

$$(P - Q) = (2, -2, 1, 0)$$

Vyšetříme, zda jsou  $(P - Q)$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  LN.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LN} \\ &\implies \underline{\underline{p, q \text{ jsou mimoběžné}}} \end{aligned}$$



6.2

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (0, a, 1, b) \\ \vec{v} = (5, -5, -6, 4) \end{array} \right\} \text{ jsou LN} \implies \text{různoběžné nebo mimoběžné}$$

$$(P - Q) = (5, -2, -3, 1)$$

Vyšetříme, zda jsou  $(P - Q)$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  LZ.

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 & 4 \\ 5 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & a & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & a & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & a & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -5 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 - a & b + a \end{pmatrix}$$

$\alpha)$  pro  $a = 1 \wedge b = -1$ :

Hodnost matice je 2  $\implies (P - Q)$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  jsou LZ  $\implies p, q$  jsou různoběžné

Průsečík:

$$\vec{u} = (0, 1, 1, -1)$$

$$P + t \cdot \vec{u} = Q + s \cdot \vec{v}$$

$$(P - Q) = s \cdot \vec{v} - t \cdot \vec{u}$$

$$(5, -2, -3, 1) = s(5, -5, -6, 4) - t(0, 1, 1, -1)$$

$$\begin{array}{l} 5 = 5s \longrightarrow \underline{\underline{s = 1}} \\ -2 = -5s - t \\ -3 = -6s - t \\ 1 = 4s + t \longleftarrow \\ 1 = 4 + t \longrightarrow \underline{\underline{t = -3}} \end{array}$$

$$\implies X = P + t \cdot \vec{u} = [3, 2, 1, 0] + 1 \cdot (0, 1, 1, -1)$$

$$X = Q + s \cdot \vec{v} = [-2, 4, 4, -1] - 3 \cdot (5, -5, -6, 4)$$

$$\underline{\underline{X = [3, -1, -2, 3]}}$$

$\beta)$  pro  $a \neq 1 \vee b \neq -1$ :

Hodnost matice je 3  $\implies (P - Q)$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  jsou LN  $\implies p, q$  jsou mimoběžné

6.3 a) Vyšetříme, zda jsou vektory  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  LN.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LZ}$$

$$\implies (p \subset \rho) \vee (p \parallel \rho \wedge p \cap \rho = \emptyset)$$

$$(P - R) = (-2, 1, -3)$$

Vyšetříme, zda jsou vektory  $(P - R)$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  LN.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LZ} \implies \underline{\underline{p \subset \rho}}$$

b) Vyšetříme, zda jsou vektory  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  LN.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 2 = -4 \implies \text{jsou LN}$$

$\implies$  různoběžné (v  $A_3$  nemohou být mimoběžné)

Průsečík:

$$P - a \cdot \vec{u} = R + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$$

$$(P - R) = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$$

$$(-3, -1, -2) = a(-2, 1, -2) + b(1, 0, 0) + c(1, 3, -2)$$

$$\begin{pmatrix} -3 = -2a + b + c \\ -1 = a + 3c \\ -2 = -2a - 2c \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \implies -4 = 4c \implies \underline{\underline{c = -1}}$$

$$\begin{matrix} -1 = a - 3 \longrightarrow \underline{\underline{a = 2}} & \underline{\underline{b = 2}} \end{matrix}$$

$$\implies X = P - a \cdot \vec{u} = [-2, 1, 0] - 2 \cdot (-2, 1, -2)$$

$$X = R + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w} = [1, 2, 2] + 2 \cdot (1, 0, 0) - 1 \cdot (1, 3, -2)$$

$$\underline{\underline{X = [2, -1, 4]}}$$

c) Vyšetříme, zda jsou  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  LN.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LN}$$

$\implies$  různoběžné nebo mimoběžné

$$(P - R) = (-2, 0, -4, -2)$$

Vyšetříme, zda jsou  $(P - R)$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  LN.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 15 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LN}$$

$\implies$  mimoběžné

d) Vyšetříme, zda jsou  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  LN.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \implies \text{jsou LN}$$

$\implies$  různoběžné  
nebo mimoběžné

$$(P - R) = (-1, -2, 3, -4)$$

Vyšetříme, zda jsou  $(P - R), \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  LN.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \sim \implies \text{jsou LZ}$$

$\implies$  různoběžné

Průsečík:

$$P - a \cdot \vec{u} = R + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$$

$$(P - R) = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} + c \cdot \vec{w}$$

$$(-1, -2, 3, -4) = a(1, 1, -1, 1) + b(4, 1, 1, 1) + c(0, 1, -2, 3)$$

$$\begin{array}{l} -1 = a + 4b \\ -2 = a + b + c \\ 3 = -a + b - 2c \\ -4 = a + b + 3c \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (II) - (IV) \implies 2 = -2c \longrightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \underline{\underline{c = -1}} \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \longleftarrow \\ \longleftarrow \end{array} \begin{array}{l} 1 = -a + b, \text{ sečteme s (I)} \longrightarrow 0 = 5b \longrightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} \underline{\underline{b = 0}} \\ \underline{\underline{a = -1}} \end{array}$$

$$\implies X = P - a \cdot \vec{u} = [0, 1, 0, -1] + (1, 1, -1, 1)$$

$$\underline{\underline{X = [1, 2, -1, 0]}}$$

□

## 7 Příčky mimoběžných podprostorů

**Úloha 7.1** V  $A_3$  sestrojte příčku přímek  $p, q$  daným směrem  $\vec{w}$ , je-li

- a)  $p = \{B = [-1, 1, -5]; \vec{u} = (1, 1, 2)\},$   
 $q = \{C = [1, -2, 3]; \vec{v} = (1, 3, -1)\},$   
 $\vec{w} = (1, -2, 3),$   
b)  $p = \{B = [1, 2, -1]; \vec{u} = (1, -1, 1)\},$   
 $q = \{C = [0, 9, -2]; \vec{v} = (1, 0, 0)\},$   
 $\vec{w} = (1, 2, 0),$   
c)  $p = \{B = [1, 0, 1]; \vec{u} = (2, 1, 0)\},$   
 $q = \{C = [2, 2, 3]; \vec{v} = (3, 0, 2)\},$   
 $\vec{w} = (2, 1, 4).$

**Úloha 7.2** V  $A_3$  sestrojte příčku přímek  $p, q$  procházející daným bodem  $M$ , je-li

- a)  $p = \{B = [2, 1, 1]; \vec{u} = (1, 0, 1)\},$   
 $q = \{C = [-1, 1, 0]; \vec{v} = (1, 1, 0)\},$   
 $M = [2, 2, 1],$   
b)  $p = \{B = [2, 0, 1]; \vec{u} = (1, 2, 3)\},$   
 $q = \{C = [2, 2, 0]; \vec{v} = (1, 1, 1)\},$   
 $M = [2, 1, 3],$   
c)  $p = \{B = [3, 3, 3]; \vec{u} = (2, 2, 1)\},$   
 $q = \{C = [0, 5, -1]; \vec{v} = (1, 1, 1)\},$   
 $M = [4, 5, 3].$

**Úloha 7.3** V  $A_4$  určete příčku mimoběžných podprostorů, kterými jsou přímka  $p$  a rovina  $\rho$ , procházející daným bodem  $M$ , je-li

$$p = \{B = [0, 0, -6, -7]; \vec{u} = (1, 1, 2, 1)\},$$

$$\rho = \{C = [2, 1, 1, 1]; \vec{v} = (1, 2, -1, 1), \vec{w} = (-1, 2, 1, 2)\},$$

$$M = [7, -2, -1, 0].$$

*Řešení.*

7.1 a) Ověříme, že se jedná o mimoběžky.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 6 + 24 - 8 - 12 - 3 = -7 \neq 0 \implies (C - B), \vec{u}, \vec{v} \text{ jsou LN}$$

$$\implies p, q \text{ jsou mimoběžné}$$

Ověříme podmínku existence průsečnice dvou rovin  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 - 4 - 6 - 2 - 3 = -7 \neq 0 \implies \text{příčka existuje}$$

$$\rho = \{B = [-1, 1, -5]; \vec{u} = (1, 1, 2), \vec{w} = (1, -2, 3)\}$$

$$\sigma = \{C = [1, -2, 3]; \vec{v} = (1, 3, -1), \vec{w} = (1, -2, 3)\}$$

Příklad budeme řešit přes obecné rovnice rovin  $\rho, \sigma$  — využijeme determinanty.

$$\rho: \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & -2 \\ z+5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3x+3-2z-10+2y-2-z-5+4x+4-3y+3 \\ = \underline{\underline{7x-y-3z-7=0}}$$

$$\sigma: \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+2 & 3 & -2 \\ z-3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 9x-9-2z+6-y-2-3z+9-3y-6-2x+2 \\ = \underline{\underline{7x-4y-5z=0}}$$

Příčkou je průsečnice těchto dvou rovin.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 7 & -4 & -5 & 0 \\ 7 & -1 & -3 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 7 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{array} \right)$$

$$z = t$$

$$y = \frac{7-2t}{3} = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}t$$

$$x = \frac{1}{7} \left( 5t + 4 \cdot \frac{7-2t}{3} \right) = \frac{1}{7} \cdot \frac{15t+28-8t}{3} = \frac{1}{3}(t+4) = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}t$$

$$\Rightarrow \text{příčka: } r = \left\{ \left[ \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, 0 \right]; \left( \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1 \right) \right\}$$

- b) Přímkou  $p$  proložíme rovinu  $\rho$  ( $p, \vec{w}$ ) =  $\{B = [1, 2, -1]; \vec{u} = (1, -1, 1), \vec{w} = (1, 2, 0)\}$ . Průsečík  $q \cap \rho$  hledáme pomocí parametrických rovnic.

$$q: \begin{array}{l} x = t \\ y = 9 \\ z = -2 \end{array} \quad \rho: \begin{array}{l} x = 1+r+s \\ y = 2-r+2s \\ z = -1+r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} t = 1+r+s \leftarrow \\ 9 = 2-r+2s \leftarrow \\ -2 = -1+r \longrightarrow \underline{\underline{r = -1}} \\ 9 = 2+1+2s \longrightarrow \underline{\underline{s = 3}} \\ t = 1-1+3 \longrightarrow \underline{\underline{t = 3}} \end{array}$$

Dosazením  $t$  do rovnice přímky  $q$  (nebo  $r, s$  do rovnice roviny  $\rho$ ) dostáváme průsečík  $X = \underline{\underline{[3, 9, -2]}}$ .

$$\text{příčka: } \underline{\underline{r = \{X = [3, 9, -2]; \vec{w} = (1, 2, 0)\}}}$$

c)

$$(B - C) + k \cdot \vec{u} - l \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{w}$$

$$-1 + 2k - 3l = 2m$$

$$-2 + k = m$$

$$-2 - 2l = 4m$$

$$2 \cdot (I) - 4 \cdot (II) - 3 \cdot (III) \implies 12 = -12m \quad \underline{\underline{m = -1}}$$

$$\text{Dosad' do (II)} \quad \underline{\underline{k = 1}}$$

$$\text{Dosad' do (III)} \quad \underline{\underline{l = 1}}$$

$$P = B + k \cdot \vec{u} = [3, 1, 1]$$

$$Q = C + l \cdot \vec{v} = [5, 2, 5]$$

$$\text{přímka: } \underline{\underline{\leftrightarrow PQ: r = \{P = [3, 1, 1]; \vec{w} = (2, 1, 4)\}}}$$

7.2 a) 1. způsob řešení:

$$\rho = \{p, M\} = \{M; \vec{u}, (M - B)\} = \{[2, 2, 1]; (1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

$$\begin{array}{ll} q: & x = -1 + t \\ & y = 1 + t \\ & z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \rho: & x = 2 + r \\ & y = 2 + s \\ & z = 1 + r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -1 + t = 2 + r \longleftarrow \\ 1 + t = 2 + s \\ 0 = 1 + r \longrightarrow \underline{\underline{r = -1}} \\ -1 + t = 2 - 1 \longrightarrow \underline{\underline{t = 2}} \quad \underline{\underline{s = 1}} \end{array}$$

$$Q = C + t \cdot \vec{v} = [-1, 1, 0] + 2(1, 1, 0) = [1, 3, 0]$$

$$\text{přímka: } \underline{\underline{r = \{M = [2, 2, 1]; (M - Q) = (1, -1, 1)\}}}$$

2. způsob řešení:

$$P = B + t \cdot \vec{u}$$

$$Q = C + s \cdot \vec{v}$$

$$P - M = k \cdot (Q - M)$$

$$(B - M + t \cdot \vec{u}) = k \cdot (C - M + s \cdot \vec{v})$$

$$2 - 2 + t = k(-1 - 2 + s)$$

$$1 - 2 = k(1 - 2 + s)$$

$$1 - 1 + t = k(-1 \quad \quad)$$

$$\begin{array}{l} t = k(s - 3) \\ -1 = k(s - 1) \leftarrow \\ t = -k \leftarrow \underline{\underline{t = -1}} \\ -k = k(s - 3) \longrightarrow -1 = s - 3 \longrightarrow \underline{\underline{s = 2}} \\ -1 = k(2 - 1) \longrightarrow \underline{\underline{k = -1}} \end{array}$$

$$P = B + t \cdot \vec{u} = [2, 1, 1] + (1, 0, 1) = [3, 1, 2]$$

$$Q = C + s \cdot \vec{v} = [-1, 1, 0] + 2(1, 1, 0) = [1, 3, 0]$$

příčka:  $\underline{\underline{\leftrightarrow PQ: r = \{P = [3, 1, 2]; (Q - P) = (-2, 2, -2)\}}}$

b)

$$(M - B) = (0, 1, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \vec{u}, \vec{v}, (M - B) \text{ jsou LZ}$$

$\implies$  neexistuje příčka

c)

$$(M - B) = (1, 2, 0) \quad (M - C) = (4, 0, 4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \vec{u}, \vec{v}, (M - B) \text{ jsou LN} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \implies \vec{u}, \vec{v}, (M - C) \text{ jsou LN} \end{array} \right\} \implies \text{příčka existuje}$$

$$\rho = \{p, M\} = \{B; \vec{u}, (M - B)\} = \{[3, 3, 3]; (2, 2, 1), (1, 2, 0)\}$$

$$\begin{array}{ll} q: & x = \quad + k & \rho: & x = 3 + 2t + 2s \\ & y = 5 + k & & y = 3 + 2t + s \\ & z = -1 + k & & z = 3 + t \end{array}$$





## 8 Vzdálenosti

**Úloha 8.1** V prostoru  $E_3$  určete vzdálenost bodu  $A = [1, 3, -5]$  od roviny  $\rho : x - 2y + 2z - 3 = 0$ .

**Úloha 8.2** V prostoru  $E_3$  určete vzdálenost bodu  $A = [3, 2, 1]$  od přímky  $p = \{P = [2, 1, 1]; \vec{u} = (1, -1, 1)\}$ .

**Úloha 8.3** V prostoru  $E_3$  určete vzdálenost přímek  $p$  a  $q$ , je-li

$$p = \{A = [1, 3, 1]; \vec{u} = (2, 1, -2)\}, \\ q : \quad x - 2y - 1 = 0 \wedge 3x - 4y + z - 7 = 0.$$

**Úloha 8.4** V prostoru  $E_3$  určete vzdálenost přímky  $p$  a roviny  $\sigma$ , je-li

$$p = \{A = [-6, 4, -3]; \vec{u} = (2, 3, -2)\}, \\ \sigma : \quad 9x - 2y + 6z - 41 = 0.$$

**Úloha 8.5** V prostoru  $E_3$  určete vzdálenost rovin  $\rho$  a  $\sigma$ , je-li

$$\rho : \quad x + y + \sqrt{2}z - 1 = 0, \\ \sigma = \left\{ S = [-2, -1, 0]; \vec{u} = (1, -1, 0), \vec{v} = (1, 1, -\sqrt{2}) \right\}.$$

**Úloha 8.6** V prostoru  $E_3$  určete vzdálenost přímek  $p$  a  $q$ , je-li

$$p = \{B = [4, 2, 3]; \vec{u} = (-2, 3, 2)\}, \\ q = \{C = [3, 4, -4]; \vec{v} = (2, 0, -1)\}.$$

**Úloha 8.7** V prostoru  $E_4$  určete vzdálenost přímky  $p$  a roviny  $\rho$ , je-li

$$p = \{B = [1, -1, -4, 1]; \vec{u} = (1, 3, 5, 1)\}, \\ \rho = \{C = [3, -8, 4, -2]; \vec{v} = (1, 3, 0, 0), \vec{w} = (1, 6, -2, -1)\}.$$

**Úloha 8.8** V prostoru  $E_3$  určete vzdálenost přímky  $p$  a roviny  $\rho$ , je-li

$$p = \{B = [2, 13, 7]; \vec{u} = (-3, -1, 4)\}, \\ \rho : \quad 2x + 6y + 3z - 5 = 0.$$

**Úloha 8.9** V prostoru  $E_4$  určete vzdálenost přímky  $p$  a roviny  $\rho$ , je-li

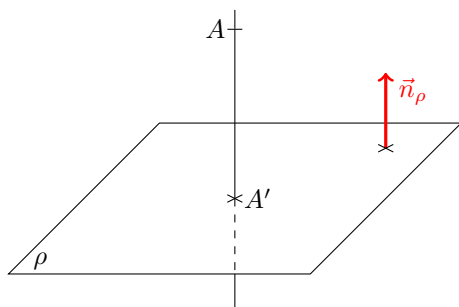
$$p = \{P = [0, 3, -2, -5]; \vec{u} = (-2, 0, -1, 2)\}, \\ \rho = \{R = [-2, -4, 0, 4]; \vec{v} = (-1, -1, -2, 2), \vec{w} = (1, 2, 1, 0)\}.$$

*Řešení.*

8.1 a) Využijeme vzorec pro vzdálenost bodu od nadroviny:

$$|A\rho| = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 - 6 - 10 - 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{18}{3} = \underline{\underline{6}}$$

b) Využijeme kolmého průmětu bodu  $A$  do roviny  $\rho$ :



$$\vec{n}_\rho = (1, -2, 2)$$

$$k: \begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 3 - 2t \\ z &= -5 + 2t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$k \cap \rho: \begin{aligned} (1+t) - 2(3-2t) + 2(-5+2t) - 3 &= 0 \\ 1+t-6+4t-10+4t-3 &= 0 \\ 9t &= 18 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{A' = [3, -1, -1]}} \longleftarrow \underline{\underline{t = 2}}$$

$$(A' - A) = (2, -4, 4)$$

$$\|A' - A\| = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = \underline{\underline{6}}$$

c) Využijeme Gramovy determinanty:

$$B = [1, 3, 4]$$

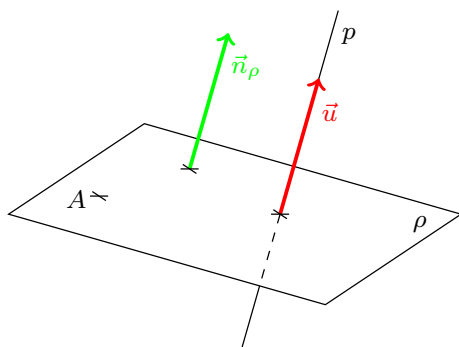
$$\vec{u} = (0, 1, 1)$$

$$\vec{v} = (2, 1, 0)$$

$$(B - A) = (0, 0, 9)$$

$$d(A, \rho) = \sqrt{\frac{G(\vec{u}, \vec{v}, B - A)}{G(\vec{u}, \vec{v})}} = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 81 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}} = \sqrt{\frac{81 \cdot 4}{9}} = \underline{\underline{6}}$$

8.2 a) Rovina kolmá k  $p$  vedená bodem  $A$ :



$$p: \begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - t \\ z &= 1 + t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \rho \perp p: \quad & \vec{s}_p = \vec{u} = \vec{n}_\rho \\ \Rightarrow \rho: \quad & x - y + z + d = 0 \\ A \in \rho: \quad & 3 - 2 + 1 + d = 0 \\ & d = -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho: x - y + z - 2 = 0$$

$$p \cap \rho: (2+t) - (1-t) + (1+t) - 2 = 0$$

$$2+t-1+t+1+t-2=0$$

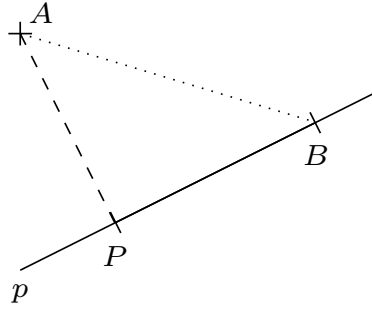
$$3t = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow A' = [2, 1, 1]$$

$$(A' - A) = (-1, -1, 0)$$

$$|Ap| = \||A' - A|| = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

b) Vyjádření paty  $P$  kolmice spuštěné z bodu  $A$  na přímku  $p$ :



$$P \in E_k^\perp$$

$$P = [2 + t, 1 - t, 1 - t]$$

$$A = [3, 2, 1]$$

$$(A - P) \in V_k^\perp$$

$$(A - P) = (1 - t, 1 + t, -t)$$

$$(A - P) \cdot \vec{u} = 0$$

$$(1 - t, 1 + t, -t) \cdot (1, -1, 1) = 0$$

$$1 - t - 1 - t - t = 0$$

$$-3t = 0$$

$$t = 0 \implies P = [2, 1, 1]$$

$$(A - P) = (1, 1, 0)$$

$$|Ap| = \||A - P|| = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

c) Gramův determinant:

$$\vec{u} = (1, -1, 1)$$

$$(B - A) = (-1, -1, 0)$$

$$d(A, p) = \sqrt{\frac{G(\vec{u}, B - A)}{G(\vec{u})}} = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot (B - A) \\ (B - A) \cdot \vec{u} & (B - A) \cdot (B - A) \end{vmatrix}}{|\vec{u} \cdot \vec{u}|}} = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{3}} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

8.3 Hledáme parametrické vyjádření přímky  $q$ .

$$\underline{\underline{y = t}} \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x - 2t - 1 = 0 \\ \underline{\underline{x = 2t + 1}} \end{cases} \begin{cases} 3x - 4y + z - 7 = 0 \\ 6t + 3 - 4t + z - 7 = 0 \\ \underline{\underline{z = -2t + 4}} \end{cases}$$

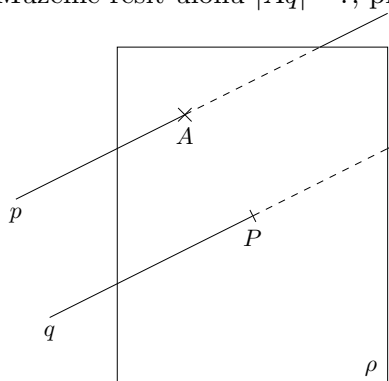
$$x = 1 + 2t$$

$$y = t \quad t \in \mathbb{R} \implies \vec{s}_q = (2, 1, -2)$$

$$z = 4 - 2t$$

$$\vec{u} = \vec{s}_q \implies \text{jsou LZ } \wedge A \notin q \implies \underline{\underline{p \parallel q \wedge p \neq q}}$$

a) Můžeme řešit úlohu  $|Aq| = ?$ , protože  $|Aq| = |pq|$ .



Podprostor totálně kolmý:  $\rho: A \in \rho \wedge \rho \perp q$

$$\begin{aligned} \vec{n}_\rho = \vec{s}_q: & \quad \rho: 2x + y - 2z + d = 0 \\ A \in \rho: & \quad 2 + 3 - 2 + d = 0 \\ & \quad d = -3 \\ \implies \rho: & \quad 2x + y - 2z - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \cap q: \quad 2(1 + 2t) + t - 2(4 - 2t) - 3 &= 0 \\ 9t &= 9 \\ t = 1 &\implies P = [3, 1, 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P - A) &= (2, -2, 1) \\ |pq| = |Aq| &= \|P - A\| = \sqrt{4 + 4 + 1} = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (A - P) \cdot \vec{s}_q &= 0 \\ (-2t, 2 - t, 2t - 3) \cdot (2, 1, -2) &= 0 \\ -4t + 3 - t - 4t + 6 &= 0 \\ t = 1 &\implies P = [3, 1, 2] \end{aligned}$$

$$|pq| = \|A - P\| = \underline{\underline{3}}$$

c)

$$\begin{aligned} (Q - A) &= (0, -3, 3) \\ \vec{u} &= (2, 1, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(A, p) &= \sqrt{\frac{G(Q - A, \vec{u})}{G(\vec{u})}} = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} (Q - A) \cdot (Q - A) & \cdot (Q - A) \vec{u} \\ \vec{u} (Q - A) & \vec{u} \cdot \vec{u} \end{vmatrix}}{|\vec{u} \cdot \vec{u}|}} \\ &= \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 9 \end{vmatrix}}{9}} = \sqrt{\frac{9^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{9}} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

8.4

$$\begin{aligned} \vec{u} \in V_\sigma \wedge A \notin \sigma &\implies p \parallel \sigma \implies |p\sigma| = |A\sigma| \\ |A\sigma| &= \frac{|9 \cdot (-6) - 2 \cdot 4 + 6 \cdot (-3) - 41|}{\sqrt{9^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{|-54 - 8 - 18 - 41|}{\sqrt{81 + 4 + 36}} = \frac{121}{\sqrt{121}} = \underline{\underline{11}} \end{aligned}$$

8.5

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{n}_\rho &= (1, -1, 0) \cdot (1, 1, \sqrt{2}) = 1 - 1 = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{n}_\rho &= (1, 1, \sqrt{2}) \cdot (1, 1, -\sqrt{2}) = 1 + 1 - 2 = 0 \\ \implies \vec{u}, \vec{v} \in V_\rho \wedge S \notin \rho &\implies \rho \parallel \sigma \\ |\sigma\rho| = |S\rho| &= \frac{|-2 - 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 2}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = \underline{\underline{2}}\end{aligned}$$

8.6 a) Nejkratší příčka:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (-3, 2, -6)$$

$$P = B + t \cdot \vec{u}$$

$$Q = C + s \cdot \vec{v}$$

$$P - Q = k \cdot \vec{w}$$

$$4 - 2t - 3 - 2s = -3k$$

$$2 + 3t - 4 = 2k$$

$$3 + 2t + 4 + s = -6k$$

$$\begin{array}{l} 1 = 2t + 2s - 3k \\ -2 = -3t + 2k \\ 7 = -2t - s - 6k \end{array} \left. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right) \begin{array}{l} (I) + 2 \cdot (III) : 15 = -2t - 15k \quad / \cdot 3 \\ -2 = -3t + 2k \quad / \cdot (-2) \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \end{array} \right) +$$

$$51 = -51k \leftarrow$$

$$\underline{\underline{s = -1}} \leftarrow \underline{\underline{t = 0}} \leftarrow \underline{\underline{k = -1}}$$

$$P = B + 0 \cdot \vec{u} = [4, 2, 3]$$

$$Q = C - 1 \cdot \vec{v} = [1, 4, -3]$$

$$(P - Q) = (3, -2, 6)$$

$$|pq| = \|P - Q\| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \underline{\underline{7}}$$

b) „Transferová věta“:

Vektor ze zaměření přímky  $p$  přesuneme do zaměření přímky  $q$  a úlohu převedeme na vzdálenost bodu  $B$  od roviny  $\alpha = \{C; \vec{u}, \vec{v}\}$ .

$$\alpha : -3x + 2y - 6z + d = 0$$

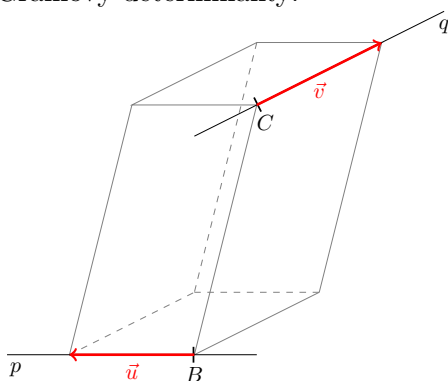
$$C \in \alpha : -9 + 8 + 24 + d = 0$$

$$d = -23$$

$$\implies \alpha : -3x + 2y - 6z - 23 = 0$$

$$d(B, \alpha) = \frac{|-3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 - 6 \cdot 3 - 23|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-6)^2}} = \frac{|-49|}{\sqrt{49}} = \underline{\underline{7}}$$

c) Gramovy determinanty:



$$(B - C) = (1, -2, 7)$$

$$\vec{u} = (-2, 3, 2)$$

$$\vec{v} = (2, 0, -1)$$

$$V = P_{\text{podst.}} \cdot \text{výška}$$

$$d(p, q) = \sqrt{\frac{G(\vec{u}, \vec{v}, B - C)}{G(\vec{u}, \vec{v})}} = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{u} \cdot (B - C) \\ \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{v} \cdot \vec{v} & \vec{v} \cdot (B - C) \\ (B - C) \cdot \vec{u} & (B - C) \cdot \vec{v} & (B - C) \cdot (B - C) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} \\ \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{v} \cdot \vec{v} \end{vmatrix}}}$$

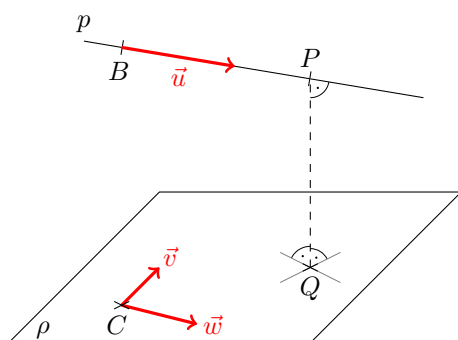
$$= \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} 17 & -6 & 6 \\ -6 & 5 & -5 \\ 6 & -5 & 54 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}}} = \sqrt{\frac{2401}{49}} = \underline{\underline{7}}$$

8.7 a)

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  jsou LN  $\implies p \nparallel \rho$

$(C - B), \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  jsou LN  $\implies p, \rho$  jsou mimoběžné

$\implies$  existuje společná kolmice  $k: k \perp \vec{u}, k \perp \vec{v}, k \perp \vec{w}$



$$P = B + t \cdot \vec{u} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$Q = C + s \cdot \vec{v} + r \cdot \vec{w} \quad s, r \in \mathbb{R}$$

$$(P - Q) \perp \vec{u}, (P - Q) \perp \vec{v}, (P - Q) \perp \vec{w}$$

$$P: \quad x_1 = 1 + t$$

$$x_2 = -1 + 3t$$

$$x_3 = -4 + 5t$$

$$x_4 = 1 + t$$

$$Q: \quad x_1 = 3 + s + r$$

$$x_2 = -8 + 3s + 6r$$

$$x_3 = 4 - 2r$$

$$x_4 = -2 - r$$

$$(P - Q) = (-2 + t - s - r, 7 + 3t - 3s - 6r, -8 + 5t + 2r, 3 + t + r)$$



$$\begin{aligned}
d(p, \rho) = d(B, \alpha) &= \sqrt{\frac{G(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, B - C)}{G(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}} \\
&= \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{u} \cdot \vec{w} & \vec{u} \cdot (B - C) \\ \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{v} \cdot \vec{v} & \vec{v} \cdot \vec{w} & \vec{v} \cdot (B - C) \\ \vec{w} \cdot \vec{u} & \vec{w} \cdot \vec{v} & \vec{w} \cdot \vec{w} & \vec{w} \cdot (B - C) \\ (B - C) \cdot \vec{u} & (B - C) \cdot \vec{v} & (B - C) \cdot \vec{w} & (B - C) \cdot (B - C) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{u} & \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{v} \cdot \vec{v} & \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot \vec{u} & \vec{w} \cdot \vec{v} & \vec{w} \cdot \vec{w} \end{vmatrix}}} \\
&= \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} 36 & 10 & 8 & -18 \\ 10 & 10 & 19 & 19 \\ 8 & 19 & 42 & 53 \\ -18 & 19 & 53 & 126 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 36 & 10 & 8 \\ 10 & 10 & 19 \\ 8 & 19 & 42 \end{vmatrix}}} = \sqrt{\frac{11664}{324}} = \sqrt{36} = \underline{\underline{6}}
\end{aligned}$$

8.8

$$\begin{aligned}
\vec{n}_\rho &= (2, 6, 3) \\
\vec{u} &= (-3, -1, 4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot (-3) + 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 &= 0 \implies \vec{u} \in V_\rho \implies (p \parallel \rho \wedge p \not\subset \rho) \vee p \subset \rho \\
2 \cdot 2 + 6 \cdot 13 + 3 \cdot 7 - 5 &\neq 0 \implies B \notin \rho \implies p \parallel \rho \wedge p \not\subset \rho
\end{aligned}$$

$$d(p, \rho) = d(B, \rho) = \frac{|2 \cdot 2 + 6 \cdot 13 + 3 \cdot 7 - 5|}{\sqrt{4 + 36 + 9}} = \frac{98}{7} = \underline{\underline{14}}$$

8.9

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  jsou LN  $\implies p, \rho$  jsou různoběžné nebo mimoběžné

$$(P - R) = (2, 7, -2, -9)$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= -9 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -9 \cdot (-5) + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 19 = 9 \neq 0 \\
&\implies (P - R), \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ jsou LN} \implies p, \rho \text{ jsou mimoběžné}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(p, \rho) &= d(P, \alpha) \\
\alpha &= \{R; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha : \quad x_1 + 2 &= -2t - s + r \\
x_2 + 4 &= \quad - s + 2r \\
x_3 &= -t - 2s + r \\
x_4 - 4 &= 2t + 2s
\end{aligned} \quad t, s, r \in \mathbb{R}$$



$$\begin{vmatrix} x_1 + 2 & -2 & -1 & 1 \\ x_2 + 4 & 0 & -1 & 2 \\ x_3 & -1 & -2 & 1 \\ x_4 - 4 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 + 4 & 0 & -1 \\ x_3 & -1 & -2 \\ x_4 - 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} x_1 + 2 & -2 & -1 \\ x_3 & -1 & -2 \\ x_4 - 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 + 2 & -2 & -1 \\ x_2 + 4 & 0 & -1 \\ x_4 - 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 - 32 = 0$$

$$d(p, \rho) = d(P, \alpha) = \frac{|2 \cdot 0 - 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-2) + 5 \cdot (-5) - 32|}{\sqrt{4 + 16 + 36 + 25}} = \frac{81}{\sqrt{81}} = \underline{\underline{9}}$$

□

## 9 Odchylky

**Úloha 9.1** V prostoru  $E_3$  určete odchylku rovin  $\rho$  a  $\sigma$ , je-li

$$\begin{aligned} \rho &= \{A = [-1, 2, -5]; \vec{u} = (1, 1, 1), \vec{v} = (1, -1, 1)\}, \\ \sigma &= \{B = [3, -7, 8]; \vec{x} = (1, 0, 0), \vec{y} = (1, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

**Úloha 9.2** V prostoru  $E_3$  je dána přímka  $p = \{P = [1, 2, -1]; \vec{u} = (1, a, -1)\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  a rovina  $\rho: x + y - z + 8 = 0$ . Určete  $a \in \mathbb{R}$  tak, aby

- $p \perp \rho$ ,
- $|\sphericalangle p\rho| = 30^\circ$ ,
- $p \parallel \rho$ .

**Úloha 9.3** V prostoru  $E_2$  určete odchylku přímek  $p$  a  $q$ , je-li

$$\begin{aligned} p: & \quad 2x + y - 3 = 0, \\ q: & \quad 3x - y + 5 = 0. \end{aligned}$$

**Úloha 9.4** V prostoru  $E_2$  napište rovnici přímky  $p$ , která prochází bodem  $A = [-1, 1]$  a s přímkou  $q$  svírá úhel  $45^\circ$ , je-li

$$q: \quad .2x + 3y - 6 = 0.$$

*Řešení.*

9.1

$$\begin{aligned} \vec{n}_\rho &= \vec{u} \times \vec{v} = (2, 0, -2) \\ \vec{n}_\sigma &= \vec{x} \times \vec{y} = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\rho \cdot \vec{n}_\sigma|}{\|\vec{n}_\rho\| \cdot \|\vec{n}_\sigma\|} = \frac{|0 + 0 - 2|}{\sqrt{4 + 4} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \varphi = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

9.2 a)

$$\vec{n}_\rho = (1, 1, -1) \quad \vec{u}_p = (1, a, -1)$$

Má-li být  $p \parallel \rho$ , musí být  $\vec{n}_\rho, \vec{u}_p$  LZ.

$$(1, 1, -1) = k \cdot (1, a, -1) \implies k = 1 \implies \underline{\underline{a = 1}}$$

b)

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= \frac{|1 + a + 1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2 + a^2}} \\ \frac{1}{2} &= \frac{|a + 2|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2 + a^2}} \\ \sqrt{3} \cdot \sqrt{2 + a^2} &= 2 \cdot |a + 2| \quad /^2 \\ 3 \cdot (a^2 + 2) &= 4 \cdot (a + 2)^2 \\ 3a^2 + 6 &= 4a^2 + 16a + 16 \\ a^2 + 16a + 10 &= 0\end{aligned}$$

$$D = 256 - 40 = 216 = 6 \cdot 36$$

$$a_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{6 \cdot 36}}{2} = \begin{cases} \frac{-8 + 3\sqrt{6}}{2} \\ \frac{-8 - 3\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

c)

$$p \parallel \rho \implies \vec{u}_p \perp \vec{n}_\rho$$

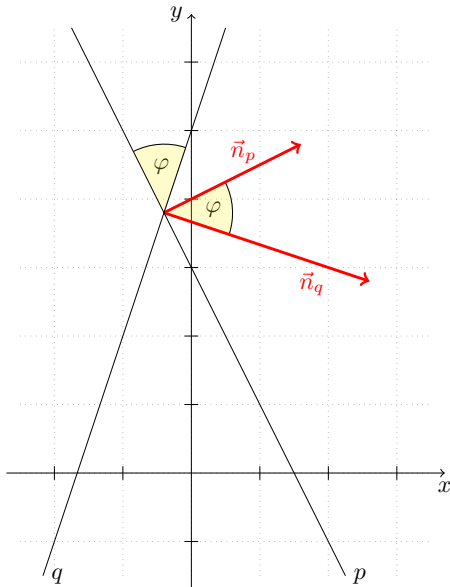
$$\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\rho = 0$$

$$(1, a, -1) \cdot (1, 1, -1) = 0$$

$$1 + a + 1 = 0$$

$$\underline{\underline{a = -2}}$$

9.3

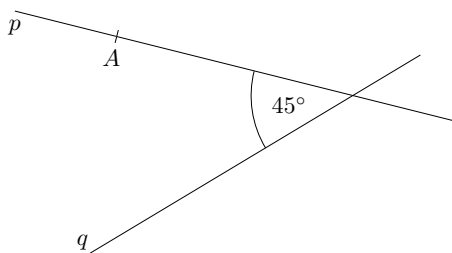


$$\vec{n}_p = (2, 1)$$

$$\vec{n}_q = (3, -1)$$

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{|6 - 1|}{\sqrt{4 + 1} \cdot \sqrt{9 + 1}} = \frac{5}{5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \varphi &= \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}\end{aligned}$$

9.4



$$\vec{n}_q = (2, 3)$$

$$\vec{n}_p = (a, b) \neq (0, 0)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(45^\circ) = \frac{|2a + 3b|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vektor  $(a, b)$  je dán až na nenulový násobek.

- pro  $a = 0$  dostaneme  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}} \implies$  nemá řešení
- pro  $a \neq 0$  můžeme vektor vydělit číslem  $a$  a řešit úlohu s jednodušším vektorem  $(1, c)$ , kde  $c = \frac{b}{a}$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{|2 + 3c|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{1 + c^2}} \\ \sqrt{26} \cdot \sqrt{1 + c^2} &= 2 \cdot |2 + 3c| \quad /^2 \\ 26 \cdot (1 + c^2) &= 4 \cdot (2 + 3c)^2 \\ 26 + 26c^2 &= 16 + 48c + 36c^2 \\ 10c^2 + 48c - 10 &= 0 \\ 5c^2 + 24c - 5 &= 0 \\ c_{1,2} &= \frac{-24 \pm \sqrt{576 + 100}}{10} = \begin{cases} \frac{1}{5} \\ -5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{n}_{p_1} &= \left(1, \frac{1}{5}\right) \sim (5, 1) \\ \vec{n}_{p_2} &= (1, -5) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} A \in p_1 : \quad \begin{array}{l} p_1 : \quad 5x + y + d = 0 \\ \quad \quad -5 + 1 + d = 0 \\ \quad \quad \quad d = 4 \end{array} \\ \quad \quad \quad \underline{\underline{p_1 : \quad 5x + y + 4 = 0}} \end{array} \quad \begin{array}{l} A \in p_2 : \quad \begin{array}{l} p_2 : \quad x - 5y + e = 0 \\ \quad \quad -1 - 5 + e = 0 \\ \quad \quad \quad e = 6 \end{array} \\ \quad \quad \quad \underline{\underline{p_2 : \quad x - 5y + 6 = 0}} \end{array}$$

□